BÖLÜM 6

AKIŞKAN HAREKETİNİ YÖNETEN GENEL DENKLEMLERİN

DİFERANSİYEL FORMU

1.1 Hareketi takiben alınmış türev

1.2 Diverjans teoremi

1.3 Süreklilik denkleminin diferansiyel formu

1.4 Momentum denkleminin diferansiyel formu

1.5 Enerji denkleminin diferansiyel formu

1.1- Hareketi Takiben Alınmış Türev

(x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde bir $A(x, y, z, t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Fonksiyonun tam diferansiyeli $$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz + \frac{\partial A}{\partial t}dt$$

Düzenlenerek $$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Hız tanımı $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, $\rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$

Böylece $$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z}$$

Ayrıca gradyan tanımı gereği $$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

Böylece *hareketi takiben alınmış türev* $$\boxed{\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla A}$$

Bu ifadede ilk terim zamana göre değişimleri, ikinci terim ise konuma göre değişimleri ifade etmektedir. Sedece konuma göre alınmış türevlerden farklı olduğunun anlaşılması için de türev sembolü olarak küçük *d* harfi yerine büyük *D* harfi kullanılmaktadır.

1.2- Diverjans Teoremi

A bir vektörel veya skaler büyüklük olmak üzere bir yüzey integrali diverjans teoremi yardımıyla bir hacim integraline dönüştürülebilir

$$\boxed{\iint_S A\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_\upsilon \nabla A\cdot d\upsilon}$$

1.3- Süreklilik Denkleminin Diferansiyel Formu

Süreklililik denkleminin integral formu
$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\upsilon \rho\cdot d\upsilon+\iint_S \rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=0$$

Yüzey integrali hacim integraline dönüştürülerek
$$\iint_S\left(\rho\cdot\vec{V}\right)\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_\upsilon\nabla\left(\rho\cdot\vec{V}\right)\cdot d\upsilon$$

İntegraller birleştirilerek
$$\iiint_\upsilon\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\cdot\vec{V}\right)\right]\cdot d\upsilon=0$$

Kontrol hacmi sonsuz küçük yapıldığında integrand sıfıra eşitlenerek *süreklilik denkleminin diferansiyel formu*

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\cdot\vec{V}\right)=0}\quad\text{Daimi akım için}\quad\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}\quad\rightarrow\quad\boxed{\nabla\left(\rho\cdot\vec{V}\right)=0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\nabla\rho+\rho\nabla\vec{V}(\cdot)=0}$$

$$\downarrow$$

Materyal türev tanımı kullanılarak

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\nabla\vec{V}=0}\quad\text{Daimi, sıkıştırılamaz akım}\quad\boxed{\frac{D\rho}{Dt}=0}\quad\rightarrow\quad\boxed{\nabla\vec{V}=0}$$

1.4- Momentum Denkleminin Diferansiyel Formu

Momentum denkleminin integral formu

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\upsilon}(\rho \cdot d\upsilon)\cdot \vec{V} + \iint_{S}\left(\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS\right)\cdot \vec{V} = -\iint_{S} p \cdot \vec{n}\, dS + \vec{F}_{visc} + \iiint_{\upsilon} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\upsilon$$

Basınçla ilgili yüzey integrali hacim integraline dönüştürülerek

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\upsilon}(\rho \cdot d\upsilon)\cdot \vec{V} + \iint_{S}\left(\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS\right)\cdot \vec{V} = -\iiint_{\upsilon} \nabla p\, d\upsilon + \vec{F}_{visc} + \iiint_{\upsilon} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\upsilon$$

Bu vektörel eşitlik örneğin bir (x,y,z) kartezyen koordinat sisteminde

Hız vektörü $\vec{V} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$

Teğetsel kuvvet vektörü $\vec{F}_{visc} = F_{x-visc}\,\vec{i} + F_{y-visc}\,\vec{j} + F_{z-visc}\,\vec{k}$

Bünyesel kuvvet vektörü $\vec{f} = f_x\,\vec{i} + f_y\,\vec{j} + f_z\,\vec{k}$

Olmak üzere üç bileşene ayrılarak örneğin x bileşeni

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\upsilon}(\rho \cdot d\upsilon)\cdot u + \iint_{S}\left(\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS\right)\cdot u = -\iiint_{\upsilon} \frac{\partial p}{\partial x}\, d\upsilon + F_{x-visc} + \iiint_{\upsilon} \rho \cdot f_x \cdot d\upsilon$$

Akı terimi hacim integraline dönüştürülerek ve integraller birleştirilerek

$$\iiint_{\upsilon}\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} u\right)\right]\cdot d\upsilon = \iiint_{\upsilon}\left[-\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x\right] d\upsilon$$

Kontrol hacmi sonsuz küçük yapılarak *Momentum denkleminin diferansiyel formu*

Veya *Navier-Stokes denklemleri*

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} u\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x}$$

Benzer işlemlerle y bileşeni

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} v\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y}$$

Benzer işlemlerle z bileşeni

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V} w\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z}$$

Daimi akım $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0}$ $\downarrow$

Bünyesel kuvvet ihmal edilirse $\boxed{\vec{f} \equiv 0}$ $\downarrow$

Viskoz etkiler ihmal edilirse $\boxed{\vec{f}_{visc} \equiv 0}$ $\downarrow$

Euler denklemleri

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\left(\rho\,\vec{V}\,u\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x}\\ \nabla\left(\rho\,\vec{V}\,v\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y}\\ \nabla\left(\rho\,\vec{V}\,w\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}}$$

Veya Navier-Stokes denklemlerinde

örneğin x bileşeninde

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\left(\rho\,\vec{V}\,u\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x}$$

Soldaki terimler açılarak

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{V}\,\nabla u + u\,\nabla\left(\rho\vec{V}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

Düzenlenerek

$$u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{V}\right)\right] + \rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\,\nabla u\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

İlk terim süreklilik denklemi gereği sıfır olup

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\,\nabla u\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x$$

materyal türev kavramı kullanılarak

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_{x-visc} + \rho \cdot f_x}$$

Benzer işlemlerle y bileşeni

$$\boxed{\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_{y-visc} + \rho \cdot f_y}$$

Benzer işlemlerle z bileşeni

$$\boxed{\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_{z-visc} + \rho \cdot f_z}$$

1.5- Enerji Denkleminin Diferansiyel Formu

Enerji denkleminin integral formu

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\upsilon} \rho \cdot \left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\cdot d\upsilon + \iint_S \left(\rho \cdot \vec{V}\cdot \vec{n}\, dS\right)\cdot \left(e+\frac{1}{2}V^2\right) = -\iint_S \left(p\cdot \vec{n}\, dS\right)\cdot \vec{V} + \iiint_{\upsilon}\left(\vec{f}\cdot \rho \cdot d\upsilon\right)\cdot \vec{V} + \dot{W}_{visc} + \iiint_{\upsilon} \dot{q}\cdot \rho \cdot d\upsilon + \dot{Q}_{visc}$$

Benzeri şekilde yüzey integralleri hacim integrallerine dönüştürülerek, integraller birleştirilerek ve kontrol hacmi sonsuz küçültülerek *enerji denkleminin diferansiyel formu*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \cdot \left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\right] + \nabla\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\vec{V}\right] = -\nabla\left(p\vec{V}\right) + \rho\,\vec{f}\,\vec{V} + \dot{w}_{visc} + \rho\,\dot{q} + \dot{q}_{visc}}$$

Daimi akım $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0}$ ↓

Bünyesel kuvvet ihmal edilirse $\boxed{\vec{f}\equiv 0}$ ↓

Viskoz etkiler ihmal edilirse $\boxed{\dot{w}_{visc}\equiv 0\,,\quad \dot{q}_{visc}\equiv 0}$ ↓

Adyabatik olay halinde (ısı ilavesi yok) $\boxed{\dot{q}\equiv 0}$ ↓

$$\boxed{\nabla\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\vec{V}\right] = -\nabla\left(p\vec{V}\right)}$$