BÖLÜM 8

SIKIŞTIRILABİLİR POTANSİYEL AKIMLAR İÇİN LİNEERİZE TEORİ

8.1. Giriş:

Sıkıştırılabilir akımların incelemesinde daha önce yararlandığımız bir-boyutlu akım kabulü sadece son derece ince cereyan boruları boyunca geçerli olan bir ilk yaklaşımdan ibarettir. Bu yaklaşım kanallar ve lüleler içindeki akımlar halinde de ilk hesaplar için oldukça yararlı sonuçlar vermektedir. Ancak, uçak kanadı, gövdesi ve kontrol yüzeyleri; türbin ve kompresör palleleri, kesit değişiminin çok fazla olduğu kanallar vb gibi ortamlardaki akımlar çoğu zaman bir-boyutluluktan uzaktır. Bu gibi akımları iki-boyutlu, veya çoğu zaman da üç-boyutlu olarak gözönüne almak ve bu şekilde incelemek gerekir.

Üç-boyutlu genel bir akım sürtünme, ısı transferi, şok gibi olaylar gözönüne alındığında matematiksel açıdan oldukça karmaşık ve çözümü güç denklemlerle ilgilenilmesini gerektirir. Bu nedenle her türlü problemde en genel akım halini almak yerine, problemin özelliğine göre daha basit modellere giderek bunların çözümlerinden yararlanmak daha uygun olur.

Örneğin, Prandtl sınır tabaka teorisine göre Reynolds sayısının yeterince büyük olduğu akımlar halinde sürtünme ve ısı transferi etkilerinin sadece katı cidarın çok yakınında, sınır tabaka adı verilen, çok ince bir tabaka içinde kendini gösterdiği bilinmektedir. Bu tabakanın dışında sürtünme etkilerini ihmal ederek akımı tamamiyle potansiyel kabul etmek mümkündür.

Akımın tamamiyla sesaltı olduğu bölgelerde şok dalgaları oluşmaz. Buna karşılık transonik ve süpersonik akımlarda genellikle şoktan kaçınmak mümkün değildir. Bununla birlikte, şoklu bir akımda şokun önündeki ve arkasındaki akımlar ayrı ayrı ele alınabilir. Şok ise bu iki bölgeyi birbirinden ayıran bir süreksizlik yüzeyi olarak ayrıca incelenebilir. Bunun yanında, başlangıçta üniform-paralel olan bir akım, akım alanında herhangi bir şok oluşmadığı sürece sınır tabaka dışında irrotasyonel olma özelliğini muhafaza edecektir.

Başlangıçta irrotasyonel olan bir akımda herhangi bir şokun oluşması halinde, şoktan sonraki akım (normal şok veya konik şok hariç) çoğu zaman rotasyonel olur. Ancak bir çok halde rotasyonellik hayli küçük olup, akımın irrotasyonel kabul edilmesi çok büyük yanlışlıklara yol açmaz.

Sıkıştırılabilir akımlardaki çoğu problemde akışkanı mükemmel gaz kabul etmek büyük kolaylık sağlar ve çözümlerde büyük yanlışlıklara yol açmaz.

Bütün bunların yanında çoğu süpersonik akımda şok dalgaları mevcut olmakla birlikte zayıf eğik şoklar halinde şoku geçen akımın antropisinde artış hayli küçüktür. Bu bakımdan zayıf eğik şoklu bir akımda zayıf şokun etkisini ihmal ederek şoku geçen akımın irrotasyonelliğini koruduğunu kabul etmek mümkündür. Yani başlangıçta potansiyel olan akım zayıf şoktan sonra da potansiyel kabul edilir ve akım alanının incelenmesinde potansiyel akım denklemlerinden yararlanılır.

Zayıf şoklu, iki-boyutlu süpersonik akımlara hücum ve firar kenarları keskin ince profiller üzerinde küçük hücum açılarında, ince palalı ve burulma açıları küçük olan türbin ve kompresörlerde, iki-boyutlu kanallarda ve süpersonik lülelerin çıkışlarında rastlamak mümkündür. Verilen örneklerden de farkedileceği gibi şokun zayıf olması cismin yarattığı bozuntuların küçük olmasıyla doğrudan ilgilidir.

Bu bölümde şokların ihmal edilebildiği küçük bozuntulu, iki-boyutlu süpersonik akımlar için yaklaşık bir analitik yöntem olan "*küçük bozuntular yöntemi*" nden bahsedilecektir. Yöntem süpersonik ve subsonik akımlar arasındaki temel farklılıklar hakkında çok önemli bilgiler vermesi yanında ayrıca, karmaşık süpersonik akımların daha yüksek mertebeden yaklaşımlarla zahmetli incelemelerinden önce akımın temel özellikleri hakkında önemli bilgiler verebilmesi bakımından da oldukça ilginçtir.

Bu bölümde mükemmel gazların *daimi*, *irrotasyonel*, *sürtünmesiz*, *adyabatik*, *sıkıştırılabilir sesaltı şoksuz* veya *şokların etkisinin ihmal edilebilir mertebede olduğu sesüstü* akımları için potansiyel denklemi çıkartılacaktır. Elde edilen potansiyel denklemin analitik çözümlerini araştırmak için küçük-bozuntular yaklaşımı ile bir *lineerleştirme* yapılacaktır.

8.2- Sıkıştırılabilir potansiyel akımlar

8.2.1- Daimi, sıkıştırılabilir akımlar için süreklilik denklemi:

süreklilik denklemi en genel halde
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Daimi akımlar için $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \quad \rightarrow \quad \nabla\left(\rho \vec{V}\right) = 0$

(x,y,z) kartezyen koordinatlarında
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Düzenleme ile
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)}$$

8.2.2- Daimi irrotasyonel sıkıştırılabilir akımlar için momentum denklemi:

(x,y,z) kartezyen koordinat sisteminde momentum denkleminin diferansiyel formu:
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} u\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{f}_{v_x} + \vec{f}_x$$
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} v\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{f}_{v_y} + \vec{f}_y$$
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} w\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \vec{f}_{v_z} + \vec{f}_z$$

Viskoz etkilerin ve bünyesel kuvvetlerin etkilerinin ihmali halinde, türevler de açılarak
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\nabla\left(\rho \vec{V}\right) + \rho \vec{V}\nabla u = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\nabla\left(\rho \vec{V}\right) + \rho \vec{V}\nabla v = -\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial \rho}{\partial t} + w\nabla\left(\rho \vec{V}\right) + \rho \vec{V}\nabla w = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Her bir denklemdeki 2. ve 3. terimlerin toplamı süreklilik denklemi gereği sıfır olup
$$\boxed{\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\nabla u\right) &= \rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V}\nabla v\right) &= \rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V}\nabla w\right) &= \rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}}$$

Euler denklemleri Açık bir formda yazılırsa

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

8.2.3- Basınç ve yoğunluğun denklemlerden yok edilmesi:

İzantropik akımlar için ses hızı $a^2=\dfrac{dp}{d\rho}$

Basınçla ilgili türevlerde kullanılarak

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}=a^2\frac{\partial \rho}{\partial x}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}=a^2\frac{\partial \rho}{\partial y}$$
$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z}=a^2\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

Böylece momentum denklemi

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}$$
$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

İlk denklem *u* ile ikincisi *v* ile ve üçüncüsü de *w* ile çarpılıp tüm denklemler toplanarak

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial v}{\partial y}+w^2\frac{\partial w}{\partial z}+uv\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+uw\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+vw\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$=-\frac{a^2}{\rho}\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)$$

Süreklilik denklemi yardımıyla yoğunluklar yok edilerek

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\\&\qquad-\frac{uv}{a^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{uw}{a^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{vw}{a^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0\end{aligned}}$$

Bu denklemde artık basınç ve yoğunluk yer almamakta olup, sadece hız bileşenlerine ve ses hızına bağlı bir denkleme ulaşılmıştır.

8.2.4- Sıkıştırılabilir potansiyel denklemi:

Potansiyel akım halinde $\vec{V} = \nabla \phi$

Hız bileşenleri $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \ , \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y \ , \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z$

İrrotasyonellik nedeniyle $\nabla \times \vec{V} = 0 \quad \rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \phi_{xy} = \phi_{yx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow \phi_{xz} = \phi_{zx}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \rightarrow \phi_{yz} = \phi_{zy}$$

Bütün bu ifadeler yukarıdaki denklemde kullanılarak

$$\boxed{\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right)\phi_{yy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right)\phi_{zz} - 2\frac{\phi_x \phi_y}{a^2}\phi_{xy} - 2\frac{\phi_x \phi_z}{a^2}\phi_{xz} - 2\frac{\phi_y \phi_z}{a^2}\phi_{yz} = 0}$$

Daimi, "*Sıkıştırılabilir akımlar için potansiyel denklemi*" elde edilir.

Denklem, *sesaltı akımlar için eliptik*, *sesüstü akımlar için hiperbolik* karakterdedir.

8.2.5- Enerji denklemi:

Sıkıştırılabilir potansiyel denklemi potansiyel fonksiyonu dışında ikinci bir bilinmeyen olarak ses hızını içermektedir. Bu bakımdan tek başına çözüm için yeterli değildir.

Potansiyel denkleminde geçen *a* ses hızı enerji denklemi vasıtasıyla akım hızına, ve dolayısiyle hız bileşenlerine veya potansiyel fonksiyonuna bağlanabilir:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\left|\vec{V}\right|^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)$$

$$\boxed{a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2\right)}$$

8.3- İki-boyutlu küçük bozuntulu akımlar için lineerize teori

Sıkıştırılabilir potansiyel denklemi non-lineer bir denklem olup analitik çözümü zordur. Ancak bozuntuların küçük kabul edilebildiği akımlar için lineerleştirilerek çözümleri araştırılabilir.

8.3.1- İki-boyutlu potansiyel akım denklemleri:

İki boyutlu akım halinde

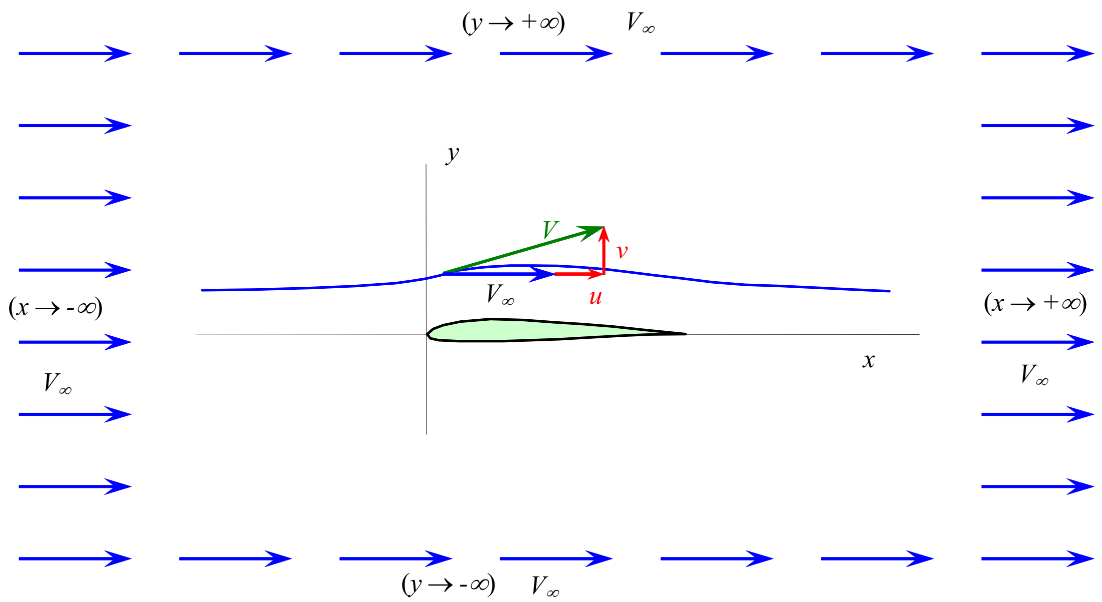
Potansiyel denklemi
$$\left(1-\frac{\phi_x^2}{a^2}\right)\cdot\phi_{xx}-2\frac{\phi_x\phi_y}{a^2}\cdot\phi_{xy}+\left(1-\frac{\phi_y^2}{a^2}\right)\cdot\phi_{yy}=0$$

Enerji denklemi
$$a^2=a_0^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\phi_x^2+\phi_y^2\right)$$

8.3.2- Küçük bozuntular yaklaşımı:

İki-boyutlu halde de sıkıştırılabilir potansiyel denklemi non-lineer olup analitik çözümü zordur. Ancak, uçak kanatlarında, pervane palalarında, eksenel kompresör ve türbinlerde akımın iki-boyutlu kabul edildiği bölgelerde bazı hallerde cismin yarattığı bozucu etkiler hayli küçüktür. Bu gibi durumlarda cisim etrafındaki akımı üniform-paralel bir akımla, cismin yarattığı küçük bozuntular akımının süperpozisyonu olarak düşünmek çok büyük hatalara yol açmaz. Böylece potansiyel akım denklemlerini lineerleştirip çözüme ulaştırmak mümkün olur.

Buna göre şekilde görüldüğü gibi üniform-paralel akımda yer alan iki-boyutlu ince bir cismin civarındaki bir noktada akım hızı serbest akım hızı ile cismin yarattığı bozuntu hızının süperpozisyonuyla ifade edilebilir.



Aynı düşünce ile, potansiyel fonksiyonu da üniform-paralel akıma ait potansiyel fonksiyonu ile cismin varlığından kaynaklanan bir bozuntu potansiyelinin toplamı şeklinde alınabilir.

$$\phi=\phi_\infty+\varphi$$

Şekildeki akım için x ekseni serbest akım doğrultusunda olup $\boxed{\phi=V_\infty x+\varphi}$

Potansiyel fonksiyonunun türevleri

$$\phi_x = V_\infty + \varphi_x = V_\infty + u$$
$$\phi_{xx} = \varphi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\phi_y = \varphi_y = v$$
$$\phi_{yy} = \varphi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\phi_{xy} = \phi_{yx} = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

8.3.3- Enerji denkleminin seri açılımı:

Enerji denklemi

$$a_0^2 = a^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2\right) = a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}V_\infty^2$$

Hız bileşenleri cinsinden

$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2}\left[(V_\infty + u)^2 + v^2\right] = a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}V_\infty^2$$

Serbest akımın Mach sayısı

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$$

Enerji denkleminde kullanılarak

$$\frac{a_\infty^2}{a^2} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right)\right]^{-1}$$

Bozuntular küçük

$$\frac{u}{V_\infty} << 1, \qquad \frac{v}{V_\infty} << 1$$

Binom serisine açılarak

$$\boxed{\frac{a_\infty^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right) + O\left[M_\infty^4\frac{u^2}{V_\infty^2}\right] + \ldots}$$

8.3.4- Potansiyel denkleminin katsayılarının seri açılımları:

Potansiyel denkleminin herbir teriminin katsayısı düzenlenip enerji denklemi için elde edilen seri açılım kullanılarak

$$1 - \frac{\phi_x^2}{a^2} = 1 - \frac{(V_\infty + u)^2}{a^2} = 1 - \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\left(1 + \frac{u}{V_\infty}\right)^2 \frac{a_\infty^2}{a^2}$$
$$= 1 - M_\infty^2\left(1 + 2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2}{V_\infty^2}\right)\cdot\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right) + \ldots\right]$$

$$\boxed{1 - \frac{\phi_x^2}{a^2} = 1 - M_\infty^2 - 2M_\infty^2\frac{u}{V_\infty} - M_\infty^4(\gamma-1)\frac{u}{V_\infty} - M_\infty^2\frac{u^2}{V_\infty^2} + \ldots}$$

$$1-\frac{\phi_y^2}{a^2}=1-\frac{v^2}{a^2}=1-\frac{v^2}{V_\infty^2}\cdot\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\cdot\frac{a_\infty^2}{a^2}$$
$$=1-M_\infty^2\frac{v^2}{V_\infty^2}\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty}+\frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right)+\dots\right]$$

$$\boxed{1-\frac{\phi_y^2}{a^2}=1-M_\infty^2\frac{v^2}{V_\infty^2}+\dots}$$

$$2\frac{\phi_x\phi_y}{a^2}=2\frac{(V_\infty+u)\cdot v}{a^2}=2\frac{V_\infty+u}{V_\infty}\cdot\frac{v}{V_\infty}\cdot\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}\cdot\frac{a_\infty^2}{a^2}$$
$$=2\left(1+\frac{u}{V_\infty}\right)\cdot\frac{v}{V_\infty}\cdot M_\infty^2\cdot\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty}+\frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right)+\dots\right]$$

$$\boxed{2\frac{\phi_x\phi_y}{a^2}=2M_\infty^2\cdot\frac{v}{V_\infty}+2M_\infty^2\cdot\frac{uv}{V_\infty^2}+\dots}$$

8.3.5- Potansiyel denkleminin lineerleştirilmesi:

Potansiyel denkleminin katsayılarına toplu olarak bakıldığında

$$\boxed{M_\infty^2\cdot\frac{u^2}{V_\infty^2}<<1}\ ,\quad \boxed{M_\infty^2\cdot\frac{v^2}{V_\infty^2}<<1}\ ,\quad \boxed{M_\infty^2\cdot\frac{uv}{V_\infty^2}<<1}$$

olması halinde ikinci katsayının non-lineerlikten kurtulduğu görülmektedir.

$$\boxed{\begin{aligned}&1-\frac{\phi_x^2}{a^2}\cong 1-M_\infty^2-2M_\infty^2\frac{u}{V_\infty}-M_\infty^4(\gamma-1)\frac{u}{V_\infty}\\&1-\frac{\phi_y^2}{a^2}\cong 1\\&2\frac{\phi_x\phi_y}{a^2}\cong 2M_\infty^2\cdot\frac{v}{V_\infty}\end{aligned}}$$

Ancak bu kabuller diğer terimler için yeterli değildir. Üçüncü katsayıda non-lineerlik v/V_∞ büyüklüğünden kaynaklanmakta olup, lineerleştirme için

$$\boxed{M_\infty^2\cdot\frac{v}{V_\infty}<<1}$$

olması gerekmektedir. Bu durumda zaten bu katsayı tamamiyle ortadan kalkmaktadır. Birinci terimin katsayısı ise

$$1-\frac{\phi_x^2}{a^2}\cong\left(1-M_\infty^2\right)\cdot\left[1-\frac{M_\infty^2}{1-M_\infty^2}\cdot\frac{u}{V_\infty}\cdot\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)\right]$$

şeklinde yeniden düzenlenirse bu terimin lineerleştirilmesi için de

$$\boxed{\left|\frac{M_\infty^2}{1-M_\infty^2}\right| \cdot \frac{u}{V_\infty} << 1}$$

olması gerektiği görülmektedir. Buradaki mutlak değer, sesaltı ve sesüstü akımların her ikisi birlikte düşünüldüğü için kullanılmıştır.

Yapılan bu kabullerle birlikte sıkıştırılabilir potansiyel denklemi için lineer bir ifade

$$\boxed{\left(1-M_\infty^2\right)\cdot \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0}$$

şeklinde bulunur. Veya

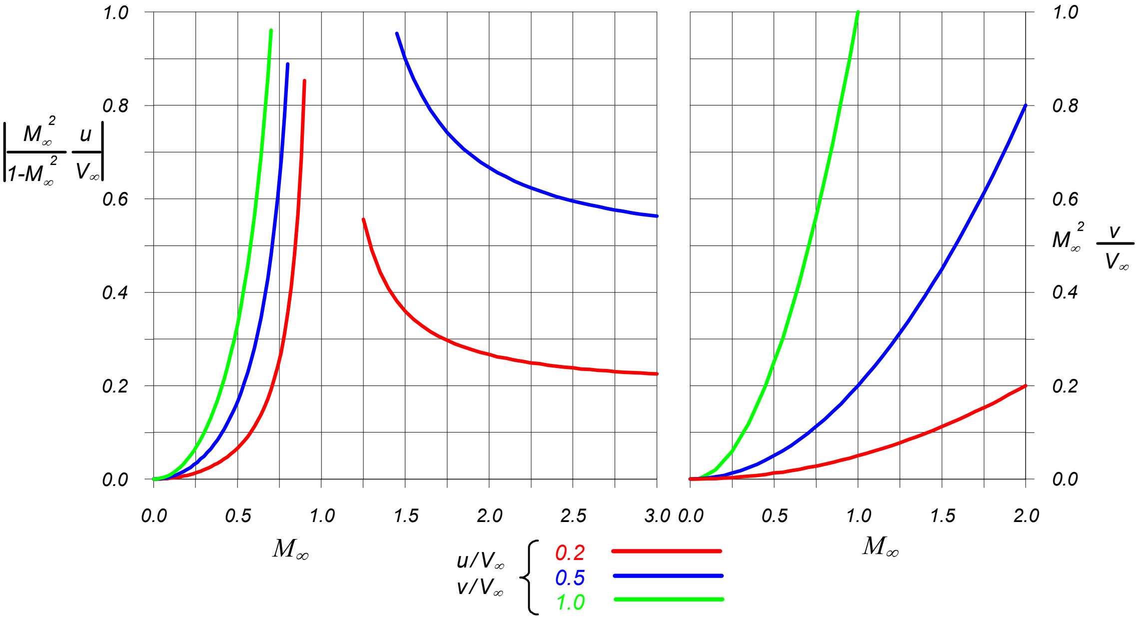
$$\boxed{\beta^2 = 1 - M_\infty^2}$$

olmak üzere

$$\boxed{\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0}$$

yazılabilir.

Potansiyel akım denkleminin lineerleştirilmesi ortaya konulan son iki şart daha önceki şartları da içermekte olup, daha kuvvetli şartlardır. Bu büyüklüklerin Mach sayısı ve bozuntu büyüklükleriyle değişimleri, bir fikir vermek üzere aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



u/V_∞ ve v/V_∞ hız oranları öncelikle cismin kalınlık oranına bağlıdır. Dolayısiyle lineerleştirme için koşulan şartlar ince profiller için çok yüksek sesaltı hızlar ve uygun süpersonik hızlar için genellikle sağlanır. Buna karşılık kalın profiller için bu bağıntılar ancak küçük sesaltı Mach sayılarında sağlanır.

Bununla birlikte koşulan şartlardan ve bunlara ilişkin şekillerden, lineerleştirmenin gerçekleşebilmesi için bozuntu hızlarının küçük olması yanında Mach sayısının da *1*'e yakın olmaması gerektiği görülmektedir. Diğer bir deyişle, bu bölümde izah edilen lineerize teori çok yüksek hızlı sesaltı akımlar için ve çok düşük hızlı süpersonik akımlar için geçerli değildir.

8.3.5- Basınç katsayısının lineerleştirilmesi:

Basınç katsayısı
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{½\,\rho_\infty V_\infty^2}$$

Yüksek hızlı akımlar için
$$\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 = \frac{1}{2}\gamma\, p_\infty M_\infty^2$$

kullanılarak
$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right)$$

İzantropik akımlar için
$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma R T}{\gamma R T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a^2}{a_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Enerji denkleminin seri açılımı kullanılarak
$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right) + \ldots\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Binom serisine açılarak
$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{\gamma}{2}M_\infty^2\left(2\frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2+v^2}{V_\infty^2}\right) + \ldots$$

Böylece basınç katsayısı
$$C_p = -2\frac{u}{V_\infty} - \frac{u^2+v^2}{V_\infty^2} + \cdots$$

Bu ifade
$$\boxed{\frac{u^2}{V_\infty^2} << 1\,, \qquad \frac{v^2}{V_\infty^2} << 1}$$

olması durumunda lineerleşerek
$$\boxed{C_p \cong -2\frac{u}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}}$$

şeklinde yazılabilir. Yapılan bu son kabuller, daha önceki kabuller çerçevesinde geçerlidir.