

BÖLÜM 4

EĞİK ŞOKLAR VE GENİŞLEME DALGALARI

- 4.1- Giriş
- 4.2- Eğik şok denklemleri
- 4.3- Kama-burun ve koni etrafında akım
- 4.4- Şok poleri
- 4.5- Eğik şok dalgasının katı bir cıardan yansıması
- 4.6- Basınç - sapma açısı diyagramı
- 4.7- Farklı aileden şok dalgalarının kesişmesi
- 4.8- Aynı aileden şok dalgalarının kesişmesi
- 4.9- Mach yansıması
- 4.10- Küt burunlu bir cismin önündeki ayırık şok dalgası
- 4.11- Üç-boyutlu şok dalgaları
- 4.12- Prandtl-Meyer genişleme dalgalarının incelenmesi
- 4.13- Süpersonik profiller için şok-genişleme dalgaları teorisi

4.1. Giriş:

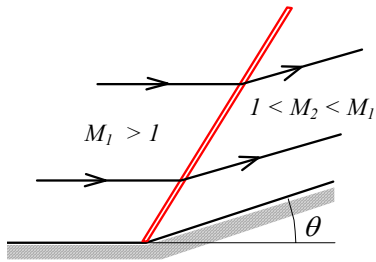
Eğik Şok Dalgası

Eğik şoklar çoğunlukla süpersonik akımın kendi içine doğru döndüğü yerlerde oluşur.

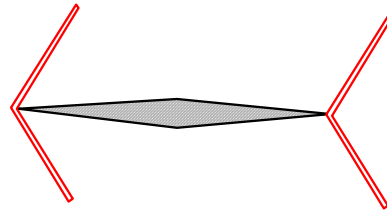
Normal şok eğik şokun bir özel halidir.

Eğik şok dalgasını geçerken Mach sayısı azalmakla birlikte akım sesaltı rejime inmez.

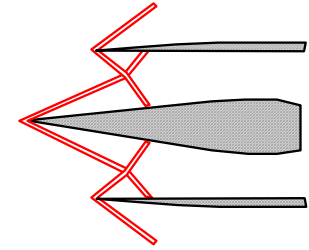
Basınç, sıcaklık ve yoğunluk ise bir artış gösterir.



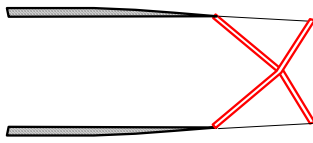
a) Köşe içinde şok



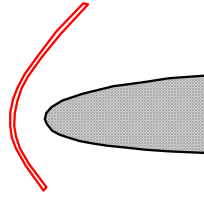
b) Süpersonik profil üzerinde şok dalgaları



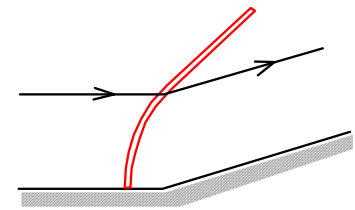
c) Süpersonik Hava alığında şok dalgaları



d) Motor lülesi çıkışında şok dalgaları



e) Küt cisim önünde ayırık şok dalgası



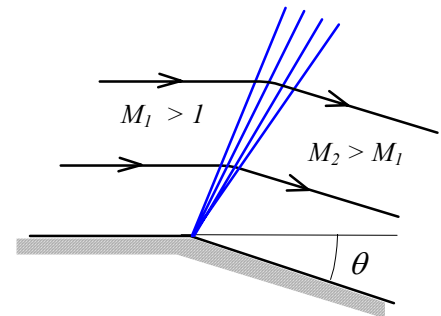
f) Köşe içinde ayırık şok

Genişleme Dalgası

Süpersonik akımın dışa doğru dönmesiyle "genişleme dalgaları" oluşur.

Genişleme dalgaları duvardan uzaklaştıkça genişleyen bir yelpaze gibidir.

Akım çizgileri bu yelpaze içinden geçerken düzgün ve sürekli bir şekilde yön değiştirir ve dalga bölgesini geçtikten sonra tekrar duvara paralel hale gelir.



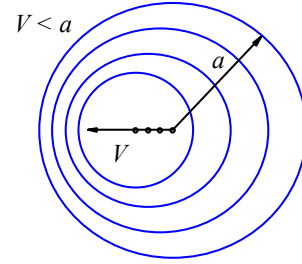
Genişleme dalgalarını geçerken Mach sayısı artar. Basınç, sıcaklık ve yoğunluk ise azalır.

Şok ve Genişleme Dalgalarının Oluşumu

Şok ve Mach dalgalarının oluşumunu anlamak için süpersonik akım içerisinde bozuntuların nasıl hareket ettiğini incelemek gerekir.

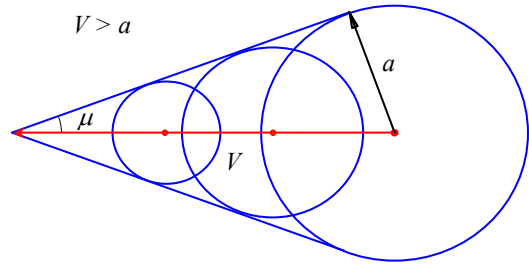
Akışkan ortamında hareket eden bir cisim her an küçük şiddetli basınç dalgaları üretir. Basınç dalgaları akışkan ortamı içerisinde molekülden moleküle iletilerek ses hızına eşit bir hızla küresel dalgalar şeklinde yayılır.

Şekildeki gibi noktasal bir cisim ses hızından küçük bir hızla hareket ediyorsa, basınç dalgaları ses hızıyla yayıldığı için daima bu daima bu dalga kürelerinin içerisinde kalır.



Cismin bütün hareketi boyunca ortamdaki varlığı kendisinden daha ilerideki noktalarda hissedilir.

Noktasal cisim ses hızından daha büyük bir hızla hareket ediyorsa, kendi yaydığı bozuntulardan daha hızlı hareket ettiği için onlardan daima daha ileride olacaktır.



Cismin oluşturduğu bütün basınç dalgaları tepe açısı 2μ olan bir koninin içerisinde kalacak, cismin varlığı bu konik bölge dışındaki hiç bir noktada hissedilmeyecektir.

Koninin yüzeyi boyunca akım özellikleri aynı olup, bu konik yüzey bir Mach dalgası olarak adlandırılır.

Koni kesitinin geometrisinden

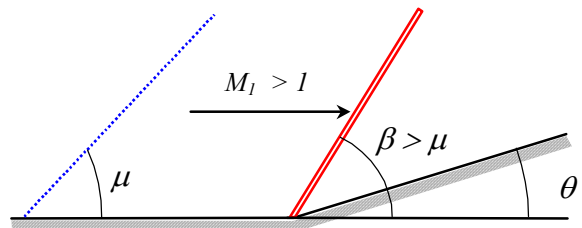
$$\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}$$

yazılabilir.

Mach dalgaları küçük şiddette dalgalar olup, bunları aşan akım özelliklerinde sonsuz küçük değişimler görülür. Yani, akım özelliklerinde herhangi bir süreksizlik söz konusu değildir.

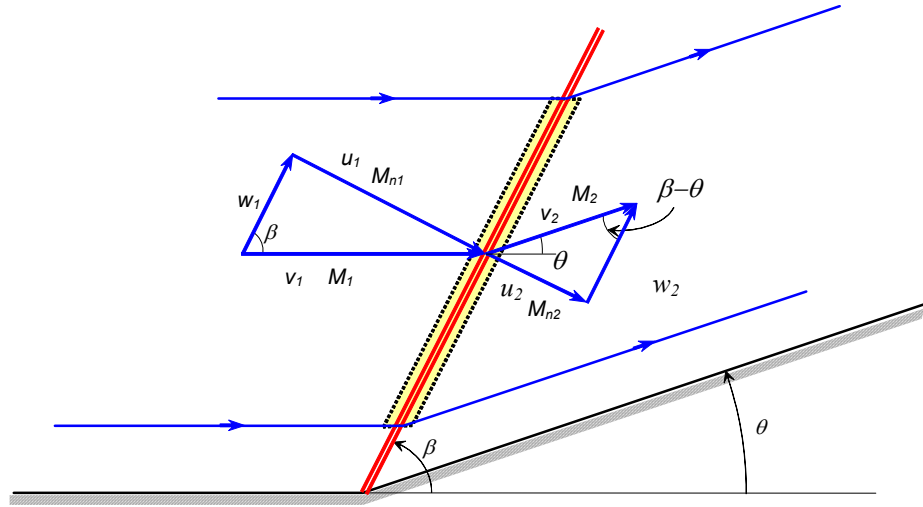
Ancak bu dalgaların bir içbükey köşe etrafında olduğu gibi üstüste binmeleri halinde daha kuvvetli dalgalar meydana gelir. Bu dalgalara eğik şok dalgası adı verilir

Oluşan eğik şokun β eğim açısı gelen akımın Mach dalgasının μ açısından daha büyüktür



Mach dalgalarına eğik şokların zayıf şiddette özel bir hali olarak da bakmak mümkündür.

4.2. Eğik Şok Denklemleri:



Şok çok ince ($\sim 10^{-4}$ mm) bir tabaka olduğundan şoku geçerken kontrol hacminin genişliğinin değişmeyeceği kabul edilir.

Süreklilik denklemi

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (4.1-1a)$$

Kontrol hacminden geçen bütün akım çizgileri üzerinde akım özelliklerinin aynı olduğu kabul edilir.

Şoka paralel doğrultuda momentum denklemi

$$0 = \rho u (w_1 - w_2) \rightarrow w_1 = w_2 \quad (4.1-1b)$$

Önemli sonuç: Akımın şoka paralel bileşeni şoku geçerken değişmez

Şoka dik doğrultuda momentum denklemi

$$p_1 - p_2 = (\rho_2 u_2) \cdot u_2 - (\rho_1 u_1) \cdot u_1$$

Düzenlenerek

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad (4.1-1c)$$

Şokun çok ince olması nedeniyle şoku geçmekte olan akışkanın çevre ile ısı alışverişinde bulunmadığı ve dolayısıyla olayın adyabatik geliştiği kabul edilebilir.

Enerji denklemi
$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

Hız vektörleri için
$$V_1^2 = u_1^2 + w_1^2, \quad V_2^2 = u_2^2 + w_2^2, \quad w_1 = w_2$$

yazılarak

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (4.1-1d)$$

(4.1-1) denklemleri eğik şok için çıkarılmış olmakla birlikte normal şok denklemlerinden farkı yoktur. Bir bakıma eğik şoka dik doğrultudaki akım bileşenleri için yazılmış dik-şok denklemleridir.

Eğik şokun hız bileşenleri dikkate alınarak normal şok bağıntıları bu probleme uyarlanırsa

$$M_{n2}^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1) / 2] M_{n1}^2}{\gamma M_{n1}^2 - (\gamma - 1) / 2} \quad (4.1-2a)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} [M_{n1}^2 - 1] \quad (4.1-2b)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_{n1}^2}{2 + (\gamma - 1) M_{n1}^2} \quad (4.1-2c)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (4.1-2d)$$

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta \quad (4.1-2e)$$

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} \quad (4.1-2f)$$

(4.1-2) bağıntıları şokun arkasındaki akım özelliklerini şokun önündeki akımın M_1 Mach sayısına, β eğik şok açısına ve akımdaki θ sapma açısına bağlamaktadır.

Çoğu halde M_1 şok probleminin bilinen büyüklüğüdür. Şoku geçen akım duvara paralel hareket edeceği için akımdaki θ sapma miktarı da bellidir. Ancak şokun β açısı belli değildir. Bunun için ilave bir bağıntı gerekir.

Şok önü ve arkasında hız bileşenlerinden

$$\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}, \quad \tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2}$$

Bu bağıntılar karşılıklı oranlanarak

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2 / w_2}{u_1 / w_1} = \frac{u_2 w_1}{u_1 w_2}$$

$w_1 = w_2$ ve $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ olduğu hatırlanarak

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Yoğunluk oranı için (4.1-2c) kullanılarak

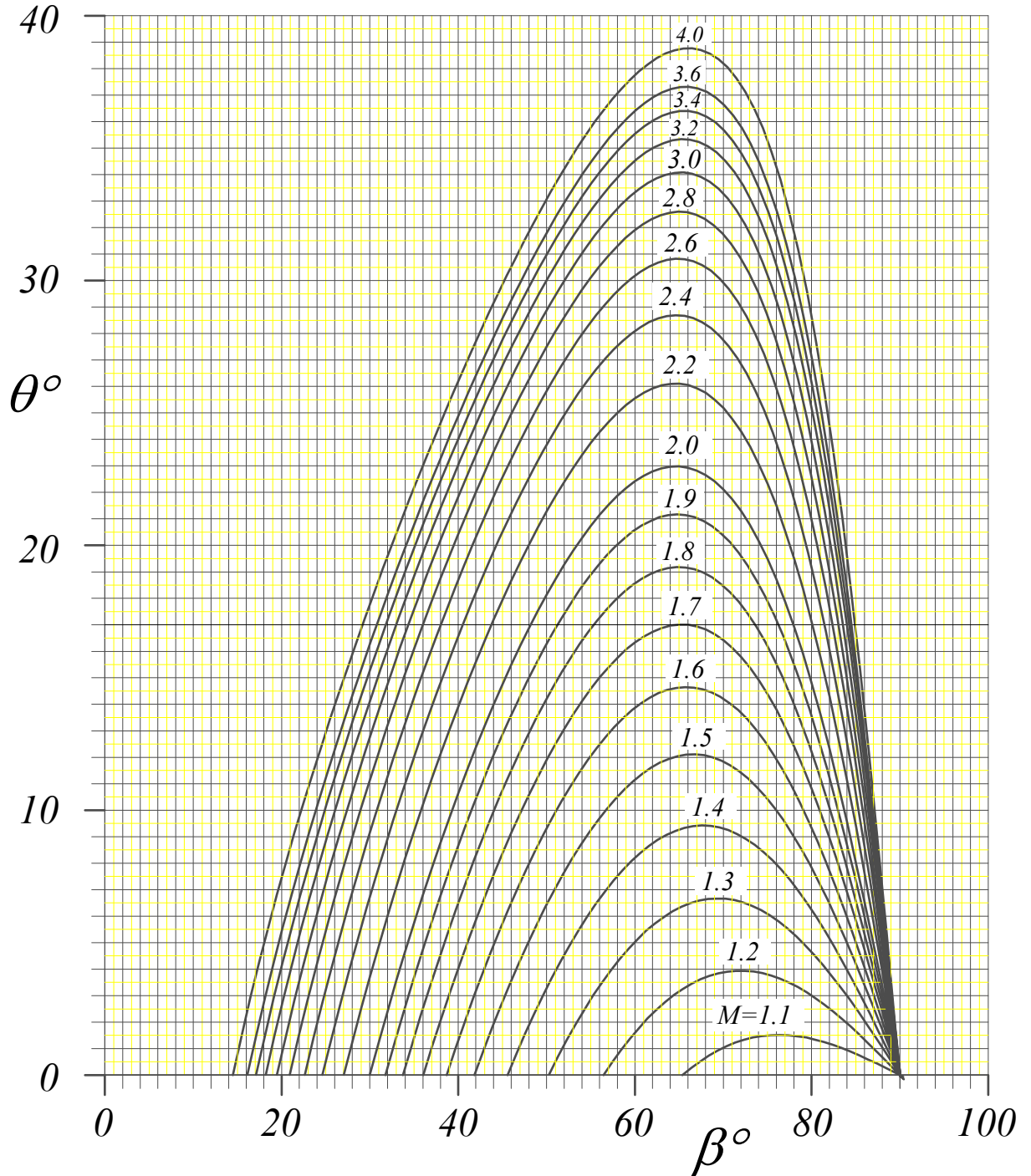
$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_{n1}^2}{(\gamma + 1) M_{n1}^2}$$

Bu son bağıntı tanjant fonksiyonunun açılımı yapılarak ve ayrıca şokun önündeki akımın Mach sayısı ile dik bileşeni arasındaki (4.1-2e) bağıntısı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (4.1-2g)$$

şekline gelir.

(4.1-2g) denklemi β için non-linear olup ancak iteratif yolla çözülebilir. M_1 in çeşitli değerleri için farklı θ sapma açılarında yapılan [sayısal çözümler](#) genellikle bir tablo şeklinde veya bir [Eğik sok diyagramı](#) şeklinde grafiksel olarak düzenlenir.



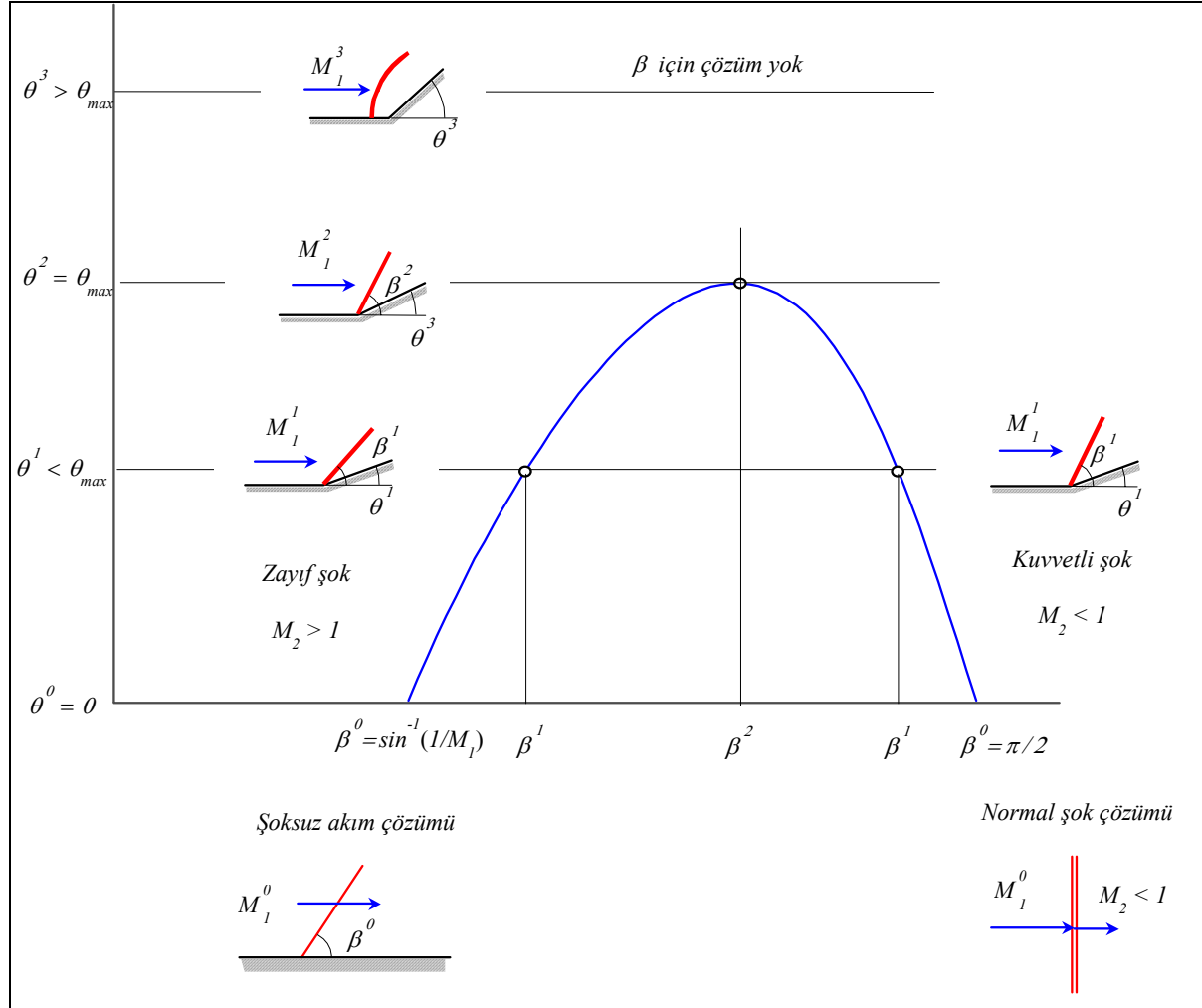
Herhangi bir M_1 Mach sayısında θ sapma açısının verilen herhangi bir değerine karşılık β için farklı iki çözüm mevcuttur. Akımda hiç sapma olmaması ($\theta = 0$) halindeki iki çözüm:

$$\text{Cot} \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta = \pi / 2} \quad \text{normal şok çözümü}$$

$$M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta = \sin^{-1}(1 / M_1)} \quad \text{şoksuz akım (Mach dalgası)}$$

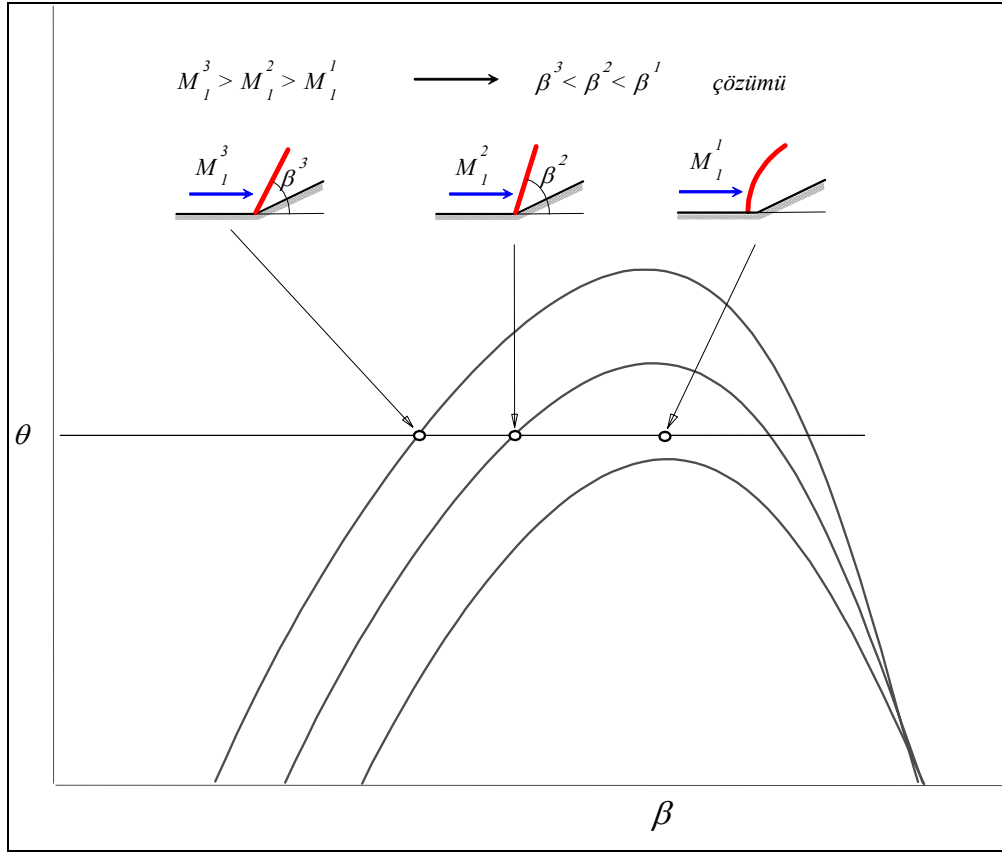
Gerçekten de normal şoku geçen akımda ve hiç şok bulunmayan süpersonik akım doğrultusunda sapma olmaz.

Verilen bir $M_1 = Sb$ Mach sayısı için θ sapma açısı arttıkça, oluşan eğik şokun açısı artmaktadır θ' 'nin maksimum bir θ_{max} değeri mevcut olup bunun üzerindeki sapma açılarında eğik şok çözümü bulunmamaktadır. Bu halde bağlı eğik şok yerine içbükey köşeden daha önde bükülmüş bir ayırık şok meydana gelmektedir.



$\theta < \theta_{max}$ halinde β için bulunan iki çözümden β nin büyük olduğu çözüm "**kuvvetli şok**", küçük olduğu çözüm ise "**zayıf şok**" olarak adlandırılır. Pratikte görülen şoklar çoğu zaman zayıf eğik şoklardır. Eğik şokun zayıf veya kuvvetli olmasında belirleyici unsur gerideki akımın basıncıyla ilgili şartlardır. Nitekim gerideki basınç bağımsız bir mekanizmayla arttırılırsa kuvvetli bir eğik şok oluşabilir. Zayıf eğik şokun gerisindeki akım süpersonik kalırken kuvvetli eğik şok gerisindeki akım sesaltı hızlara inmektedir.

Sabit bir sapma açısında ($\theta = Sb$) süpersonik akımın M_1 Mach sayısı azaldıkça β şok açısı artar. Küçük M_1 Mach sayılarında θ_{max} in da küçük olduğu dikkati çekicidir. Buna göre içbükey bir köşeye gelen akımın hızı sesaltı hızlardan itibaren arttırıldığında önce köşenin ön tarafında bir ayırık şok oluşur. Akım hızı duvar açısının θ_{max} kabul edilebileceği bir değere eriştiğinde bu şok köşeye bağlı bir eğik şok şekline dönüşür, hız daha arttırıldığında ise eğik şokun açısı küçülür.



Örnek Problem:

a) Basıncın 1 atm ve sıcaklığın 288 °K olduğu $M_1 = 3$ Mach sayısındaki süpersonik akım bir iç-bükey köşede oluşan eğik şoku geçerken 20° lik bir sapma göstermektedir. Buna göre, eğik şokun açısını ve şoktan sonraki akımın özelliklerini hesaplayınız.

b) Sapma açısının 30° olması halinde şok açısını ve şok gerisindeki akım özelliklerini hesaplayınız.

c) Sapma açısının 20° olduğu ilk durumda Mach sayısının $M_1 = 5$ olması halinde şok açısını ve şok gerisindeki akım özelliklerini hesaplayınız.

d) Sonuçları karşılaştırarak yorumlayınız

Çözüm:

a) $M_1 = 3$ için eğik şok denklemi 'den $\beta = 37.8^\circ$
 $\theta = 20^\circ$

Böylece $M_{n1} = M_1 \sin \beta = 3 \times \sin(37.8^\circ) \rightarrow M_{n1} = 1.837$

Normal şok bağıntılarından

$$\begin{aligned} M_{n2} &= 0.608 \\ \rho_2 / \rho_1 &= 3.771 \\ T_2 / T_1 &= 1.560 \end{aligned}$$

Eğik şok geometrisinden $M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{0.608}{\sin(37.8 - 20)} \rightarrow M_2 = 1.994$

Şok önündeki akım özellikleri kullanılarak

$$p_2 = \frac{p_2}{p_1} p_1 = 3.771 \times 1 \rightarrow \boxed{p_2 = 3.771 \text{ atm}}$$

$$T_2 = \frac{T_2}{T_1} T_1 = 1.560 \times 288 \rightarrow \boxed{T_2 = 449.3^\circ \text{ K}}$$

$$p_{o2} = p_2 (1 + 0.2 M_2^2)^{3.5} = 3.771 \times (1 + 0.2 \times 1.994^2)^{3.5} \rightarrow \boxed{p_{o2} = 29.232 \text{ atm}}$$

$$T_{o2} = T_2 (1 + 0.2 M_2^2) = 449.3 \times (1 + 0.2 \times 1.994^2) \rightarrow \boxed{T_{o2} = 806.6^\circ \text{ K}}$$

elde edilir.

b) $\boxed{M_1 = 3}$ için $\boxed{\theta = 30^\circ}$ için [eğik şok denklemi](#) 'den $\boxed{\beta = 52^\circ}$

Eğik şok geometrisinden ve dik şok bağıntılarından

$$\boxed{M_{n1} = 2.364} \rightarrow \boxed{M_{n2} = 0.527} \rightarrow \boxed{M_2 = 1.406}$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 6.356} \rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = 2.007} \rightarrow p_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1 = 6.351 \times 1 \rightarrow \boxed{p_2 = 6.356 \text{ atm}}$$

c) $\boxed{M_1 = 5}$ için $\boxed{\theta = 20^\circ}$ için [eğik şok denklemi](#) 'den $\boxed{\beta = 29.8^\circ}$

Eğik şok geometrisinden ve dik şok bağıntılarından

$$\boxed{M_{n1} = 2.485} \rightarrow \boxed{M_{n2} = 0.514} \rightarrow \boxed{M_2 = 3.022}$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = 7.037} \rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = 2.123} \rightarrow p_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1 = 7.037 \times 1 \rightarrow \boxed{p_2 = 7.037 \text{ atm}}$$

d) Bu üç uygulamadan elde edilen sonuçlar özetlenirse

M_1	θ	β	M_{n1}	M_{n2}	M_2	p_2
3	20°	37.8°	1.837	0.608	1.994	3.771
3	30°	52.0°	2.364	0.527	1.406	6.351
5	20°	29.8°	2.485	0.514	3.022	7.037

Görüldüğü gibi:

Gerek θ 'nin gerekse M_1 'in artırılmasıyla **şok gerisindeki akımın basıncı artmaktadır**. Bu da **şokun daha kuvvetli** olduğuna işaret etmektedir.

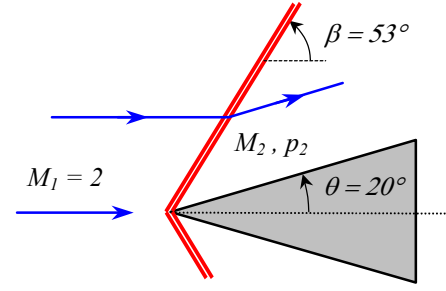
Bir genelleme yaparak, hangi nedenle olursa olsun **şoka dik Mach sayısının artması halinde şokun daha kuvvetli olacağını** belirtmek mümkündür.

Genel bir kural olarak

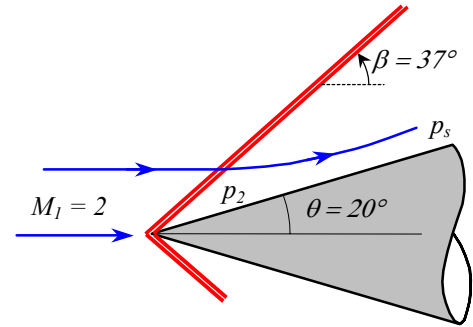
$M_1 = S_b$ iken	θ arttıkça	şok daha kuvvetli olmakta	ve	β artmaktadır
$\theta = S_b$ iken	M_1 arttıkça	şok daha kuvvetli olmakta	ve	β azalmaktadır

4.3. Kama-burun ve Koni Etrafında Akım

Eğik şoklar için ortaya konulan yöntem bir iç-bükey köşe etrafındaki akımda oluşan, köşeye bağlı şokun gerisindeki akım özelliklerinin belirlenmesini sağladığı gibi, *kama-biçimli burun* etrafındaki akımın incelenmesi için gerekli çözümleri de vermektedir. Kama ucuna bağlı eğik şoktan sonraki akım çizgileri doğrusal olup yüzeye paraleldir. Şoktan sonra yüzey basıncı sabit olup p_2 değerine eşittir.



Süpersonik akımda yer alan sivri uçlu bir koni etrafında da şekilde görüldüğü gibi koninin ucuna bağlı, doğrusal-eğik şok oluşur. Bu konik şokun hemen arkasındaki akım özellikleri de eğik şok bağıntılarından elde edilir.



Ancak, koni etrafındaki akım üç-boyutlu olduğundan şokla koni yüzeyi arasındaki akım, kama-burun veya iç-bükey köşe gerisindeki akımın aksine üniform değildir.

Akım çizgileri, şekilde görüldüğü gibi eğrisel olup, koni yüzeyi üzerindeki p_s basıncı şokun hemen gerisindeki p_2 basıncının aynı değildir. Ayrıca konik yüzey etrafında, akımın üç-boyutluluğunun yarattığı "*rahatlatıcı etki*" nedeniyle aynı tepe açısına sahip bir kama burundakinden daha zayıf bir şok oluşur. Örneğin yarı tepe açısı 20° olan bir kama-burun üzerinde $M_1=2$ Mach sayısındaki akımda 53° açılı bir eğik şok oluşurken, aynı tepe açısına sahip koni üzerinde 37° açılı bir konik şok oluşur. Bunun sonucu olarak konik şokun hemen gerisindeki akım büyüklükleri (p_2, ρ_2, T_2) kama-burundakine kıyasla daha küçüktür.

Örnek Problem:

Mach sayısı bilinmeyen bir akımda yer alan, 10° yarı-tepe-açısına sahip kama-biçimli bir cisim üzerinde oluşan eğik şokun açısı bir Schlieren sistemi yardımıyla 44° olarak ölçülmüştür. Akımın Mach sayısını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{cases} \beta = 44^\circ \\ \theta = 10^\circ \end{cases}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$M_1 = 1.8^\circ$$

Örnek Problem:

Yarı-tepe-açısı 15° olan kama-biçimli bir cisim Mach sayısı 3 olan süpersonik akımda sıfır hücum açısıyla yer almaktadır. Cismin yüzeyi üzerindeki basınç katsayısını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{cases} M_1 = 3 \\ \theta = 15^\circ \end{cases}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta = 32.2^\circ$$

→

$$M_{n1} = 1.6$$

Normal şok bağıntılarından

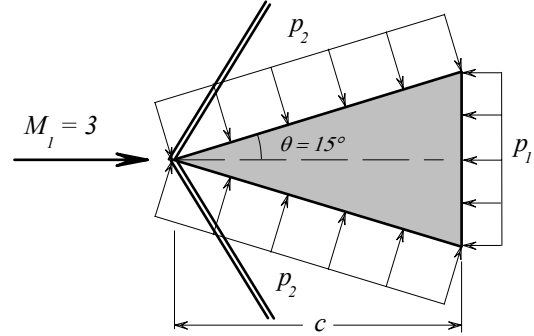
$$p_2/p_1 = 2.82$$

Basınç katsayısı
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

$M_\infty = M_1$
 $p_\infty = p_1$ olup
$$C_p = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) = \frac{2}{1.4 \times 3^2} (2.82 - 1) \rightarrow C_p = 0.289$$

Örnek Problem:

Yarı-tepe-açısı 15° olan kama-biçimli bir cismin gerisi şekilde görüldüğü gibi dikey bir biçimde kesilmiştir. Cismin arka yüzündeki basıncı serbest akımın basıncına eşit kabul ederek cisme etkileyen sürüklenme katsayısını hesaplayınız.



Cözüm:

$M_1 = 3$
 $\theta = 15^\circ$ için [eğik şok denklemi](#) 'den $\beta = 32.2^\circ \rightarrow M_{n1} = 1.6$

Normal şok bağıntılarından $p_2/p_1 = 2.82$

Birim ağırlık başına sürüklenme kuvveti $D = 2(p_2 - p_1) \cdot c \cdot \tan \theta$

$p_\infty = p_1$ olup sürüklenme katsayısı
$$C_D = \frac{2D}{\rho_\infty V_\infty^2 c \cdot l} = \frac{2 \cdot 2(p_2 - p_1) \cdot c \cdot \tan \theta}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c}$$

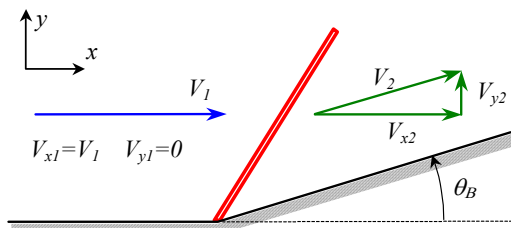
$$C_D = \frac{4}{\gamma M_\infty^2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \cdot \tan \theta = \frac{4}{1.4 \times 3^2} \times (2.82 - 1) \times \tan 15^\circ \rightarrow C_D = 0.155$$

elde edilir.

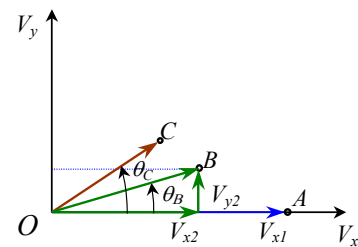
4.4. Şok Poleri:

Şok dalgalarını içeren süpersonik akımların analizinde grafik yöntemler de etkin bir şekilde kullanılabilir.

Eğik şokların grafik gösterimi "şok poleri" olarak adlandırılır. Şok polerinde *fiziksel düzlemdeki koordinat sistemi* yerine *hodograf düzlemi* adı verilen bir başka düzlemde *hız bileşenleri* cinsinden bir eksen takımı kullanılır.



Eğik şok düzlemi

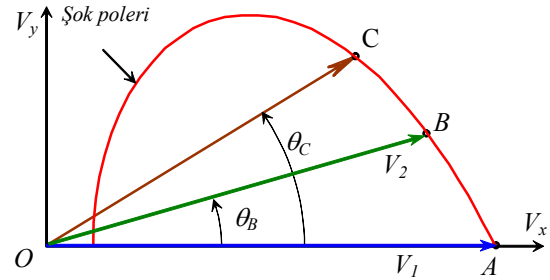


Hodograf düzlemi

Örneğin, şekildeki akımda şoktan önceki ve sonraki hız bileşenleri sırasıyla ($V_{x1}=V_1$, $V_{y1}=0$) ve (V_{x2} , V_{y2}) olup, hodograf düzleminde OA şokun önündeki hız vektörünü, OB ise şokun gerisindeki hız vektörünü belirtmektedir. Bu düzlemin A noktası şokun önündeki bütün akım alanını, B noktası ise şokun gerisindeki bütün akım alanını temsil etmektedir.

İç-köşe açısının θ_B den daha büyük bir θ_C değerine artırılması halinde V_2 hız vektörünün doğrultusu θ_C olarak değişeceği gibi, şokun şiddeti daha büyük olacağından hızın şiddeti de azalacaktır. Hız vektörünün bu yeni halini şekilde OC vektörü belirtmektedir.

İç-köşenin θ açısı bu şekilde arttırılmak suretiyle A , B ve C noktaları gibi başka noktalar da elde etmek mümkündür. Olası bütün $\theta < \theta_{max}$ değerleri için elde edilen noktalar hodograf düzleminde belirtilirse "şok poleri" adı verilen grafik elde edilir.



Hatırlatma:

Karakteristik Mach sayısı

$$M^* = V / a^*$$

Şoku geçen akım adyabatik olduğundan

$$a_1^* = a_2^*$$

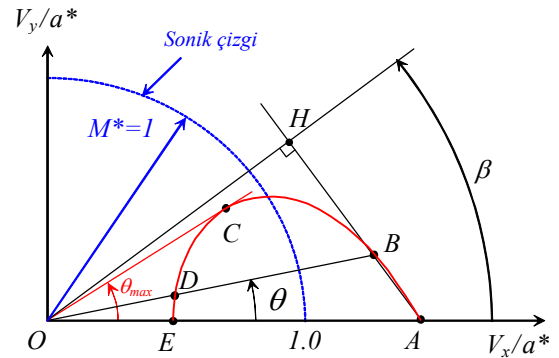
Buna göre eğik şokun önündeki ve arkasındaki hızları aynı karakteristik ses hızıyla oranlayarak boyutsuz bir şok poleri elde etmek mümkündür.

Şok polerinde M veya V yerine M^* büyüklüğünün tercih edilmesinin önemli bir gerekçesi, gerçek Mach sayılarının çok geniş bir aralıkta ($0 \rightarrow \infty$) değerler alabilmesine karşılık kritik Mach sayılarının sınırlı değerler (M^* in en büyük değeri 2.45) alması ile izah edilebilir.

Şekilde verilmiş bir M_1^* karakteristik Mach sayısı için olası bütün M_2^* karakteristik Mach sayılarının yer aldığı boyutsuz bir şok poleri görülmektedir.

$M^*=1$ yarıçaplı daire sonik çizgiyi temsil etmektedir. Bu dairenin içindeki bütün hızlar sesaltı dışındakiler ise sesüstüdür.

Şok polerinin önemli bazı noktaları şunlardır:

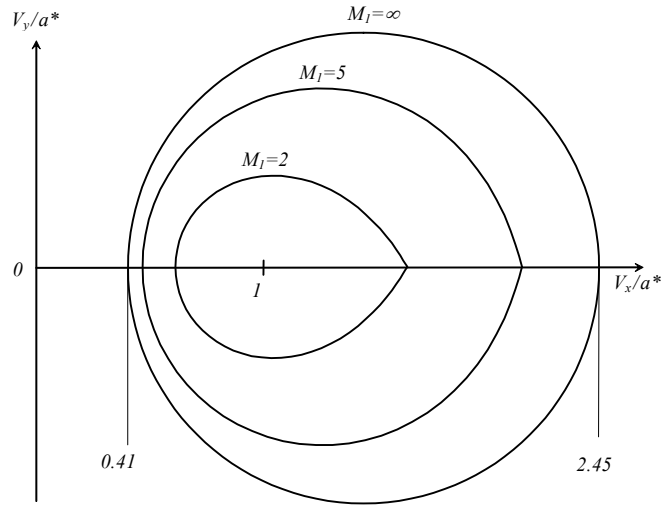


- Herhangi bir θ sapma açısı için şok poleri üzerinde iki nokta (B ve D) söz konusu olup, bunlardan sonik çizginin dışındaki (B) zayıf şoka, içindeki (D) ise kuvvetli şoka karşılık gelmektedir.
- Şok polerine teğet olarak çizilen OC doğrusunun tanımladığı COA açısı verilen bir M_1^* (dolayısıyla M_1 için) maksimum θ açısını belirtmektedir. $\theta > \theta_{max}$ için eğik şok çözümü bulunmamaktadır.
- E ve A noktaları akımda hiç bir sapmanın olmadığı durumları temsil etmektedir. A noktası Mach çizgisine karşılık gelirken E noktası normak şok halini belirtmektedir.
- A ve B noktalarını birleştiren doğruya O noktasından dikey olarak çizilen OH doğrusunun altındaki HOA açısı, B noktasıyla temsil edilen eğik şokun β açısını tanımlamaktadır. Dikkat

edilirse, OH uzunluğu da şokun önündeki ve arkasındaki akımların şoka paralel hız bileşenlerinin boyutsuz büyüklüğüne eşittir.

- e) Farklı Mach sayıları için bulunan şok pelleri şekilde görüldüğü gibi aynı grafik üzerinde yerleştirilerek bir şok pelleri diyagramı oluşturulabilir.

Bu diyagramda M_1 haline ait şok pelleri $M_1^* = 2.45$ yarıçaplı bir dairedir.



Şok pelerinin denklemi eğik şok bağıntılarından

$$\left(\frac{V_y}{a^*} \right) = \frac{(M_1^* - V_x / a^*)^2 \cdot [(V_x / a^*)M_1^* - 1]}{(M_1^*)^2 2 / (\gamma + 1) - (V_x / a^*)M_1^* + 1} \quad (4.4-1)$$

şeklinde elde edilebilir.

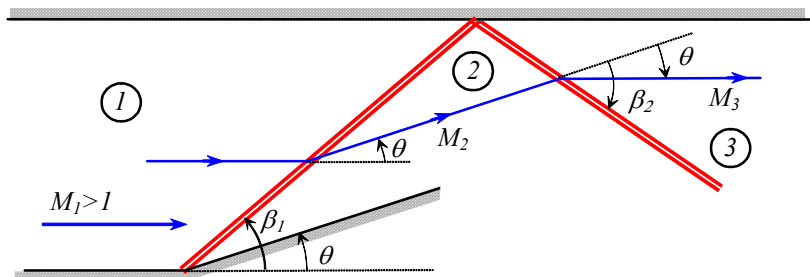
4.5. Eğik Şok Dalgasının Katı Bir Cidardan Yansıması:

Eğik bir şok bir duvarla karşılaştığında bu duvardan *doğrultusu ve şiddeti daha ilerideki sınır şartlarına bağlı* olan yeni bir şok olarak yansır.

Şekilde görülen M_1 Mach sayısındaki süpersonik akım, θ açılı iç-köşede β_1 açısıyla oluşan şoku geçerken duvarın θ açısı kadar sapma göstererek M_2 süpersonik hıza inecektir.

Akım (3) bölgesinde üst duvara paralel olacağı için ikinci bir kez θ açısı kadar ama ters yönde bir sapma göstermek zorundadır. Böyle bir sapma da ancak bir şoku geçerken oluşabilir. Yansımış şokun açısı ve şiddeti (2) bölgesindeki M_2 Mach sayısı ve θ sapma açısı ile belirlenir.

Bu olayda birinci şoku ve yansımış şoku geçerken akımdaki sapmalar aynı miktarda olup, (2) bölgesindeki Mach sayısı (1) bölgesindeki Mach sayısından daha küçük olduğundan yansımış şokun β_2 açısı ilk şokun β_1 açısından daha büyüktür. Ayrıca yansıyan şokun üst duvarla yaptığı açı, ilk şokun üst duvarla yaptığı açıdan farklıdır.



Örnek Problem:

Statik basıncın 1 atm ve sıcaklığın 300 °K olduğu $M_1=2.8$ Mach sayısındaki bir süpersonik akımda $\theta=16^\circ$ açılı iç-köşeden oluşan şok bir düz duvardan yansımaktadır. Yansıyan şokun üst duvarla yaptığı açığı ve yansıyan şoktan sonraki akım özelliklerini hesaplayınız.

Cözüm:

$$\begin{array}{l} M_1 = 2.8 \\ \theta = 16^\circ \end{array}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta_1 = 34.9^\circ$$

Böylece

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta_1 = 2.8 \times \sin(34.9^\circ)$$

→

$$M_{n1} = 1.603$$

Normal şok bağıntılarından

$$\begin{array}{l} M_{n2} = 0.668 \\ p_2 / p_1 = 2.831 \\ T_2 / T_1 = 1.390 \end{array}$$

Eğik şok geometrisinden

$$M_2 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta_1 - \theta)} = \frac{0.608}{\sin(34.9 - 16)}$$

→

$$M_2 = 2.059$$

$$\begin{array}{l} M_2 = 2.059 \\ \theta = 16^\circ \end{array}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta_2 = 45.3^\circ$$

Böylece yansıma şoku için

$$M_{n1} = M_2 \sin \beta_2 = 2.059 \times \sin(45.3^\circ)$$

→

$$M_{n1} = 1.664$$

Normal şok bağıntılarından

$$\begin{array}{l} M_{n2} = 0.714 \\ p_3 / p_2 = 2.334 \\ T_3 / T_2 = 1.296 \end{array}$$

Eğik şok geometrisinden

$$M_3 = \frac{M_{n2}}{\sin(\beta_2 - \theta)} = \frac{0.714}{\sin(45.3 - 16)}$$

→

$$M_3 = 1.458$$

Böylece yansıyan şokun üst duvarla yaptığı açı

$$\beta_2 - \theta = 29.323^\circ$$

Yansıyan şokun gerisinde

$$p_3 = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1 = 2.334 \times 2.831 \times 1$$

$$p_3 = 6.608 \text{ atm}$$

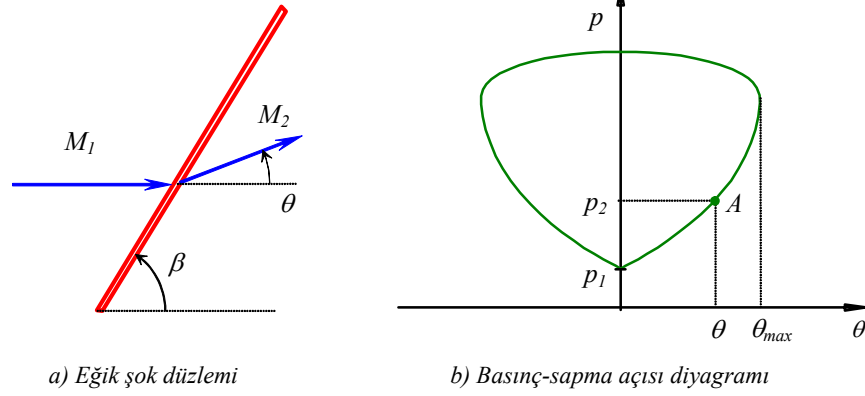
$$T_3 = \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot T_1 = 1.296 \times 1.390 \times 300$$

$$T_3 = 540.432^\circ \text{K}$$

4.6 Basınç - Sapma Açısı Diyagramı:

Şokların birbiriyle, katı cidarlarla veya serbest cidarlarla girişimde bulunduğu karmaşık problemleri analiz edebilmek için [basınç-sapma açısı](#) diyagramları yararlı olur.

Örneğin, şekildeki sola doğru eğik şokun önündeki ve arkasındaki basınçlar sırasıyla p_1 ve p_2 şoku geçen akımdaki sapma da θ olsun. Akımın şok gerisindeki θ sapmasına karşılık p_2 basıncı şekildeki gibi bir p - θ diyagramında yerleştirilirse A noktası elde edilir.

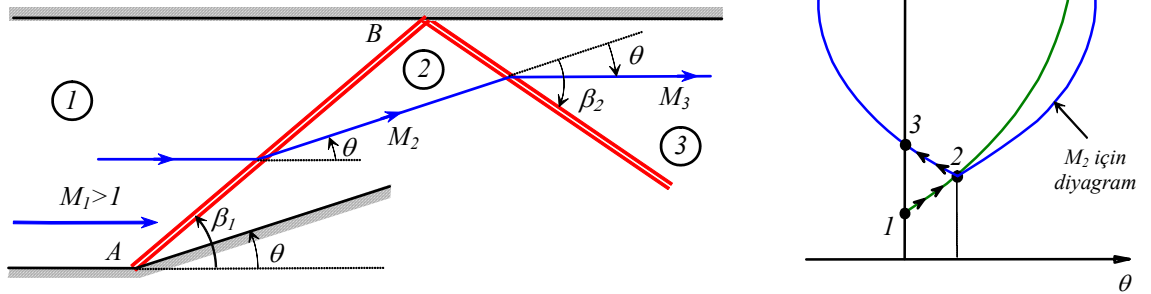


β şok açısı değiştirilerek θ sapma açısıyla p_2 basıncı, yani A noktasının yeri değiştirilebilir. Böylece şekildeki gibi bir diyagram elde edilir.

p - θ diyagramının en alt noktası akımda hiç sapmanın olmadığı ve basıncın p_1 değerini koruduğu şoksuz hale karşılık gelmektedir. Diyagramın sol yarısı, aynı akım içerisinde sağa doğru bir şok dalgası bulunması haline aittir.

Önceki bölümdeki şok yansıması problemi için şekildeki gibi bir p - θ diyagramı çizilebilir. Burada 1 noktası A köşesinde oluşan şoktan önceki (1) bölgesini temsil etmektedir. Şokun arkasındaki şartlar p - θ diyagramı üzerinde ilerleyerek bulunan 2 noktası ile belirtilmektedir. Yansımış şoktan sonraki şartları belirleyebilmek için bu şokun önündeki M_2 Mach sayısına ait yeni bir p - θ diyagramı çizmek gerekir.

Bu yeni diyagram üzerinde 2 noktasından itibaren θ açısı kadar geriye giderek bulunan 3 noktası yansımış şokun gerisindeki şartları belirtmektedir.

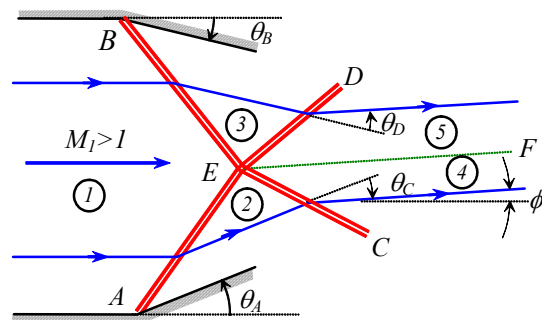


4.7. Farklı Aileden Şok Dalgalarının Kesişmesi:

Bazı hallerde farklı aileden şok dalgaları kesişerek yeni şok dalgaları oluştururlar.

Örneğin şekilde θ_A açılı iç-köşeden oluşan sola-doğru şok dalgası ile θ_B açılı iç-köşeden oluşan sağa-doğru şok dalgası E noktasında kesişerek sola-doğru D şok dalgasıyla sağa-doğru C şok dalgasını oluşturmuştur.

Şayet $\theta_A > \theta_B$ ise A şoku B şokundan daha dik olacak ve daha fazla entropi artışı yaratacaktır.



Benzeri şekilde C ve D şoklarının üzerinden geçen akımların antropilerindeki artışlar da birbirinden farklı olacağından bu şokların gerisindeki (4) ve (5) bölgelerindeki antropiler birbirinden farklı olacaktır. Bu bölgeleri birbirinden ayıran EF çizgisi bir "*kayma çizgisi*" olarak adlandırılır. (4) ve (5) bölgeleri için şu özelliklerden sözedilebilir:

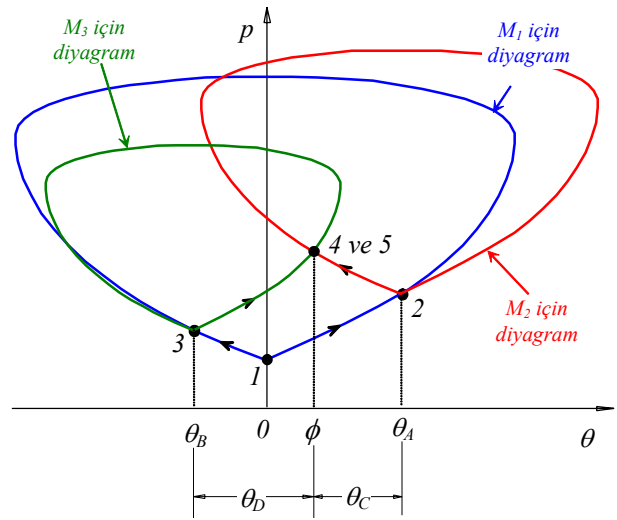
- İki bölgedeki basınçlar aynı olmalıdır. Aksi halde EF çizgisi bükülür.
- İki bölgedeki akım hızları birbirinden farklı şiddette olmalarına rağmen doğrultuları aynı olmalıdır.

(4) ve (5) bölgelerindeki akım özellikleri, şok öncesi akım özellikleri ve köşe açıları bu iki şartla birlikte kullanılarak hesaplanabilir. Ancak analitik bir çözüm kolay gözükmemektedir.

Bu problem basınç-sapma açısı diyagramları yardımıyla kolaylıkla çözülebilir.

Şekildeki 1 noktası serbest üniform süpersonik akım şartlarını belirtmektedir. Bu akıma ait M_1 Mach sayısı için çizilen p - θ diyagramı üzerinde:

- θ_A kadar sağa doğru gidilerek A-sola doğru şokunun gerisindeki akım şartlarını belirten 2 noktası, ve aynı diyagram üzerinde
- θ_B kadar sola doğru gidilerek B-sağa doğru şokunun gerisindeki akım şartlarını belirten 3 noktası bulunabilir.



2 noktasından itibaren M_2 Mach sayısı için ve 3 noktasından itibaren M_3 Mach sayısı için p - θ diyagramları çizilir. 4 ve 5 bölgelerinde basınçlar aynı olacağı için bu son iki diyagramın kesim noktası aranan çözümü verecektir.

4 ve 5 bölgelerindeki akım doğrultusunun yatayla yaptığı açı ϕ ile gösterilirse C ve D şoklarını geçen akımlardaki sapma açıları sırasıyla

$$\theta_C = \theta_A - \phi, \quad \theta_D = \phi + \theta_B$$

şeklinde hesaplanabilir.

Aynı diyagramdan yararlanarak problemin çözümü için iteratif bir yöntem uygulamak mümkündür. Buna göre

- Önce M_1 Mach sayısındaki akım için θ_A ve θ_B köşe açıları oluşan şokların β_A ve β_B açıları eğik şok denkleminde iteratif olarak çözülür. (2) ve (3) bölgelerindeki M_2 ve M_3 Mach sayıları ile diğer akım büyüklükleri ($\rho_2, \rho_3; T_2, T_3; \dots$) hesaplanır.
- ϕ açısı için bir başlangıç değeri seçilir. Örneğin $\phi = (\theta_A + \theta_B) / 2$
- ϕ nin bu değeri için yukarıdaki bağıntılardan θ_C ve θ_D açıları hesaplanır. Bu açı değerleri M_2 ve M_3 Mach sayıları ile birlikte kullanılarak kesişme şoklarının β_C ve β_D açıları ve bu şokların arkasında bulunan (4) ve (5) bölgelerindeki akım özellikleri ($M_2, M_3; \rho_2, \rho_3; T_2, T_3; \dots$) hesaplanır.

- p_2 ve p_3 basınçları yeterince eşit değilse iterasyon için yeni ϕ değeri seçilir. Bunun için uygun bir iterasyon formülü

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \phi^k \cdot \frac{p_4 - p_5}{(p_4 + p_5)/2}$$

şeklinde alınabilir.

Örnek Problem:

1 atm basınç ve 3 Mach sayısındaki süpersonik akımda 10° ve 5° açılı karşılıklı iki iç-köşeden oluşan şok dalgaları kesişmektedirler. Kesişme şoklarının gerisindeki akım özelliklerini hesaplayınız.

Cözüm:

$$\begin{matrix} M_1 = 3 \\ \theta_A = 10^\circ \end{matrix}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta_A = 27.38^\circ$$

Eğik şok şok bağıntılarından

$$M_2 = 2.505 \quad p_2 = 2.055 \text{ atm}$$

$$\begin{matrix} M_1 = 3 \\ \theta_B = 5^\circ \end{matrix}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta_B = 23.13^\circ$$

Eğik şok şok bağıntılarından

$$M_3 = 2.750 \quad p_3 = 1.454 \text{ atm}$$

Iterasyon başlangıç değeri

$$\phi^0 = (10 + 5) / 2 = 7.5^\circ$$

alınırsa, θ_C ve θ_D için ilk tahminler sırasıyla

$$\begin{matrix} \theta_C = 10 - 7.5 = 2.5^\circ \\ \theta_D = 7.5 + 5 = 12.5^\circ \end{matrix} \text{ olur.}$$

$$\begin{matrix} M_2 = 2.505 \\ \theta_C = 2.5^\circ \end{matrix}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta_4 = 25.38^\circ$$

Eğik şok şok bağıntılarından

$$M_4 = 2.399 \quad p_4 = 2.421 \text{ atm}$$

$$\begin{matrix} M_3 = 2.750 \\ \theta_D = 12.5^\circ \end{matrix}$$

için [eğik şok denklemi](#) 'den

$$\beta_5 = 31.76^\circ$$

Eğik şok şok bağıntılarından

$$M_5 = 2.184 \quad p_5 = 3.311 \text{ atm}$$

İterasyonla

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \phi^k \cdot \frac{p_4 - p_5}{(p_4 + p_5)/2} = 7.5 + 7.5 \times \frac{2.421 - 3.311}{(2.421 + 3.311)/2} = 5.17$$

Bu problemde iterasyonun yakınsamasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir

$$\phi = 4.98^\circ$$

ve

$$\begin{matrix} \theta_C = 5.05^\circ \\ \beta_C = 27.39^\circ \\ M_4 = 2.295 \\ p_4 = 2.840 \text{ atm} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \theta_D = 9.98^\circ \\ \beta_D = 29.36^\circ \\ M_5 = 2.299 \\ p_5 = 2.840 \text{ atm} \end{matrix}$$

4.8- Aynı Aileden Şok Dalgalarının Kesişmesi:

Şekilde M_1 Mach sayısındaki süpersonik akımda B iç-köşesinde β açılı bir eğik şok meydana gelmiştir.

Şokun önündeki (1) bölgesinde akımın hızı V_1 , ses hızı a_1 ve şoka dik hız bileşeni u_1 olmak üzere akımın Mach açısı için ve oluşan şokun açısı için sırasıyla

$$\sin \beta = \frac{u_1}{V_1}, \quad \sin \mu_1 = \frac{a_1}{V_1}$$

yazılabilir. Şokun oluşması için şoka dik hız bileşeninin süpersonik olması gerektiği bilindiğine göre $u_1 > a_1$ olup, buna göre $\beta > \mu_1$ dir. Yani duvarın A gibi bir noktasında oluşan Mach dalgası şok dalgasıyla kesişecektir.

Şokun gerisindeki akım hızı V_2 , bunun şoka dik bileşeni u_2 ve ses hızı da a_2 olmak üzere (2) bölgesindeki akımın Mach açısı ve şok açısı için sırasıyla

$$\sin (\beta - \theta) = \frac{u_2}{V_2}, \quad \sin \mu_2 = \frac{a_2}{V_2}$$

yazılabilir. Şoku geçen akımın şoka dik hız bileşeni sesaltı olacağına göre $u_2 < a_2$ olup, buna göre de $\beta - \theta < \mu_2$ dir. Yani duvarın C gibi bir noktasında oluşan Mach dalgası da şok dalgasıyla kesişecektir.

Şekildeki süpersonik akımda ise A ve B köşelerinden aynı aileden (sola doğru) iki şok oluşmaktadır.

B köşesinden oluşan şokun açısı (2) bölgesindeki Mach açısından, bu Mach açısı da A köşesinden oluşan şokun açısından daha büyük olacağından B şoku A şokunu C gibi noktada kesecektir.

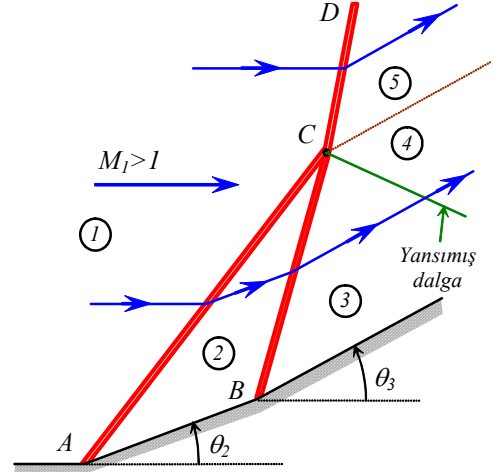
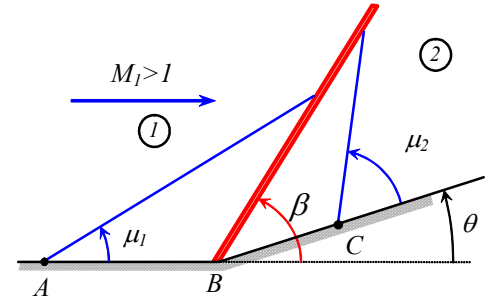
C deki kesişmeden sonra şoklar bu noktanın yukarısında bir tek şok olarak devam edecektir. Bu akımda A ve B şoklarını geçen bir akım çizgisini ele alalım. (3) bölgesindeki basınç p_3 ve akım doğrultusu da θ_3 dir. Bu büyüklükleri (1) bölgesindeki akım şartlarıyla θ_2 ve θ_3 köşe açılarına karşılık oluşan iki şokun açıları belirlemektedir.

Aynı akımda duvarlardan daha uzakta (1) ve (5) bölgelerinden geçen bir başka akım çizgisini ele alalım. (5) bölgesinde basınç p_5 ve akım doğrultusu da θ_5 olup, bu şartlar kesişme sonucu ortaya çıkan CD şoku tarafından belirlenmektedir.

Bu iki akım çizgisi boyunca entropi artışları birbirinden farklı olacağından A ve B köşelerinden oluşan şokların kesişme noktası olan C noktasından itibaren (3) ve (5) bölgelerini ayıran bir kayma çizgisi olması gerekir. Ayrıca, şayet ortamda yukarıda belirtilenler dışında bir başka şok yoksa kayma çizgisinin iki yanındaki bölgeler için

$$p_5 = p_3, \quad \theta_5 = \theta_3$$

olması gerekir.



Ancak tecrübeler göstermektedir ki, aynı başlangıç şartlarında AC ve BC gibi ardarda iki şokun oluşturduğu basınç değişimi ve akım sapmasının bir tek CD şokuyla oluşumu genellikle mümkün olmaz. Nitekim gerçekte C noktasında CD şoku yanında bir de yansıyan zayıf bir dalga oluşur. Bu dalga, başlangıçtaki, yani (1) bölgesindeki akım şartlarıyla θ_2 ve θ_3 akım sapmalarının miktarlarına bağlı olarak bir zayıf şok olabileceği gibi genişleme dalgası da olabilir.

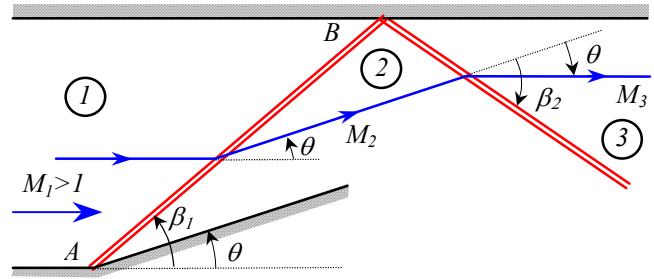
Böylece (3) bölgesinden bu dalga ile ayrılan yeni bir (4) bölgesi oluşur ki, kayma çizgisinin her iki yanındaki bölgeler için sağlanması gereken şartlar

$$p_5 = p_4, \quad \theta_5 = \theta_4$$

olmak üzere gerçekleşmiş olur. Akım alanının çözümü CD şoku ve CE dalgasının açıları değiştirilmek suretiyle bu şartlar sağlanacak şekilde iteratif olarak gerçekleştirilir.

4.9- Mach Yansıması:

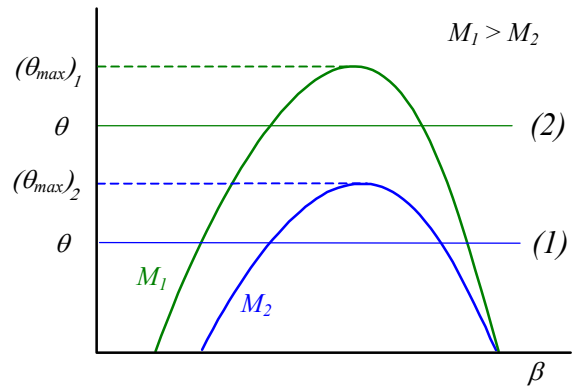
Bir şok dalgasının düz bir duvardan yansıması halinde, (3) bölgesinde akımın üst duvara paralel olabilmesi için akımın birinci şok (sola doğru) üzerinden geçerek θ kadar saptıktan sonra farklı aileden (sağa doğru) ikinci bir yansıma şoku üzerinden geçerek yine θ kadar ama zıt yönde yeni bir sapmaya maruz kalması gerekmektedir.



Ancak bunların gerçekleşebilmesi, yani doğrusal bir eğik şokla doğrusal bir yansıyan eğik şokun oluşabilmesi için $\theta < \theta_{max}$ olması gerekir.

Şekilde M_1 ve M_2 Mach sayıları için eğik şok diyagramları görülmektedir.

Birinci şokun A köşesine yapışık düzgün bir eğik şok olabilmesi için θ sapma açısının (2) doğrusuyla gösterildiği gibi M_1 Mach sayısı



için tanımlanan $(\theta_{max})_1$ değerinden küçük olması yeterlidir.

Oysa B köşesinden yansıma sonucu oluşan şokun düzgün bir eğik şok olabilmesi için θ sapma açısının (1) doğrusuyla gösterildiği gibi M_2 Mach sayısı için tanımlanan $(\theta_{max})_2$ değerlerinden küçük olması gereklidir.

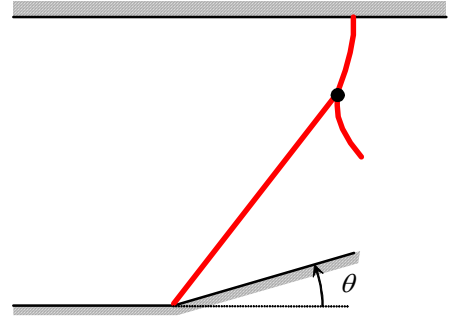
Pratikte θ sapma açısının (2) doğrusuyla belirtildiği gibi $(\theta_{max})_1$ den küçük ama $(\theta_{max})_2$ den büyük olduğu bir durum ortaya çıkabilir.

Bu durumda ilk şoku geçerken akımda meydana gelen sapma $(\theta_{max})_1$ den daha küçük olduğu için şok denklemi çözüm verecektir. Yani ilk şok doğrusal bir eğik şok olabilecektir.

Buna karşılık, M_2 Mach sayısı ile yansıma şokunu geçen akımın üst duvara paralel olabilmek için θ kadarlık bir sapma yapması gerekirken, sapma açısı $(\theta_{max})_2$ den daha küçük olduğu için yansıma şokunun doğrusal bir eğik şok olması mümkün değildir.

Nitekim üst duvarda eğik şok yerine, akımın üst duvara paralel kalmasına izin verecek biçimde bir normal şok oluşur. Bu normal şok duvarın uzağında eğrisel bir şoka dönüşerek birinci eğik şokla kesişir ve şekilde görüldüğü gibi diğer bir eğrisel şok meydana getirir.

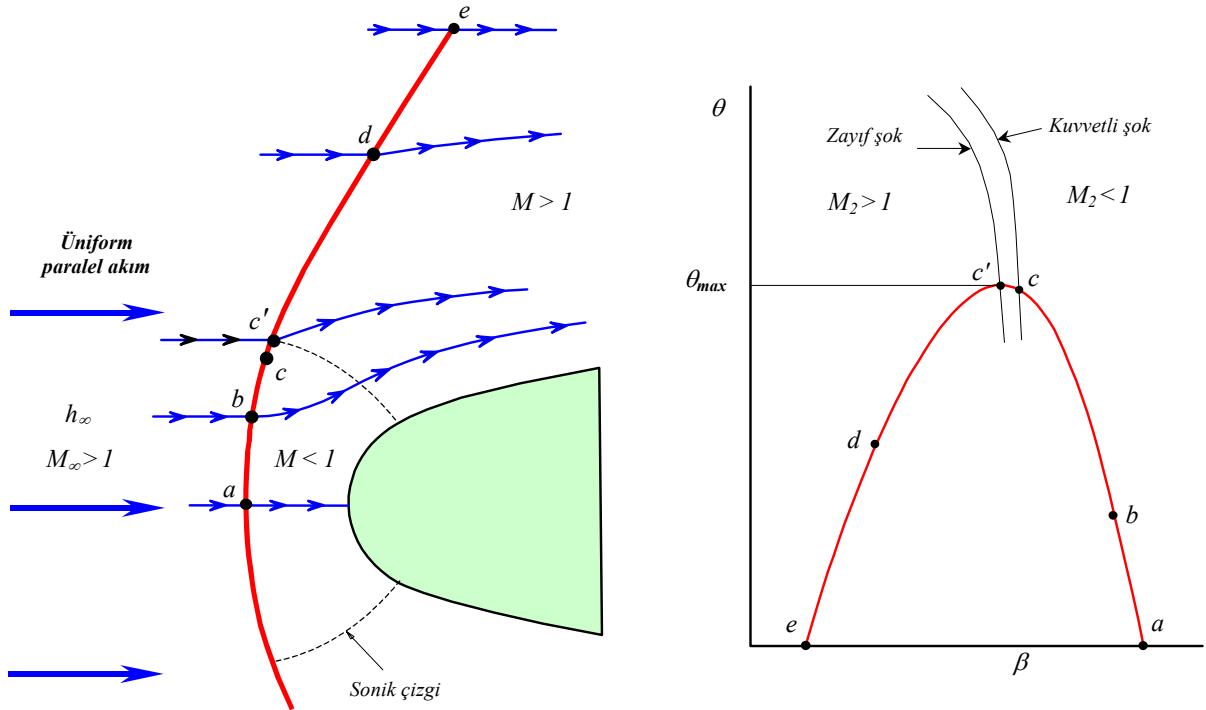
İzah edilen bu durum düzenli bir eğik şok yansımasından farklı olup literatürde "*Mach yansıması*" olarak adlandırılmaktadır.



Bu akımda normal şok dalgasının gerisinde geniş bir sesaltı akım bölgesi de bulunmakta olup, problemin çözülmesi ancak gelişmiş sayısal yöntemlerle gerçekleştirilebilmektedir.

4.10- Küt Burunlu Bir Cismin Önündeki Eğik Şok Dalgası:

Süpersonik akıma maruz küt burunlu bir cismin burnundan önde eğrilmiş bir şok meydana gelir.



Şekilde cismin eksen çizgisi hizasında yer alan **a** noktasında akım şok dalgasına dik olup şokun bu nokta civarındaki kısmı bir *dik şok* olarak nitelendirilebilir.

Eksen çizgisinden uzaklaştıkça şok bükülmekte, zayıflamakta ve cismin yeterince uzağındaki bir **e** noktasında muhtemelen bir *Mach dalgası*na dönüşmektedir.

a noktasıyla **e** noktası arasında şok dalgası M_1 Mach sayısında eğik şokların alabileceği bütün durumları içermektedir. Bu durumu β - θ şok diyagramından daha açık bir şekilde görmek mümkündür.

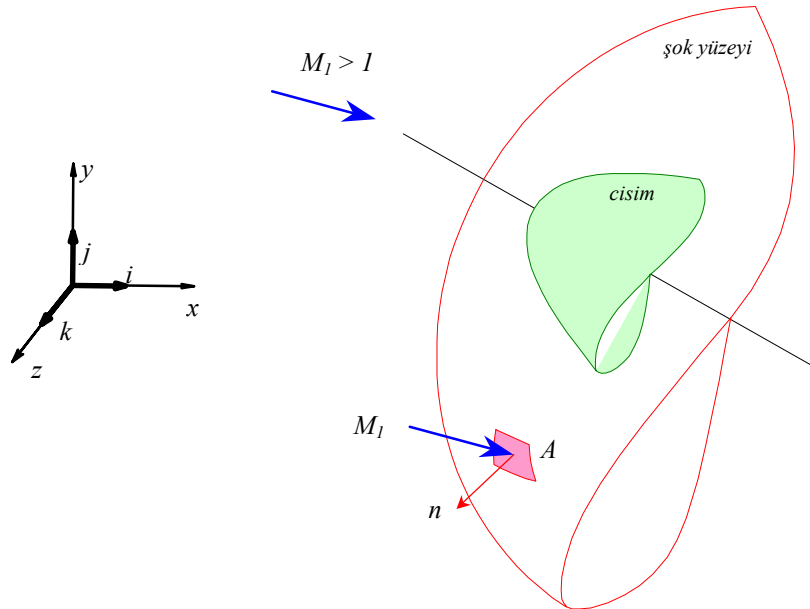
Şok diyagramında **a** noktası dik şok çözümünü belirtirken bunun biraz yukarısındaki **b** noktası eğik ama kuvvetli bir şok çözümünü karşılık gelmektedir. Daha yukarıdaki **c** noktası kuvvetli ve zayıf şok çözümleri arasındaki sınır noktası olup, bu noktadan şoku geçen akım M_1 Mach

sayısında görülebilecek en büyük sapmaya maruz kalmaktadır. Biraz daha yukarıdaki c' noktasından şoku geçen akım ses hızına inmektedir. a noktasından c' noktasına kadar şokun arkasındaki akım sesaltı hızlara inmektedir. c' noktasının üzerindeki bütün noktalardan şoku geçen akım süpersonik kalmaktadır. Böylece küt cismin burnu ile eğrilmiş şok arasında kalan bölgedeki akım kısmen sesaltı kısmen sesüstü karakterde karışık bir akım alanı olup, akım alanını iki bölgeye ayıran ve üzerinde $M_2 = 1$ olan hayali bir sonik çizgi bulunduğu düşünülebilir.

Ayrık şokun şekli, cisimden olan uzaklığı ve şokla cisim arasındaki akım alanının yapısı tamamiyle M_1 Mach sayısına ve cismin geometrisine bağlıdır. Bu akım alanının çözümü basit olmayıp, küt burunlu füzelerin ve atmosfere dönüş yapan uzay araçların etrafındaki yüksek hız sorunları nedeniyle 1950-60 lı yıllarda aerodinamikçilerin hayli ilgisini çekmiştir.

4.11- Üç-Boyutlu Şok Dalgaları:

Bu bölümde eğik şok dalgaları incelenirken hep iki-boyutlu akımlar gözönüne alınmıştır. Oysa, çoğu süpersonik akım problemi üç boyutlu olup, oluşan şoklar üç-boyutlu eğrilmiş şoklardır. Şekilde görülen, eksenel simetrik bir küt cisim etrafındaki şok dalgası bunun tipik bir örneğidir.



İki-boyutlu şok teorisi bu gibi üç-boyutlu şok dalgalarının hemen gerisindeki akım büyüklüklerinin hesaplanması için geçerlidir. Örneğin şekildeki şokun herhangi bir A noktası etrafında sonsuz küçük bir dS yüzey elemanını gözönüne alalım. Birim normal vektörü \vec{n} olsun. Serbest akımın Mach sayısının normal bileşeni

$$M_{n1} = (M_1 \vec{i}) \cdot \vec{n}$$

olup bu değer şoklar için daha önceden verilen bağıntılarda kullanılarak şokun hemen gerisindeki p_2 , ρ_2 , T_2 , h_2 ve M_{n2} hesaplanabilir. Ancak şokun daha gerisindeki akım alanının özellikleri hayli non-üniform olup, akım büyüklüklerinin hesabı sadece üç-boyutlu tekniklerle gerçekleştirilebilir.

4.12- Prandtl-Meyer Genişleme Dalgaları:

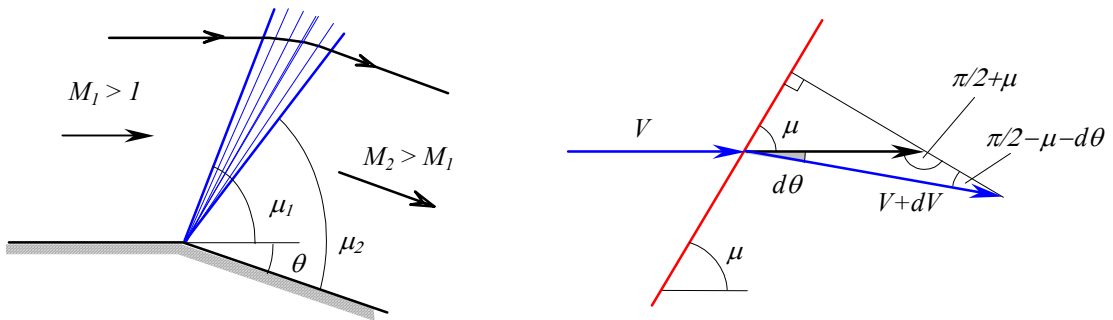
Prandtl-Meyer genişleme dalgalarını geçen akımın:

- hızı artar.
- basınç, sıcaklık ve yoğunluğu azalır.

Genişleme dalgaları sonsuz sayıda Mach dalgasından oluşan sürekli bir bölge olup, şok dalgalarının aksine herhangi bir süreksizlik söz konusu değildir. Bu bakımdan

- genişleme dalgalarını geçerken *antropi artmaz, akım izantropiktir.*
- genişleme dalgalarını geçerken akım çizgileri sürekli bir biçimde eğrilir.

Genişleme dalgaları için problem genellikle M_1 Mach sayısı ve θ sapma açısı verildiğinde bu dalgaları geçen akımın M_2 Mach sayısının ve diğer akım büyüklüklerinin hesaplanmasıdır.



Şekildeki gibi Mach sayısı M_1 ve Mach açısı μ_1 olan süpersonik akımın θ açılı dış-köşe etrafında dönerek Mach sayısı M_2 ve Mach açısı μ_2 olan bir akıma dönüşmesi halinde genişleme dalgaları içerisinde sonsuz küçük şiddette bir demetini ele alarak bu dalgayı geçerken akımda oluşacak sonsuz küçük bir değişimi inceleyelim.

Mach dalgasını geçerken akımdaki hız değişimleri Mach dalgasına dik doğrultuda olacaktır. Buna göre V hızındaki akımın şekilde görüldüğü gibi μ açılı bir sola doğru Mach dalgasını geçerken $d\theta$ açısı kadarlık bir sapma sonucu dV kadar hızlandığı düşünülürse:

Sinüs teoreminden
$$\frac{V + dV}{V} = \frac{\sin(\pi/2 + \mu)}{\sin(\pi/2 - \mu - d\theta)}$$

yazılabilir. Burada

$$\sin(\pi/2 + \mu) = \cos \mu$$

$$\sin(\pi/2 - \mu - d\theta) = \cos(\mu + d\theta) = \cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta$$

ayrıca

$$d\theta \ll \pi \rightarrow \sin d\theta \sim d\theta \text{ ve } \cos d\theta \sim 1$$

olup

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu - \sin \mu d\theta} = (1 - \tan \mu d\theta)^{-1}$$

Sağ taraf Binom serisine açılarak

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + \tan \mu d\theta + \dots$$

Birinci mertebeden yaklaşımla

$$dV/V = \tan \mu d\theta$$

bulunur. Mach açısı için

$$\tan \mu = \frac{\sin \mu}{\cos \mu} = \frac{\sin \mu}{\sqrt{1 - \sin^2 \mu}} = \frac{1/M}{\sqrt{1 - 1/M^2}} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

yazılarak

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \cdot \frac{dV}{V}$$

elde edilir.

Bu son ifade Prandtl-Meyer genişleme dalgalarının çözümü için uygun bir denklem olup:

- Yaklaşık bir denklem olmakla birlikte $d\theta \rightarrow 0$ için tam bir eşitliğe dönüşür.
- Sadece geometriye dayanılarak türetildiği ve olayın fiziği ile tek ilgisi Mach dalgasının tanımına dayanması olduğu için mükemmel gazları, kimyasal reaksiyona maruz gazları ve reel gazları içine alan genel bir bağıntıdır.

Prandtl-Meyer dalgalarının tamamının analizi için yukarıdaki denklemin integrali alınmalıdır.

Mach sayısı tanımından

$$V = M \cdot a$$

İki tarafın logaritması ve diferansiyeli alınarak

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}$$

Adyabatik akımlar için

$$a = a_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/2}$$

İki tarafın logaritması ve diferansiyeli alınarak

$$\frac{da}{a} = -\frac{\gamma - 1}{2} \cdot \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

Hız diferansiyeli ifadesinde kullanılarak

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

Bu son eşitlik akım sapma açısını hıza bağlayan diferansiyel denkleme konup integral alınırsa

$$\int_0^\theta d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)} dM$$

sonuç olarak

$$\theta = v(M_2) - v(M_1)$$

elde edilir. Burada

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \cdot \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$$

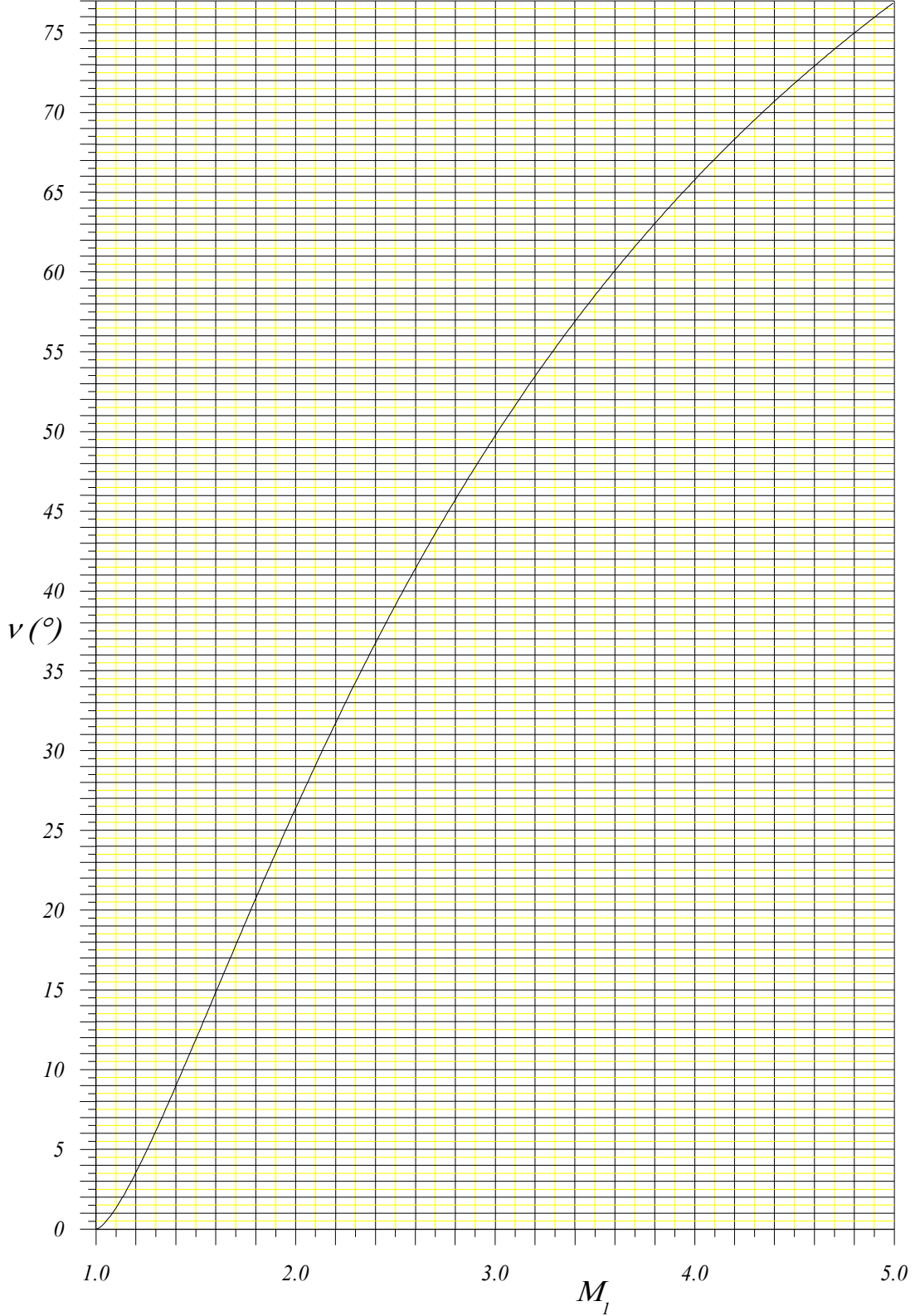
M Mach sayısı ile $v(M)$ Prandtl-Meyer fonksiyonunun değişimi genellikle tablolarla veya [grafikle](#) değerlendirilir.

Genişleme dalgasıyla ilgili tipik bir problemde

- Prandtl-Meyer fonksiyonundan $v(M_1)$ büyüklüğü hesaplanır.
- Sapma açısı kullanılarak $v_2(M_2) = v_1(M_1) + \theta$ değeri hesaplanır
- Prandtl-Meyer fonksiyonu tersine çözülerek M_2 büyüklüğü ve

- izantropik akım bağıntılarında da diğer akım büyüklükleri hesaplanır.

Prandtl-Meyer fonksiyonunun M verildiğinde ν için hesaplanması kolayken, ν verildiğinde M için çözümlü ancak [iteratif yöntem](#)le gerçekleştirilebilir.



Prandtl-Meyer fonksiyonu

Örnek Problem

Basıncın 1 bar, sıcaklığın 293°K olduğu 1.5 Mach sayısındaki süpersonik akım bir dış-bükey köşede oluşan genişleme dalgalarını geçerek 20° lik bir sapmaya maruz kaldığına göre köşeden sonraki akım büyüklüklerini hesaplayınız.

Cözüm:

$$M_1 = 1.5 \quad \text{için} \quad \text{PM fonksiyonu} \text{ndan} \quad v_1 = 11.91^\circ$$

$$\theta = 20^\circ \quad \text{olup} \quad v_2 = v_1 + \theta = 11.91 + 20 \quad \rightarrow \quad v_2 = 31.91^\circ$$

$$v_2 = 31.91^\circ \quad \text{için} \quad \text{PM fonksiyonu} \text{ndan} \quad M_2 = 2.207$$

Diğer akım büyüklükleri için izantropik akım bağıntılarından

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{1 + 0.2M_1^2}{1 + 0.2M_2^2} = \frac{1 + 0.2 \times 1.5^2}{1 + 0.2 \times 2.207^2} = 0.7345 \quad \rightarrow \quad T_2 = 215.2^\circ K$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = (0.7345)^{3.5} = 0.3396 \quad \rightarrow \quad p_2 = 0.3396 \text{ bar}$$

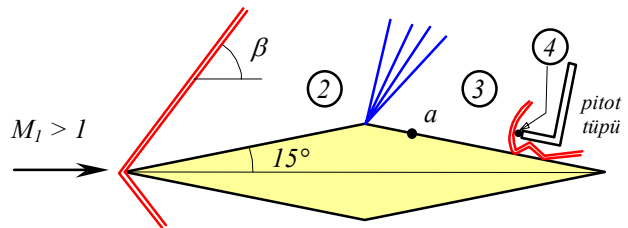
elde edilir.

Örnek Problem:

Hücum kenarının yarı-tepe açısı 15° olan baklava dilimi şeklindeki bir kanat profili sıfır hücum açısında süpersonik bir akıma maruz bırakılmıştır. Profilin firar kenarı yakınlarına şekilde görüldüğü gibi yerleştirilen bir pitot tüpünden 2.596 atm basınç ölçülmüştür. Bu noktanın biraz önünde yer alan a noktasında yüzeye açılan bir basınç prizinden ölçülen statik basınç ise 0.1 atm dir. Buna göre serbest akımın M_1 Mach sayısını hesaplayınız.

Cözüm:

Pitot tüpünün hemen önünde şekildeki gibi bir normal şok oluşacaktır. Pitot tüpüyle ölçülen basınç bu şokun hemen arkasındaki (4) bölgesinde ölçülen p_{04} toplam basıncıdır.



Buna göre
$$\frac{p_{04}}{p_3} = \frac{2.596}{0.1} = 25.96$$

Normal şokun gerisindeki toplam basınçla önündeki statik basınç arasında

$$\frac{p_{04}}{p_3} = \left[\frac{36M_3^2}{35M_3^2 - 5} \right]^{3.5} \cdot \left[\frac{7M_3^2 - 1}{6} \right]$$

ilişkisi olup $p_{04} / p_3 = 25.96$ için *iteratif çözüm yöntemi*yle

$$M_3 = 4.45$$

$$M_3 = 4.45 \quad \text{için} \quad PM \text{ fonksiyonundan} \quad v_3 = 71.27^\circ$$

$$\text{Genişleme açısı } \theta = 30^\circ \text{ olup} \quad v_2 = v_3 - \theta = 71.27 - 30 \rightarrow v_2 = 41.27^\circ$$

$$v_2 = 41.27^\circ \quad \text{için} \quad PM \text{ fonksiyonundan} \quad M_2 = 2.594$$

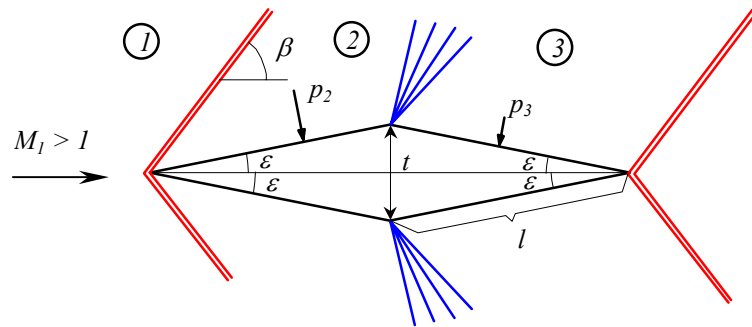
$$\text{Şokun gerisinde} \quad M_{n2} = M_2 \cdot \sin(\beta - \theta) = 2.59 \cdot \sin(\beta - 15^\circ)$$

olup bu eşitlikteki M_{n2} ve β nin her ikisi de bilinmemektedir. Çözüm deneme yanılma yoluyla iteratif olarak gerçekleştirilebilir. Buna göre çeşitli M_1 ler için M_2 ler hesaplanarak

M_1	θ	β	M_{n1}	M_{n2}	M_2
4.000	15	27.06	1.820	0.612	2.929
3.500	15	29.19	1.707	0.639	2.605
3.480	15	29.29	1.703	0.640	2.591
3.485	15	29.27	1.704	0.640	2.595

4.13- Süpersonik Profiller İçin Şok-Genişleme Dalgaları Teorisi:

Bu bölümde incelenen şok ve genişleme dalgalarına ilişkin teorilerin sonucu olan hesaplama yöntemleri yüzeyi doğru parçalarından oluşan çoğu süpersonik kanat profiline etkiyen aerodinamik kuvvetlerin tam olarak hesaplanmasına imkan verir. Örneğin şekilde görülen baklava dilimi şeklindeki profil sıfır hücum açısında süpersonik akım içerisinde gözönüne alınırsa, süpersonik akım hücum kenarında bir eğik şoku geçerek ε kadar sapacak, veter orta noktasındaki dış-bükey köşede oluşan genişleme dalgalarını geçerken 2ε açısı kadar sapacak ve nihayet firar kenarında oluşan bir eğik şoku geçerken tekrar ε açısı kadar sapma gösterecektir. Benzeri olaylar profilin alt yüzeyi boyunca da görülecektir. Buna göre hücum kenarına bitişik üst ve alt yüzeyler üzerindeki basınçlar eğik şok teorisi, gerideki yüzeyler üzerindeki basınçlar ise Prandtl-Meyer genişleme dalgaları teorisi yardımıyla elde edilebilir.



Sıfır hücum açısında bu profile etkiyecek olan aerodinamik kuvvet sadece sürüklemeye ibarettir. Taşıma ise, alt ve üst yüzeylerdeki basınç dağılımlarının simetrik olması nedeniyle sıfırdır. Sürükleme kuvveti, basınç dağılımının integrasyonu yoluyla

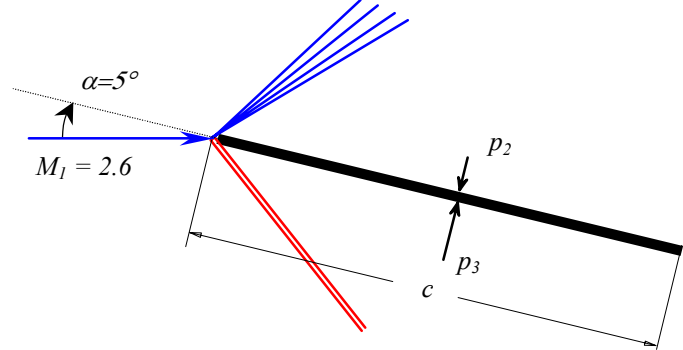
$$D = 2(p_2 \cdot l \cdot \sin \varepsilon - p_3 \cdot l \cdot \sin \varepsilon) = (p_2 - p_3)t$$

şeklinde elde edilir.

Görüldüğü gibi, bir kanat profiline sürtünmesiz sesaltı akımda hiçbir sürüklenme kuvveti etkimiyorken (d'Alembert paradoksu) sesüstü akımda bir sürüklenme kuvveti mevcuttur. Bu yeni sürüklenme, hatırlanacağı gibi "dalga sürüklenmesi" olarak adlandırılmakta olup, kanat profilinin oluşturduğu şok dalgalarını geçerken akımda meydana gelen toplam basınç kaybıyla ve antropi artışıyla ilgilidir.

Örnek Problem:

2.6 Mach sayısındaki süpersonik akımda 5° hücum açısıyla yer alan sonsuz ince bir düz levhaya etkiyen taşıma ve sürüklenme katsayılarını hesaplayınız.



Çözüm:

Levhanın hücum kenarında üst yüzeyde bir genişleme dalgası, alt yüzeyde ise bir eğik şok dalgası oluşacaktır.

Üst yüzeyde $M_1 = 2.6$ için [PM fonksiyonu](#)ndan $v_1 = 41.41^\circ$

Genişleme açısı $\theta = 5^\circ$ olup $v_2 = v_1 + \theta = 41.41 + 5 \rightarrow v_2 = 46.41^\circ$

$v_2 = 46.41^\circ$ için [PM fonksiyonu](#)ndan $M_2 = 2.832$

Genişleme dalgalarını geçen akım izantropik olduğu için

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_o}{p_1} \cdot \frac{p_2}{p_o} = \left[\frac{1 + 0.2M_1^2}{1 + 0.2M_2^2} \right]^{3.5} \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 0.700$$

Alt yüzeyde $M_1 = 2.6$ için $\theta = 5^\circ$ için [eğik şok](#) çözümlerinden $\beta = 26.41^\circ$, $M_{n1} = 1.157$, $M_{n3} = 0.870$ ve $\frac{p_3}{p_1} = 1.394$, $M_3 = 2.384$

Levhanın alt ve üst yüzeyinde basınçlar integre edilerek sürüklenme ve taşıma kuvvetleri için

$$D = (p_3 - p_2)c \sin \alpha, \quad L = (p_3 - p_2)c \cos \alpha$$

Serbest akımın dinamik basıncı $q_1 = \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \gamma p_1 M_1^2$ olmak üzere katsayılar

$$C_D = \frac{D}{q_1 c} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \sin \alpha, \quad C_L = \frac{L}{q_1 c} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \cos \alpha$$

şeklinde yazılabilir. Basınç oranları için yukarıda bulunan değerler kullanılarak

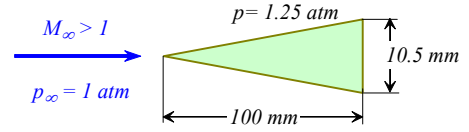
$$C_D = 0.0128, \quad C_L = 0.1462$$

elde edilir.

ÖRNEK SORULAR

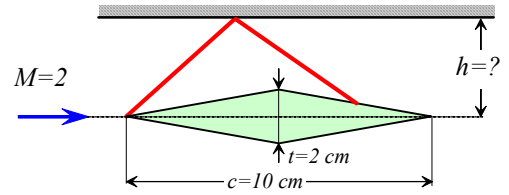
Soru 1

Şekildeki kama biçimli cisim süpersonik akımda simetrik olarak yer almaktadır. Cismin yüzeyinde basınç $1.25 atm$ olarak ölçülmüştür. Serbest akımın Mach sayısını hesaplayınız.



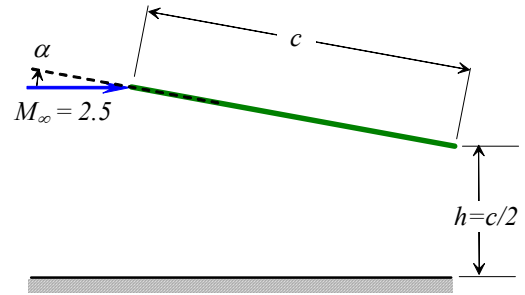
Soru 2

Süpersonik rüzgar tünelinin deney odasına simetrik biçimde yerleştirilmiş simetrik baklava dilimi kesitli kanat profinin hücum kenarından oluşan bir eğik şok duvarda yansımaktadır. Yansıyan şokun kanat profiline çarpmaması için deney odasının yarı yüksekliği en az ne kadar olmalıdır? (Not: Profil üzerinde oluşan genişleme dalgalarını dikkate almayınız.)



Soru 3

Süpersonik rüzgar tüneli deney odasında şekilde görüldüğü gibi α hücum açısıyla yer alan bir düz levhanın burnundan oluşan şok dalgasının duvardan yansıyarak tekrar levhaya çarpmaması için hücum açısı en fazla ne olmalıdır?



Soru 4

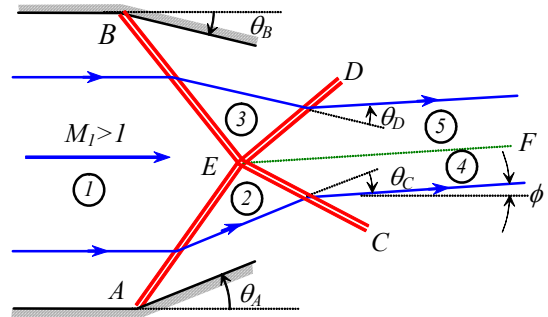
Şekildeki şok kesişmesi probleminde

$$M_1=2, \quad p_1=1.5 atm$$

$$\theta_A=10^\circ, \quad \theta_B=5^\circ$$

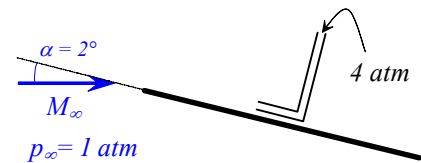
$$p_4=p_5=3.284 atm$$

olarak verilmiştir. M_5 Mach sayısını hesaplayınız.



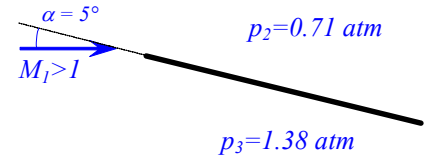
Soru 5

Şekilde görüldüğü gibi süpersonik akımda yer alan bir düz levhanın üst tarafındaki bir pitot tüpü vasıtasıyla ölçülen basınç $4 atm$ dir. Serbest akımın Mach sayısını hesaplayınız.



Soru 6

Süpersonik akımda 5° hücum açısıyla yer alan şekildeki düz levhanın üstünde ölçülen statik basınç 0.71 atm , altında ölçülen statik basınç 1.38 atm dir. Serbest akımın Mach sayısını hesaplayınız.

**Soru 7**

Şekildeki kanat profiline etkiyen taşıma ve sürükleme katsayılarını şok ve genişleme dalgaları hesabı yardımıyla elde ediniz.

