

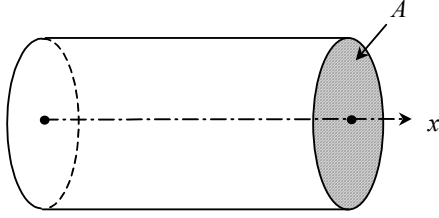
BÖLÜM 3

BİR-BOYUTLU AKIMLAR

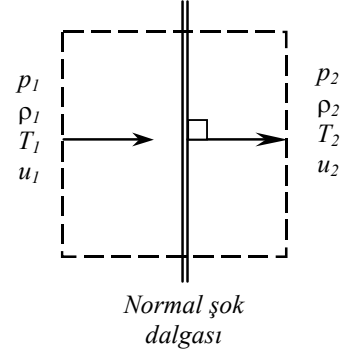
- 3.1- Bir-boyutlu akımın tanımı
- 3.2- Bir-boyutlu akım denklemleri
- 3.3- Ses hızı ve Mach sayısı
- 3.4- Bazı akım parametreleri
- 3.5- Bir-boyutlu enerji denkleminin farklı biçimleri
- 3.6- [Normal-şok bağıntıları](#)
- 3.7- Hugoniot denklemi
- 3.8- Bir-boyutlu, ısı ilaveli akımlar
- 3.9- Bir-boyutlu sürtülmeli akımlar

3.1- Bir-boyutlu Akımın Tanımı

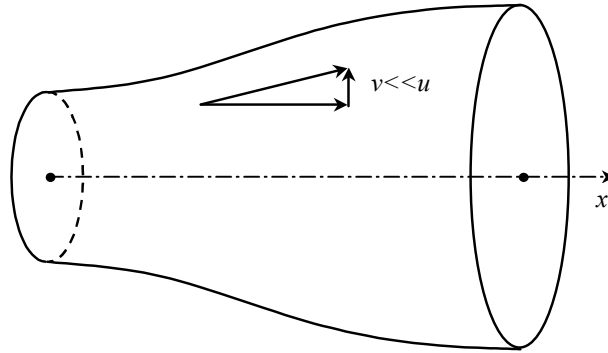
Akım özelliklerinin sadece bir doğrultuda değişim gösterdiği akıma [bir-boyutlu akım](#) denir.



$$\begin{aligned} A &= Sb \\ p &= p(x) \\ \rho &= \rho(x) \\ T &= T(x) \\ u &= u(x) \end{aligned}$$

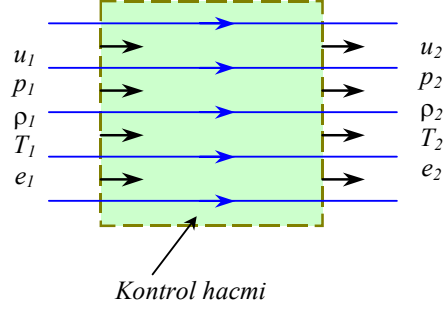


İki doğrultudaki değişimlerin üçüncü doğrultudaki değişimler yanında ihmal edilebilir olduğu akımlara [sanki-bir-boyutlu akım](#) adı verilir.



$$\begin{aligned} A &= A(x) \\ p &= p(x) \\ \rho &= \rho(x) \\ T &= T(x) \\ u &= u(x) \end{aligned}$$

3.2- Bir-boyutlu Akım denklemleri



Daimi akım için süreklilik denklemi

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Bir-boyutlu akım halinde

$$\rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2$$

Sabit kesit alanı ($A_1=A_2$) için

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

Daimi, sürtünmesiz, bünye kuvvetlerinin önemsiz olduğu akım için

Momentum denklemi

$$\iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS) \cdot \vec{V} = - \iint_S p \cdot \vec{n} \, dS$$

Sadece *x doğrultusunda* akım varsa

$$\iint_S (\rho \cdot u \, dS) \cdot u = - \iint_S p \cdot dS$$

Bir-boyutlu akım için

$$(\rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2) \cdot u_2 - (\rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1) \cdot u_1 = -p_2 \cdot A_2 + p_1 \cdot A_1$$

Sabit kesit alanı ($A_1=A_2$) için

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2$$

Daimi, sürtünmesiz, bünye kuvvetlerinin önemsiz olduğu akım için

Enerji denklemi
$$\iint_S \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_S p \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS + \iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dv$$

Burada
$$\iiint_V \dot{q} \cdot \rho \cdot dv = \dot{Q}$$
 Isı iletimi veya *Radyasyon* yoluyla sokulan ısı

Bir-boyutlu akım için
$$\rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2 A_2 - \rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 A_1 = -p_2 u_2 A_2 + p_1 u_1 A_1 + \dot{Q}$$

Sabit kesit alanı ($A_1=A_2=A$) için
$$\frac{\dot{Q}}{A} + p_1 u_1 + \rho_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 = p_2 u_2 + \rho_2 \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2$$

İki taraf $\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$ ile bölünerek
$$\frac{\dot{Q}}{\rho_1 u_1 A} + \frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Antalpi tanımı
$$h = e_1 + \frac{p}{\rho}$$

Birim kütle başına sokulan ısı
$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{\rho_1 u_1 A}$$

olmak üzere bir-boyutlu enerji denklemi

$$\dot{q} + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Daimi, bir-boyutlu akım denklemlerinin bilançosu

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

$$p_1 + \rho_1 \cdot u_1^2 = p_2 + \rho_2 \cdot u_2^2$$

Viskoz kuvvetler yok, bünyesel kuvvetler yok

$$\dot{q} + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Viskoz kaynaklı ısı ve iş yok, shaft işi yok

3.3- Ses Hızı ve Mach Sayısı

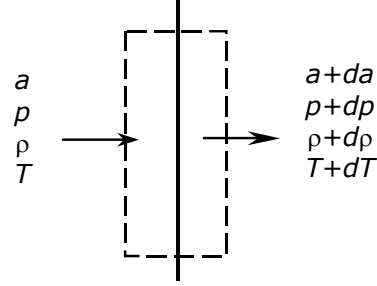
Ses dalgası zayıf şiddette bir basınç dalgasıdır. Ses dalgasını geçmekte olan akım bir-boyutlu kabul edilebilir.

Süreklilik denklemi uygulanarak

$$\begin{aligned}\rho \cdot a &= (\rho + d\rho) \cdot (a + da) \\ &= \rho \cdot a + \rho \cdot da + a \cdot d\rho + d\rho \cdot da\end{aligned}$$

İkinci mertebeden terimler ihmal edilerek

$$a = -\rho \cdot \frac{da}{d\rho}$$



Momentum denklemi uygulanarak

$$\begin{aligned}p + \rho \cdot a^2 &= (p + dp) + (\rho + d\rho) \cdot (a + da)^2 \\ &= (p + dp) + (\rho + d\rho) \cdot (a^2 + 2a \cdot da + da^2)\end{aligned}$$

İkinci mertebeden terimler ihmal edilerek

$$dp = -2\rho \cdot a \cdot da - a^2 d\rho$$

$$da = \frac{dp + a^2 d\rho}{-2\rho \cdot a}$$

$$\frac{da}{d\rho} = \frac{1}{-2\rho \cdot a} \left(\frac{dp}{d\rho} + a^2 \right)$$

a için bulunan bağıntıdan türev çekilerek

$$-\frac{a}{\rho} = \frac{1}{-2\rho \cdot a} \left(\frac{dp}{d\rho} + a^2 \right)$$

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

Ses dalgası hareketinde

- çevreyle ısı alışverişi yoktur (*adyabatik olay*)
- dissipasyon yoktur (*tersinir olay*)

} \Rightarrow İzantropik olay

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s$$

Ses hızı ile elastiklik modülü ilişkisi:

Ses hızının Bulk elastisite modülü cinsinden bir tanımı aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial(1/v)} = -\frac{\partial p}{(1/v^2)\partial v} = v \frac{\partial p}{-\partial v/v} \quad \rightarrow \quad \boxed{a^2 = \frac{K}{\rho}}$$

Bu bağıntıdan ayrıca
$$a^2 = \frac{v}{-\frac{\partial v/v}{\partial p}} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{v}{\tau_s} \quad \rightarrow \quad \tau_s = \frac{v}{a^2}$$

yazılabilir. Ses hızı sıkıştırılabilmenin bir ölçüsüdür. Yukarıdaki son bağıntıya göre gerçek sıkıştırılmaz akım hali ($\tau_s \rightarrow 0$) ancak ($a_\infty \rightarrow \infty$) için elde edilir.

Ses hızı için diğer bağıntılar:

İzantropik akımlar için
$$\frac{p}{\rho^\gamma} = p\rho^{-\gamma} = Sb$$

Logaritma ve diferansiyel alınarak
$$\ln p - \gamma \cdot \ln \rho = \ln Sb \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Düzenleme ile
$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma \cdot p}{\rho}$$

Ses hızı tanımı gereği
$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s \quad \rightarrow \quad \boxed{a^2 = \frac{\gamma \cdot p}{\rho}}$$

Hal denklemleri kullanılarak
$$a^2 = \frac{\gamma \cdot \rho R T}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boxed{a^2 = \gamma \cdot R \cdot T}$$

Mach sayısı:

Mach sayısı, akışkanın hareket hızı ile aynı akışkan ortamında ses dalgasının yayılma hızı arasında karşılaştırma yapmayı sağlar

$$\boxed{M = \frac{V}{a}}$$

3.4- Bazı Akım Parametreleri

Bir-boyutlu, sıkıştırılabilir akımlarda Mach sayısının iki durumundaki akım büyüklükleri pratik uygulama açısından özellik gösterir.

M=0 Hali

Herhangi bir Mach sayısındaki akımın izantropik olarak yavaşlayarak akım alanının herhangi bir noktasında durma şartlarına erişebileceği varsayılır. Bu noktada akım özelliklerine

ρ_0 : "durma basıncı", veya "toplam basınç"

T_0 : "durma sıcaklığı", veya "toplam sıcaklık"

gibi isimler verilir.

M=1 Hali

Yine akım alanının bir yerinde akım hızının ses hızına erişebileceği varsayılır. Bu noktadaki akım büyüklükleri

T^*, a^*, ρ^*

gibi sembollerle gösterilir ve karakteristik değerler olarak adlandırılır.

Akımın herhangi bir noktasında akım hızı V ve ses hızı a olmak üzere

$$M = \frac{V}{a}$$

şeklinde Mach sayısının tanımlandığı hatırlanır. Akım hızı karakteristik ses hızıyla bölünerek

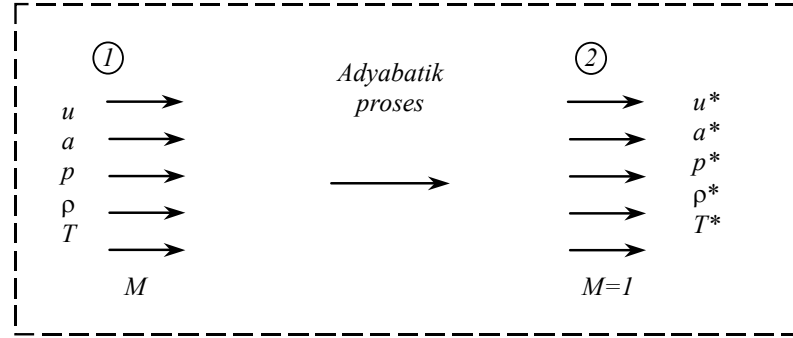
$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

şeklinde yeni bir boyutsuz büyüklük tanımlanır ki, bu büyüklüğe de "Karakteristik Mach Sayısı" adı verilir.

3.5- Bir-Boyutlu Enerji Denkleminin Farklı Biçimleri

Isı ilavesi olmaması halinde (adyabatik proses)

Enerji denklemi		$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$
Kalorik mükemmel gaz için	$h = C_p T$ →	$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$
$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ tanımı kullanılarak		$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$
Ses hızı tanımıyla	$a^2 = \gamma R T$ →	$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$
Ses hızı ve hal denkleminde	$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ →	$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}$

Karakteristik büyüklükler cinsinden enerji denklemi

Ses hızı cinsinden enerji denklemi

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{u_2^2}{2}$$

1 ve 2 şartlarında uygulanarak

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{u^{*2}}{2}$$

$u^* = a^*$ olup

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}$$

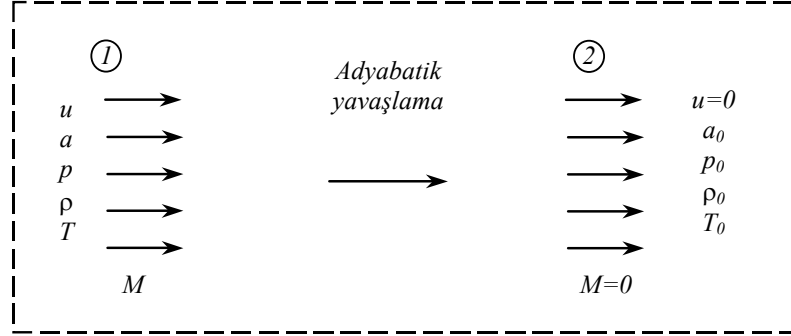
Herhangi bir akımda adyabatik bir hızlanma (veya yavaşlama) sonucu ses hızına erişildiği varsayımıyla yapılan bu inceleme sonucuna göre:

Akım alanının herhangi bir noktasında a ve u verildiği takdirde bir a^* değeri hesaplanabilir.

UYARI

Akımın **adyabatik** olması halinde akım alanının bütün noktaları için bir tek a^* değeri vardır.

Akım **adyabatik değilse** a^* değeri akım alanının her noktası için farklı olabilir.

Durma noktası büyüklükleri cinsinden enerji denklemi

Ses hızı cinsinden enerji denklemi

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{u_2^2}{2}$$

1 ve 2 şartlarında uygulanarak

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

Düzenlenerek

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u^2}{a^2}$$

Mach sayısı tanımıyla

$$M = \frac{u}{a}$$

→

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Ses hızı tanımıyla

$$a^2 = \gamma RT$$

→

$$\frac{a_0^2}{a^2} = \frac{\gamma RT_0}{\gamma RT} = \frac{T_0}{T}$$

→

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

İzantropik proses için

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = Sb$$

bağıntısı ve Hal denklemi

$$p = \rho RT$$

arasından:

 ρ yok edilerek

$$\frac{\rho RT}{\rho^\gamma} = Sb$$

→

$$\rho^{\gamma-1} = T \cdot Sb$$

→

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

 ρ yok edilerek

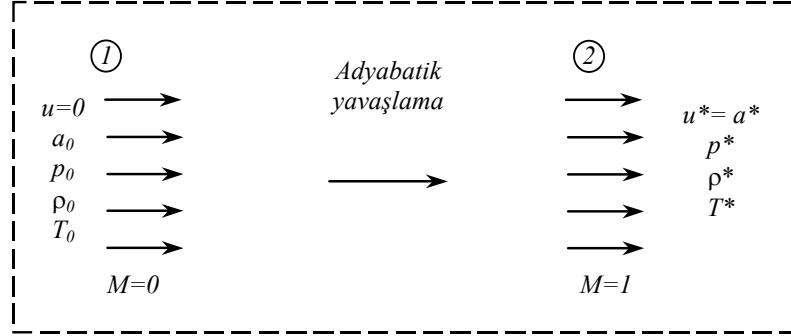
$$\frac{p}{\left(\frac{p}{RT}\right)^\gamma} = Sb$$

→

$$p^{\gamma-1} = T^\gamma \cdot Sb$$

→

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Durma noktası büyüklükleri Karakteristik büyüklüklerin ilişkisi

Ses hızı cinsinden enerji denklemi

$$\frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{u_2^2}{2}$$

1 ve 2 şartlarında uygulanarak

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a^{*2}$$

Düzenlenerek

$$\frac{a^{*2}}{a_0^2} = \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.8333$$

Basınçlar oranı

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.528$$

Yoğunluklar oranı

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 0.634$$

Mach sayısı ile Karakteristik Mach sayısı ilişkisi

Ses hızı cinsinden enerji denklemi		$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}$
Düzenlenerek		$\frac{1}{\gamma-1} \frac{a^2}{u^2} + \frac{1}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{a^{*2}}{u^2}$
Mach sayısı tanımlarından	$M = \frac{u}{a}, \quad M^* = \frac{u}{a^*}$	$\frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{M^2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1}{M^{*2}} - \frac{1}{2}$
Düzenlenerek		$M^2 = \frac{2}{\frac{\gamma+1}{M^{*2}} - (\gamma-1)}$

Not

$M^* = 1$	için	$M = 1$
$M^* < 1$	için	$M < 1$
$M^* > 1$	için	$M > 1$
$M^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \sqrt{6}$	için	$M \rightarrow \infty$

Örnek Problem 3.2

Bir roket motorunun yanma odasındaki akım hızları çok küçük olup akımın durma şartlarında olduğu varsayılmaktadır. Yanma odasındaki basınç 15 atm ve sıcaklık da 2500°K dir. Roket lülesi boyunca akım izantropik olup çıkıştaki basınç 0.372 atm, sıcaklık ise 1350°K dir. Lüle çıkışındaki akımın Mach sayısını ve hızını hesaplayınız. Not: Yanma sonu gazlarının kalorik mükemmel olduğu varsayılmakta olup, özgül gaz sabiti $R=692,8 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$ ve özgül ısılar oranı 1.2 dir.

Cözüm

Basınçlar oranı için izantropik akım bağıntısı
$$\frac{p_0}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Mach sayısı çekilerek
$$M_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}$$

$\gamma=1.2$, $p_0=15 \text{ atm}$ ve $p_2=0.372 \text{ atm}$ için
$$M_2 = \sqrt{\frac{2}{1.2-1} \left[\left(\frac{15}{0.372}\right)^{\frac{1.2-1}{1.2}} - 1 \right]} = 2.919$$

Ses hızı tanımından
$$a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = \sqrt{1.2 \times 692.8 \times 1350} = 1059.4 \text{ m / s}$$

Akım hızı
$$V_2 = M_2 a_2 = 2.919 \times 1059.4 = 3092 \text{ m / s}$$

Alternatif Cözüm

Adyabatik süreçte enerji denklemi
$$h + \frac{V^2}{2} = h_0$$

Kalorik mükemmel gaz için
$$h = C_p T \rightarrow C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_0$$

Hız çekilerek
$$V_2 = \sqrt{2C_p(T_0 - T_2)} = \sqrt{2 \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T_0 - T_2)}$$

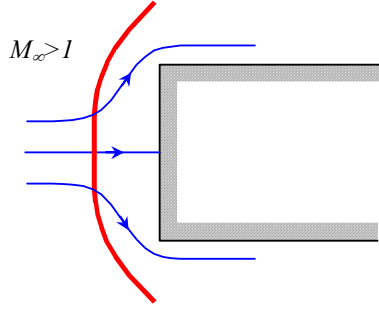
$$V_2 = \sqrt{2 \frac{1.2 \times 692.8}{1.2-1} (2500 - 1350)} = 3092 \text{ m / s}$$

Mach sayısı
$$M_2 = \frac{V_2}{a_2} = \frac{3092}{1059.4} = 2.919$$

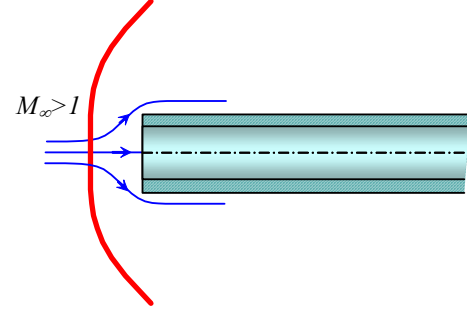
3.6-Normal Şok Bağlıları

3.6.1-Normal Şok nerelerde oluşur?

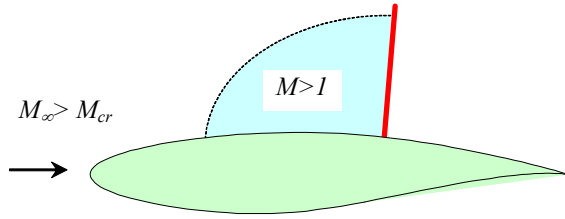
Normal şok akım doğrultusu ile dik açı yapan şok dalgasıdır. Pratikte bazan eğrisel bir şokun bir parçası olarak da görülür.



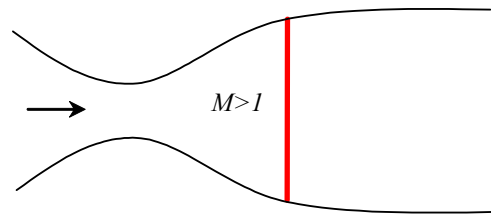
Küt cismin önünde şok



Pitot tüpünün önünde şok



Kritik Mach sayısının üzerindeki akımda şok



Kanal içindeki akımda şok

3.6.2- Normal şok denklemleri

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

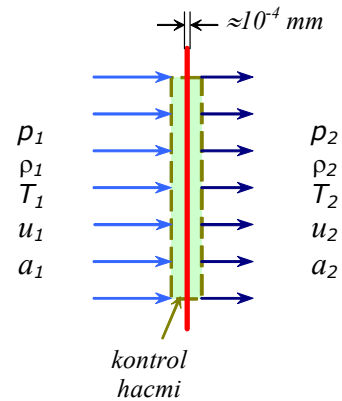
$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

+

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

$$h = C_p \cdot T$$



Bu 5 denklemle 5 bilinmeyen (ρ , ρ , u , h , T) çözümü mümkündür.

3.6.3- Şok öncesi ve sonrası karakteristik Mach sayılarının ilişkisi

Momentum denklemi		$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$
Sürekliyet denklemiyle bölünerek	$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$	\Rightarrow
		\Downarrow
		$\frac{\rho_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{\rho_2}{\rho_2 u_2} + u_2$
Ses hızı tanımından	$a^2 = \gamma \cdot \frac{p}{\rho}$	$\rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma}$
		\Rightarrow
		\Downarrow
		$\frac{a_1^2}{\gamma u_1} + u_1 = \frac{a_2^2}{\gamma u_2} + u_2$
Enerji denklemi	$a_1^2 + \frac{\gamma-1}{2} u_1^2 = a_2^2 + \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 = \frac{\gamma+1}{2} a^{*2}$	\Rightarrow
		\Downarrow
	$\frac{\frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_1^2}{\gamma u_1} + u_1 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_2^2}{\gamma u_2} + u_2$	
	$u_2 \left[\frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_1^2 + \gamma u_1^2 \right] = u_1 \left[\frac{\gamma+1}{2} a^{*2} - \frac{\gamma-1}{2} u_2^2 + \gamma u_2^2 \right]$	
	$u_2 \frac{\gamma+1}{2} [a^{*2} + u_1^2] = u_1 \frac{\gamma+1}{2} [a^{*2} + u_2^2]$	
	$u_2 [a^{*2} + u_1^2] = u_1 [a^{*2} + u_2^2]$	
	$a^{*2} u_2 + u_1^2 u_2 = a^{*2} u_1 + u_2^2 u_1$	
	$a^{*2} (u_2 - u_1) = u_2 u_1 (u_2 - u_1)$	
Prandtl bağıntısı		$a^{*2} = u_1 u_2$
		$1 = \frac{u_1}{a^*} \cdot \frac{u_2}{a^*}$
Karakteristik Mach sayısı tanımından	$1 = M_1^* \cdot M_2^*$	\Rightarrow
		$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$

Şok dalgasından önce akım süpersoniktir. $M_1 > 1 \rightarrow M_1^* > 1 \rightarrow M_2^* < 1 \rightarrow \boxed{M_2 < 1}$

O halde şoku geçen akım subsonik hale gelir. Bu durum genel bir sonuç olup, gaz kalorik mükemmel olmasa da geçerlidir.

Mach sayısı karakteristik Mach sayısı ilişkisi
$$M^2 = \frac{2}{\frac{\gamma+1}{M^{*2}} - (\gamma-1)}$$

Karakteristik Mach sayısı için yazılarak
$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}$$

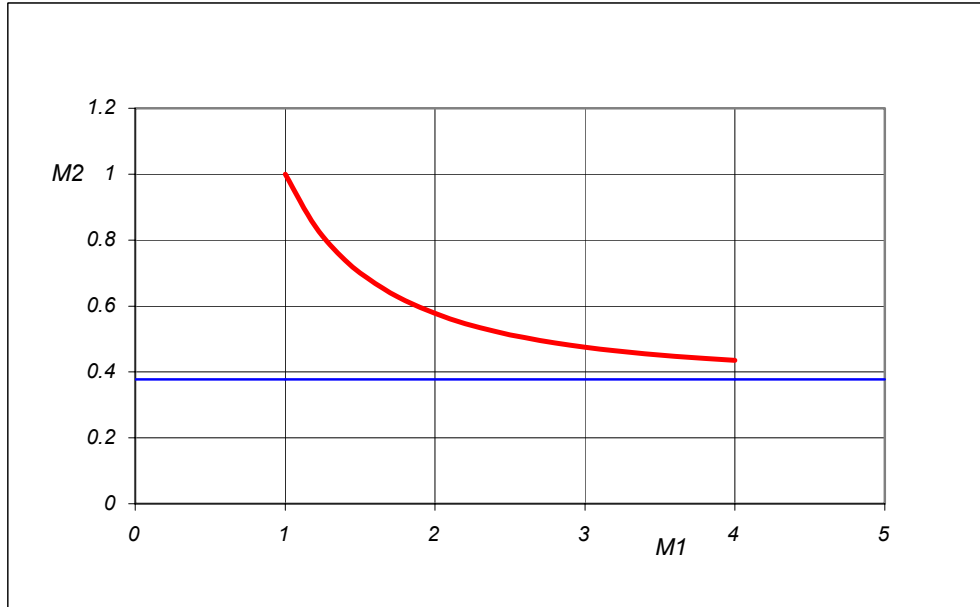
Prandtl bağıntısında kullanılarak
$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*} \Rightarrow \Downarrow$$

$$\frac{(\gamma+1)M_2^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

M_2 için çözümlenerek
$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

Buna göre, kalorik mükemmel bir gaz için ($\gamma=1.4$) şokun gerisindeki Mach sayısı sadece şokun önündeki Mach sayısına bağlıdır.

$M_1=1$ için $M_2=1$ olup sonsuz zayıf şiddette bir şoktan (Mach dalgası) söz edilebilir.



$M_1 \rightarrow \infty$ için
$$M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0.378$$

3.6.4- Şoku geçen akım özellikleri

Sürekli denklemi		$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$
		$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 \cdot u_2}$
Prandtl bağıntısı	$a^{*2} = u_1 u_2$	$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}$
M - M* ilişkisi	$M^{*2} = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}$	$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}$

Momentum denklemi		$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$
Düzenlenerek		$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1 \left(u_1 - \frac{\rho_2 u_2}{\rho_1 u_1} u_2 \right)$
Sürekli denklemi	$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$	$\Rightarrow p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) = \rho_1 u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$
Ses hızı tanımından	$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \rightarrow \rho = \gamma \frac{p}{a^2}$	$\Rightarrow p_2 - p_1 = \gamma p_1 \frac{u_1^2}{a_1^2} \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$
Yoğunluklar oranı	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2}$	$\Rightarrow \downarrow$
Mach sayısı tanımı	$M = \frac{u}{a}$	$\Rightarrow \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \gamma M_1^2 \left[1 - \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2} \right]$
Düzenlenerek		$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1)$

Hal denklemi		$p = \rho \cdot R \cdot T$
Şok önü ve arkasında uygulanarak		$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{T_2}{T_1}$
Basınçlar oranı	$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$	$\Rightarrow \downarrow$
Yoğunluklar oranı	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}$	$\Rightarrow \downarrow$
Sonuç olarak sıcaklık oranları	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \cdot \left[\frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2} \right]$	

UYARI

Kalorik mükemmel gazlar için ($\gamma = Sb$)

$$M_2, \frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{T_2}{T_1} = f(M_1)$$

Şokun arkasındaki büyüklükler sadece şokun önündeki Mach sayısının fonksiyonudur.

Isıl mükemmel gazlar için ($C_p = C_p(T), C_v = C_v(T)$)

$$M_2, \frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{T_2}{T_1} = f(M_1, T_1)$$

Kimyasal reaksiyondaki gazlar için

$$M_2, \frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{T_2}{T_1} = f(M_1, T_1, p_1)$$

Ancak

$M < 5$ için yukarıda kalorik mükemmel gazlar için çıkartılan şok bağıntıları geçerlidir.

Lim $M_1 \rightarrow 1$ için

$$M_2 = 1, \frac{p_2}{p_1} = 1, \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1, \frac{T_2}{T_1} = 1$$

Lim $M_1 \rightarrow \infty$ için

$$M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0.378, \frac{p_2}{p_1} = \infty, \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6, \frac{T_2}{T_1} = \infty$$

3.6.5- Şoku geçen akımın entropi değişimi

Normal şok bağıntılarının matematiksel olarak $M_1 < 1$, $M_2 > 1$ hali için de geçerli olduğu düşünülebilir. *Ancak*, bunun fiziksel olarak mümkün olmadığını entropi değişimine bakarak görmek mümkündür.

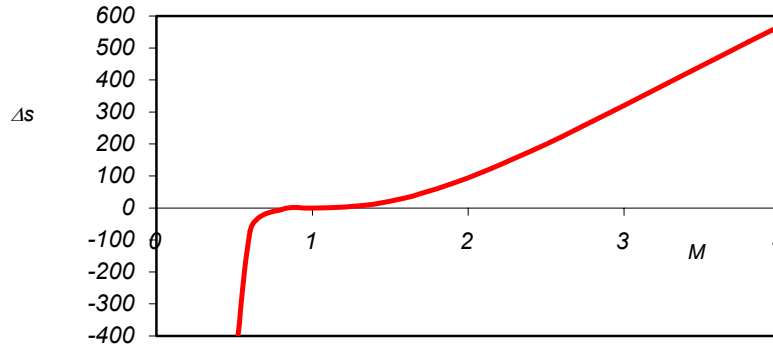
$$\text{Entropi bağıntısı} \quad s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\text{Şok bağıntıları} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$$

$$\text{Buna göre} \quad s_2 - s_1 = f(M_1)$$

olup entropi değişimi şok önündeki Mach sayısının fonksiyonudur. Bu değişim şekilde gösterilmektedir.



Buna göre:

$$M_1 < 1 \text{ için} \quad s_2 - s_1 < 0$$

$$M_1 = 1 \text{ için} \quad s_2 - s_1 = 0$$

$$M_1 > 1 \text{ için} \quad s_2 - s_1 > 0$$

Termodinamiğin 2. kanununa göre entropi azalmayacağı için $M_1 < 1$ için **ŞOK OLAMAZ**

Şoku geçerken neden entropi artar?

Şok çok ince bir tabaka olmakla birlikte, şoku geçen akım özelliklerinde büyük değişimler olduğu görülmektedir. Hız ve sıcaklık gradyanlarının bu şekilde çok büyük olması nedeniyle bu tabaka içerisinde viskoz etkiler ve ısı iletimi olayları önem kazanmaktadır. Tersinir olmayan bu etkiler entropi artışına neden olmaktadır.

3.6.5- Şokun ön ve arkasındaki durma şartları

Normal şok için enerji denklemi

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

İzantropik proses için enerji denklemi

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = C_p T_0 \quad \Rightarrow \quad \Downarrow$$

$$C_p T_{01} = C_p T_{02}$$

$$T_{01} = T_{02}$$

$$h_{01} = h_{02}$$

Sonuç olarak, kalorik veya ısıl mükemmel bir gaz için şoku geçen akımın toplam sıcaklığı (ve toplam entalpisi) sabit kalır

Uyarı: Şayet gaz kimyasal reaksiyonda ise veya şok durağan değilse şoku geçerken toplam sıcaklık ve toplam entalpi sabit kalmaz.

Şokun önünde ve arkasında akımın bir şekilde durma şartlarına eriştiği ve bu süreçlerin izantropik olduğu kabul edilirse, durma şartlarından şok öncesi şartlara kadar ve şok arkası şartlardan durma şartlarına kadar entropi artışı olmayacağından şoku geçen akımın entropi artışı durma şartları cinsinden kolaylıkla hesaplanabilir.

Entropi bağıntısı (durma şartları cinsinden)

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} - R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

Durma sıcaklıkları eşit olduğundan

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}$$

Böylece durma basınçlarının oranı

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = e^{-\frac{s_2 - s_1}{R}}$$

Entropi artacağı için

$$s_2 > s_1 \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{s_2 - s_1}{R}} = \frac{1}{e^{\frac{s_2 - s_1}{R}}} < 1$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} < 1$$

Şoku geçen akımın toplam basıncı azalır

$$p_{02} < p_{01}$$

Örnek Problem

Bir süpersonik rüzgar tünelinin deney odasında $M_1=3$, $p_1=0.5$ atm ve $T_1=200^\circ K$ şartlarında oluşan normal şokun arkasındaki akımın Mach sayısını, basıncını, sıcaklığını ve hızını hesaplayınız.

Cözüm

Normal şokun gerisindeki Mach sayısı
$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} = \frac{1 + 0.2 M_1^2}{1.4 M_1^2 - 0.2}$$

$M_1=3$ için
$$M_2^2 = \frac{1 + 0.2 \times 3^2}{1.4 \times 3^2 - 0.2} = 0.2258 \rightarrow M_2 = 0.4752$$

Normal şok için basınçlar oranı
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) = 1 + \frac{7}{6} (3^2 - 1) = 10.33$$

$p_1=0.5$ atm için
$$p_2 = 10.33 \times 0.5 = 5.165 \text{ atm}$$

Normal şok için yoğunluklar oranı
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} = \frac{2.4 \times 3^2}{2 + 0.4 \times 3^2} = 3.857$$

Normal şok için sıcaklıklar oranı
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 / p_1}{\rho_2 / \rho_1} = \frac{10.33}{3.857} = 2.679$$

$T_1=200^\circ K$ için
$$T_2 = 2.679 \times 200 = 535.8^\circ K$$

Ses hızı
$$a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 535.8} = 464 \text{ m/s}$$

Akım hızı
$$V_2 = M_2 a_2 = 0.4752 \times 464 = 220 \text{ m/s}$$

Örnek Problem

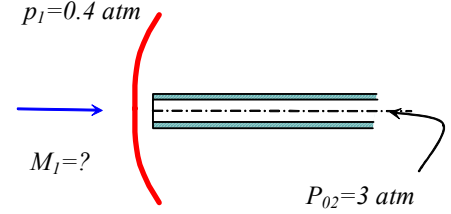
Süpersonik akımda statik basıncın 0.4 atm olduğu bir noktaya konan Pitot tüpünden ölçülen basınç 3 atm dir. Bu noktadaki Mach sayısını bulunuz. Şoku geçen akımın antropisindeki artışı hesaplayınız.

Cözüm

Pitot-tüpünün önünde bir normal şok oluşur.

Normal şok için
$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1}$$

Şok için basınçların oranı
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{7}{6}(M_1^2 - 1)$$



Şokun arkasındaki izantropik akımda

$$\frac{p_{02}}{p_2} = (1 + 0.2M_2^2)^{3.5}$$

Şokun arkasında ve önündeki Mach sayıları için

$$M_2^2 = \frac{1 + 0.2M_1^2}{1.4M_1^2 - 0.2}$$

Böylece

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left(1 + 0.2 \frac{1 + 0.2M_1^2}{1.4M_1^2 - 0.2}\right)^{3.5} = \left(\frac{1.8M_1^2}{1.4M_1^2 - 0.2}\right)^{3.5}$$

Veya

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \left(\frac{1.88M_1^2}{1.4M_1^2 - 0.2}\right)^{3.5} \left[1 + \frac{7}{6}(M_1^2 - 1)\right]$$

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{3}{0.4} = 7.5$$

için bu denklemden [iterasyonla](#)

$$M_1 = 2.34$$

Normal şok için toplam basınçlar oranı

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}}$$

$\gamma=1.4$, $M_1=2.34$ için

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left[1 + 0.2(2.34)^2\right]^{3.5} = 13.312$$

Böylece

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{7.5}{13.312} = 0.563$$

Antropi artışı

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}} = -287 \times \ln(0.563)$$

$$s_2 - s_1 = 164.87 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$$

3.7-Hugoniot Bağıntısı

Momentum denklemi		$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$
Sürekliyet denkleminde	$\boxed{u_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot u_1}$	$\Rightarrow \rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \cdot u_1^2$
u_1 çekilerek		$u_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$
Benzeri işlemlerle u_2 için		$u_2^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$
Enerji denklemi		$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$
Hızlar yerine yukarıdaki bağıntılar konularak		$h_1 + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = h_2 + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$
Antalpi tanımından	$\boxed{h = e + \frac{p}{\rho}}$	$\Rightarrow e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$
Düzenlenerek		$e_2 - e_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$
Özgül hacim tanımıyla	$\boxed{\rho = \frac{1}{v}}$	$\Rightarrow \boxed{e_2 - e_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2)} \quad \text{Hugoniot bağıntısı}$

NOT:

Hugoniot bağıntısı sadece *termodinamik büyüklükleri* birbirine bağlamaktadır.

Bu bağıntı çıkartılırken gazın tipiyle ilgili bir şart koşulmamıştır. Bu nedenle genel bir bağıntı olarak, hem *mükemmel gazlar*, hem *kimyasal reaksiyona maruz gazlar* ve hem de *reel gazlar* için geçerlidir.

Hugoniot bağıntısı

$$\Delta e = -p_{ort} \Delta v$$

$$\Delta e = e_2 - e_1, \quad p_{ort} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \Delta v = v_2 - v_1$$

şeklinde de yazılabilir. Buna göre:

Dik şoku geçen akımın iç enerjisindeki değişim, ortalama basınç ile özgül hacim değişiminin çarpımına eşittir.

Bu sonuç $\delta q = 0$ için Termodinamiğin 1. Kanunu'nu anımsatmaktadır.

Öte yandan, herhangi bir gaz için $e = e(p, v)$ olduğu bilinir. Bu bilgi yukarıdaki bağıntı ile birlikte değerlendirildiğinde

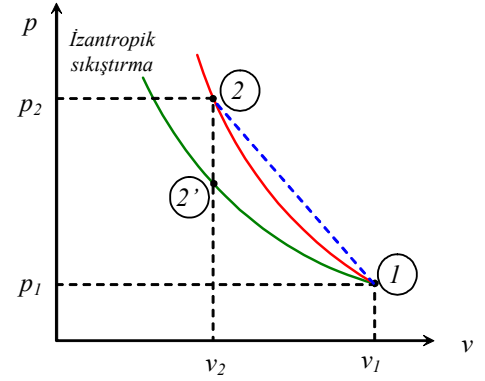
$$p_2 = f(p_1, v_1, v_2)$$

olduğu görülür. Buna göre normal şokun önündeki basınç ve özgül hacim verildiğinde şokun arkasındaki basınç şokun arkasındaki özgül hacmin bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu ilişki bir $p-v$ diyagramında gösterilerek *Hugoniot eğrisi* elde edilir.

Hugoniot eğrisi, verilmiş (p_1, v_1) şartlarında, normal şokun şiddetine bağlı olarak olası bütün (p_2, v_2) şartlarını gösterir. Yani Hugoniot eğrisi üzerindeki her bir nokta farklı bir u_1 hızındaki farklı bir normal şoku belirtir.

Momentum ve süreklilik denklemlerinden yukarıda hız için bulunan

$$u_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



ifadesinde özgül hacim tanımı

$$\rho = \frac{1}{v}$$

kullanılarak

$$p_2 - p_1 = -\left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 (v_2 - v_1)$$

Verilmiş bir (u_1, v_1) hali için Hugoniot eğrisi üzerinde 1 noktası bilinir. Ayrıca (u_1/v_1) oranı da hesaplanabilir. Bu oran aslında yukarıda en son olarak elde edilen doğru denklemindeki çarpanı, yani doğrunun eğimini tanımlamaktadır. Bu durumda 1 noktasından $-(u_1/v_1)^2$ eğimiyle çizilen doğrunun Hugoniot eğrisini kestiği 2 noktası (u_1, v_1, p_1) şartlarında oluşmuş bulunan şokun gerisindeki (p_2, v_2) şartlarını vermektedir.

Normal şokun akışkanı sıkıştıran etkin bir mekanizma olduğu söylenebilir. İzantropik procese kıyasla daha fazla sıkıştırma sağlar. Ancak entropi artışına yol açması nedeniyle daha verimsizdir.

Hugoniot bağıntısı

$$e_2 - e_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2)$$

Kalorik mükemmel gaz için

$$e = C_v T$$

Hal denkleminde $pv = RT \rightarrow T = \frac{pv}{R} \rightarrow e = C_v \frac{pv}{R} = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{pv}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} pv$

Hugoniot bağıntısında kullanılarak

$$\frac{1}{\gamma - 1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2)$$

Basınç oranı için düzenlenerek

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_1 - 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v_2 - 1}$$

3.8- Bir-Boyutlu Isı İlaveli Akımlar

3.8.1- Bir-boyutlu ısı ilaveli akım nedir?

Bir boyutlu akım şartları bir normal-şok nedeniyle değişebildiği gibi, kontrol hacmine çevreden ısı ilavesi (veya kontrol hacminden çevreye ısı çekilmesi) yoluyla da değişebilir. Değişikliğe sürtünme de neden olabilir.

Örnekler:

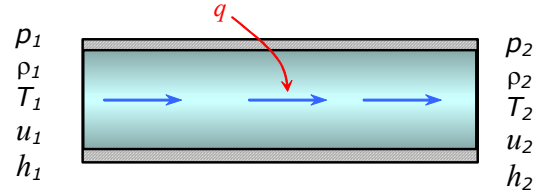
- Çok uzun borular içinde gaz taşınması hali (sürtünmeli akım)
- Yanma odasında yakıt-hava karışımının yanmasıyla ısı ilavesi
- Rüzgar tüneline akımın yoğun lazer uygulamasıyla ısınması

3.8.2- Bir-boyutlu ısı ilaveli akım denklemleri

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$q + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$



Giriş şartları verildiğinde çıkıştaki büyüklükler genellikle nümerik olarak hesaplanabilir.

[Ancak](#)

Kalorik mükemmel gazlar için analitik çözüm bulmak mümkündür.

3.8.3- Kalorik mükemmel gazlar için giriş-çıkış büyüklüklerinin ilişkileri

Enerji denklemi		$q + h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$
Durma noktası değerleriyle	$h + \frac{u^2}{2} = h_0$	$\Rightarrow q + h_{01} = h_{02}$
<i>Kalorik mükemmel gaz</i> için	$h = C_p \cdot T$	$\Rightarrow q + C_p T_{01} = C_p T_{02}$
		$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{C_p}$

Isı ilavesinin direkt sonucu \Rightarrow **Toplam sıcaklık artışı**

Momentum denklemi		$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$
Hal denkleminde	$\rho = \frac{p}{RT}$	$\Rightarrow \rho u^2 = \frac{p}{RT} u^2$
		\Downarrow
Ses hızı tanımından	$\frac{l}{RT} = \frac{\gamma}{a^2}$	$\Rightarrow \rho u^2 = \gamma p \frac{u^2}{a^2}$
		\Downarrow
Mach sayısı tanımından	$\frac{u}{a} = M$	$\Rightarrow \rho u^2 = \gamma p M^2$
		$\Rightarrow \Downarrow$
		$p_2 - p_1 = \gamma p_1 M_1^2 - \gamma p_2 M_2^2$
Düzenlenerek		$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$

Hal denkleminde	$T = \frac{p}{\rho R}$	\Rightarrow	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$
Süreklilik denkleminde	$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1}$	\Rightarrow	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{u_2}{u_1}$
Mach sayısı tanımından	$u = Ma$	\Rightarrow	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1}$
Ses hızı tanımından	$a^2 = \gamma RT$	\Rightarrow	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{M_2}{M_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}$
Düzenlenerek			$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$
Basınçlar oranı	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$	olup \Rightarrow	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$

Hal denkleminde	$\rho = \frac{p}{RT}$	\Rightarrow	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}$
Sıcaklıklar oranı	$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$		
Basınçlar oranı	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$	olup \Rightarrow	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \cdot \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$

Durma büyüklükleri için

Durma basınçlarının oranı		$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{01}}$
İzantropik akımlar için	$\frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$	
Basınçlar oranı	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$	
olup, böylece		$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$
Durma sıcaklıklarının oranı		$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1}{T_{01}}$
İzantropik akımlar için	$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$	
Sıcaklıklar oranı	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$	
olup, böylece		$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \cdot \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$

Antropi değişimi

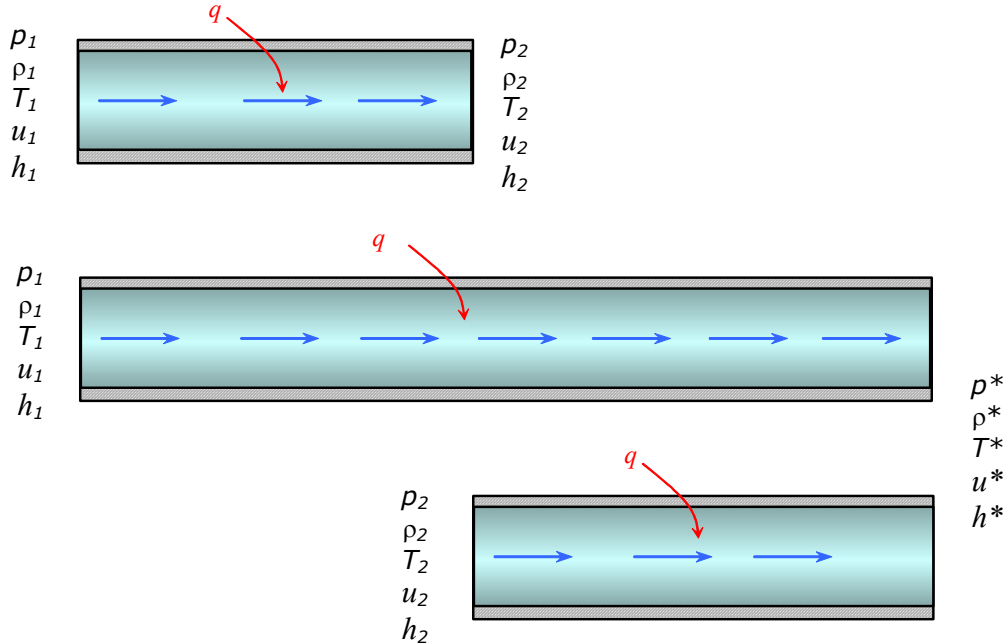
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Referans olarak sonik akım şartları alınırsa ısı ilaveli akım probleminin çözümü kolaylaşır.

$$\begin{array}{l}
 M_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = p^* \\ T_1 = T^* \\ \rho_1 = \rho^* \\ p_{01} = p_{0}^* \\ T_{o1} = T_{o}^* \end{cases} \\
 \\
 M_2 = M \Rightarrow \begin{cases} p_2 = p \\ T_2 = T \\ \rho_2 = \rho \\ p_{02} = p_0 \\ T_{o2} = T_o \end{cases}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \left. \begin{array}{l}
 \frac{p}{p^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \\
 \frac{T}{T^*} = \left(\frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \right)^2 M^2 \\
 \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+\gamma M^2}{1+\gamma} \cdot \frac{1}{M^2} \\
 \frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \cdot \left[\frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
 \frac{T_o}{T_o^*} = \frac{(1+\gamma)M^2}{(1+\gamma M^2)^2} \cdot [2+(\gamma-1)M^2]
 \end{array} \right\}$$

Bu durumda hesaplar için standart tablolar kullanmak mümkün olur. 1 şartlarından 2 şartlarına kadar ısıtılan akımın incelenmesi için, 1 şartlarından $M=1$ şartlarına ve 2 şartlarından $M=1$ şartlarına kadar ısıtılan iki farklı akım hayal edilir. İncelenmek istenen asıl akım problemi bu iki akım arasındaki farka özdeş olacaktır.



Örnek Problem

Sabit kesitli bir kanala $M_1=0.2$, $p_1=1$ atm ve $T_1=273^\circ\text{K}$ şartlarında giren hava akımına birim kütle başına $q=1 \times 10^6$ J/kg ısı ilave edilmektedir. Kanal çıkışındaki akım özelliklerini hesaplayınız (NOT: Hava için $\gamma=1.4$, $R=287$ J/kg $^\circ\text{K}$, $C_p=1005$ J/kg $^\circ\text{K}$ alınabilir).

Cözüm

$M_1=0.2$ için *izantropik akım tablolarından*

$$\frac{T_{o1}}{T_1} = 1.008, \quad \frac{p_{o1}}{p_1} = 1.028$$

$T_1=273^\circ\text{K}$ için

$$T_{o1} = 1.008 \times 273 \rightarrow T_{o1} = 275.2^\circ\text{K}$$

$p_1=1$ atm için

$$p_{o1} = 1.028 \times 1 \rightarrow p_{o1} = 1.028 \text{ atm}$$

Enerji denkleminde

$$T_{o2} = T_{o1} + \frac{q}{C_p}$$

$q=1 \times 10^6$ J/kg için

$$T_{o2} = 275.2 + \frac{1 \times 10^6}{1005} \rightarrow T_{o2} = 1270^\circ\text{K}$$

$M_1=0.2$ için sonik şartlara oranla

$$\frac{p_1}{p^*} = 2.273, \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.2066, \quad \frac{p_{o1}}{p_o^*} = 1.235, \quad \frac{T_{o1}}{T_o^*} = 0.1736$$

Toplam sıcaklığın sonik şartlara oranı

$$\frac{T_{o2}}{T_o^*} = \frac{T_{o2}}{T_{o1}} \cdot \frac{T_{o1}}{T_o^*} = \frac{1270}{275.2} \times 0.1736 \rightarrow \frac{T_{o2}}{T_o^*} = 0.8013$$

$T_{o2}/T_o^* = 0.8013$ için çıkış Mach sayısı

$$M_2 = 0.58$$

$M_2=0.58$ için sonik şartlara oranla

$$\frac{p_2}{p^*} = 1.632, \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.896, \quad \frac{p_{o2}}{p_o^*} = 1.083$$

Buna göre çıkış büyüklükleri

$$p_2 = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} \cdot p_1 = \frac{1.632}{2.273} \times 1 \rightarrow p_2 = 0.718 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} \cdot T_1 = \frac{0.896}{0.2066} \times 273 \rightarrow T_2 = 1183^\circ\text{K}$$

$$p_{o2} = \frac{p_{o2}/p_o^*}{p_{o1}/p_o^*} \cdot p_{o1} = \frac{1.083}{1.235} \times 1.028 \rightarrow p_{o2} = 0.902 \text{ atm}$$

Hal denkleminde yoğunluk

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1 \times 101396}{287 \times 273} \rightarrow \rho_1 = 1.294 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{0.718 \times 101396}{287 \times 1183} \rightarrow \rho_2 = 0.214 \text{ kg/m}^3$$

Örnek Problem

Sabit kesitli bir kanala $M_1=3$, $p_1=1$ atm ve $T_1=300^\circ\text{K}$ şartlarında giren hava akımına birim kütle başına $q=3 \times 10^5$ J/kg ısı ilave edilmektedir. Kanal çıkışındaki akım özelliklerini hesaplayınız (NOT: Hava için $\gamma=1.4$, $R=287$ J/kg $^\circ\text{K}$, $C_p=1005$ J/kg $^\circ\text{K}$ alınabilir).

Cözüm

$M_1=3$ için *izantropik akım tablolarından*

$$\frac{T_{o1}}{T_1} = 2.8, \quad \frac{p_{o1}}{p_1} = 36.73$$

$T_1=300^\circ\text{K}$ için

$$T_{o1} = 2.8 \times 300 \rightarrow T_{o1} = 840^\circ\text{K}$$

$p_1=1$ atm için

$$p_{o1} = 36.73 \times 1 \rightarrow p_{o1} = 36.73 \text{ atm}$$

Enerji denkleminde

$$T_{o2} = T_{o1} + \frac{q}{C_p}$$

$q=3 \times 10^5$ J/kg için

$$T_{o2} = 840 + \frac{3 \times 10^5}{1005} \rightarrow T_{o2} = 1139^\circ\text{K}$$

$M_1=3$ için sonik şartlara oranlar

$$\frac{p_1}{p^*} = 0.1765, \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.2803, \quad \frac{p_{o1}}{p_o^*} = 3.424, \quad \frac{T_{o1}}{T_o^*} = 0.654$$

Toplam sıcaklığın sonik şartlara oranı

$$\frac{T_{o2}}{T_o^*} = \frac{T_{o2}}{T_{o1}} \cdot \frac{T_{o1}}{T_o^*} = \frac{1139}{840} \times 0.654 \rightarrow \frac{T_{o2}}{T_o^*} = 0.8868$$

$T_{o2}/T_o^* = 0.8868$ için çıkış Mach sayısı

$$M_2 = 1.58$$

$M_2=1.58$ için sonik şartlara oranlar

$$\frac{p_2}{p^*} = 0.5339, \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.7117, \quad \frac{p_{o2}}{p_o^*} = 1.164$$

Buna göre çıkış büyüklükleri

$$p_2 = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} \cdot p_1 = \frac{0.5339}{0.1765} \times 1 \rightarrow p_2 = 3.025 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} \cdot T_1 = \frac{0.71176}{0.2803} \times 300 \rightarrow T_2 = 761.7^\circ\text{K}$$

$$p_{o2} = \frac{p_{o2}/p_o^*}{p_{o1}/p_o^*} \cdot p_{o1} = \frac{1.164}{3.424} \times 36.73 \rightarrow p_{o2} = 12.49 \text{ atm}$$

Hal denkleminde yoğunluk

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1 \times 101396}{287 \times 300} \rightarrow \rho_1 = 1.178 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{3.025 \times 101396}{287 \times 761.7} \rightarrow \rho_2 = 1.398 \text{ kg/m}^3$$

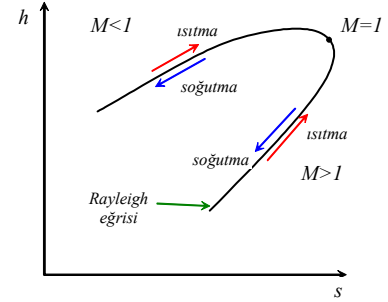
Önemli sonuç

Yukarıdaki iki örnek de göstermektedir ki, ısı ilaveli akımlar sesaltı ve sesüstü şartlarda farklı gelişim göstermektedir.

$M < 1$ için	$M > 1$ için
$M_2 > M_1$	$M_2 < M_1$
$p_2 < p_1$	$p_2 > p_1$
$M_1 < \gamma^{-1/2}$ için $T_2 > T_1$	$T_2 > T_1$
$M_1 > \gamma^{-1/2}$ için $T_2 < T_1$	$T_{02} > T_{01}$
$T_{02} > T_{01}$	$p_{02} < p_{01}$
$p_{02} < p_{01}$	$u_2 < u_1$
$u_2 > u_1$	

3.8.4- Isı ilaveli akımlar için Rayleigh eğrisi

Bir boyutlu akım sesaltı ve sesüstü hızlarda farklı miktarlarda ısıtarak, elde edilen akım şartlarındaki antropiler ve bu ısıtmalar sonucu meydana gelen entropi artışları bir $h-s$ diyagramında gösterilebilir. Bu suretle şekilde görüldüğü gibi elde edilen diyagramlara **Rayleigh eğrisi** adı verilir.



Bu diyagrama göre:

<u>$M > 1$ halinde</u>	<u>$M < 1$ halinde</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Süpersonik akım ısıtıldıkça yavaşlar. Ne kadar çok ısı verirse yavaşlama o kadar çok olur. - Ancak, ısıtmanın belli bir sınır değerinde akım sonik şartlara erişir. Bu şartlarda akım boğulmuştur (choked) denilir. - Daha fazla ısı ilavesi halinde akımın ön bölgesinde bir normal şok oluşur. Ve akım bu şok etkisiyle sesaltı rejime iner. 	<ul style="list-style-type: none"> - Sesaltı akım ısıtıldıkça hızlanır. Ne kadar çok ısı verirse hız o kadar artar. - Ancak, ısıtmanın belli bir sınır değerinde akım sonik şartlara erişir. Bu şartlarda akım boğulmuştur (choked) denilir. - Daha fazla ısı ilavesi halinde akımın ön bölgesindeki şartlar değişir. Bir seri basınç dalgası oluşarak akım önüne doğru ilerler ve bu bölgedeki Mach sayısı (giriş Mach sayısı) azalır.

Sesaltı akımı ısıtarak sonik şartlara erişirdikten sonra soğutarak süpersonik şartlara çıkartmak veya tersini yapmak teorik olarak mümkündür.

Isı ilavesi halinde toplam basınçta daima bir azalma olur.

Örnek Problem

Sabit kesitli bir kanalda Mach sayısının 3 ve durma sıcaklığının 840°K olduğu hava akımının ısıtma yoluyla boğulması için ne kadar ısı ilavesi gereklidir, hesaplayınız.

Çözüm

$M_1=3$ için bir-boyutlu ısı ilaveli akım denklemlerinden

$$\frac{T_{o1}}{T_o^*} = 0.654$$

$T_{o1}=840^\circ\text{K}$ için

$$T_o^* = \frac{840}{0.654} \rightarrow T_o^* = 1284^\circ\text{K}$$

$M_1=1$ olması için

$$T_{o2} = T_o^* = 1284^\circ\text{K}$$

olmalıdır.

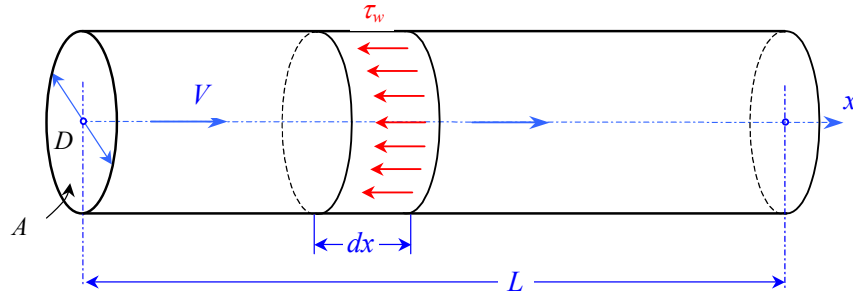
Buna göre

$$q = C_p (T_{o2} - T_{o1}) = 1004.5 \times (1284 - 840) \rightarrow q = 4.46 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

3.9-Bir-Boyutlu Sürtünmeli Akımlar

3.9.1- Bir-boyutlu sürtünmeli akım

Çok uzun borular içinde gaz taşınması ve benzeri durumlarda gazın boru cidarı ile sürtünmesi önem kazanır. Bu bölümde daimi bir-boyutlu şoksuz ve ısı ilavesiz sürtünmeli akımlar için matematik model ve çözüm tekniği sunulacaktır.



3.9.2- Bir-boyutlu sürtünmeli akım denklemleri

Bünyesel kuvvetlerin önemli olmadığı daimi akım için momentum denklemi

$$\iint_S (\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS) \cdot \vec{V} = -\iint_S p \cdot \vec{n} \, dS + \iint_S \vec{\tau}_w \, dS$$

Yukarıda belirtilen şartlarda bir boyutlu sürtünmeli akım için uygulanarak

$$\rho_2 u_2^2 A - \rho_1 u_1^2 A = -p_2 A + p_1 A - \int_0^L \tau_w \cdot \pi D \, dx$$

Kesit alanı $A = \frac{\pi D^2}{4}$ olmak üzere düzenlenerek

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w \, dx = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

Böylece, [bir-boyutlu sürtünmeli akım denklemleri](#)

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w \, dx = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

3.9.3- Boru uzunluğu ile Mach sayılarının ilişkisi

Momentum denklemini düzenlenerek

$$(p_2 - p_1) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx$$

veya, diferansiyel formda

$$dp + d(\rho u^2) = -\frac{4}{D} \tau_w dx$$

Süreklilik denkleminde

$$\boxed{\rho u = Sb} \rightarrow \boxed{d(\rho u^2) = d(\rho u \cdot u) = \rho u \cdot du}$$

↓

Sürtünme katsayısı tanımı kullanılarak

$$\boxed{\tau_w = \frac{1}{2} \rho u^2 f}$$

→ ↓

$$\boxed{dp + \rho u du = -\frac{1}{2} \rho u^2 \cdot \frac{4f}{D} dx}$$

Euler denklemini andıran bu bağıntıya göre sürtünme kuvveti x boyunca akım şartlarının değişimini etkilemektedir.

Son bağıntıda her iki taraf $\boxed{\rho u^2}$ ile bölünerek

$$\frac{dp}{\rho u^2} + \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4f}{D} dx$$

Dinamik basınç için

$$\boxed{\rho u^2 = \gamma p M^2}$$

olup

$$\boxed{\frac{1}{\gamma M^2} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4f}{D} dx}$$

Bu son bağıntı akımın üç büyüklüğünü (M , p ve u) akım boyunca alınan x yoluna bağlamaktadır. Bu ilişkinin yorumlanabilmesi için bağımlı değişken sayısının bire indirilmesi gerekir, ki bunun için en uygun değişken Mach sayısıdır.

Basıncı yok etmek için:

Süreklilik denkleminde

$$\boxed{\rho u = Sb} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0}$$

↓

↓

Hal denkleminde

$$\boxed{p = \rho RT} \rightarrow$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u} + \frac{dT}{T}$$

⇒

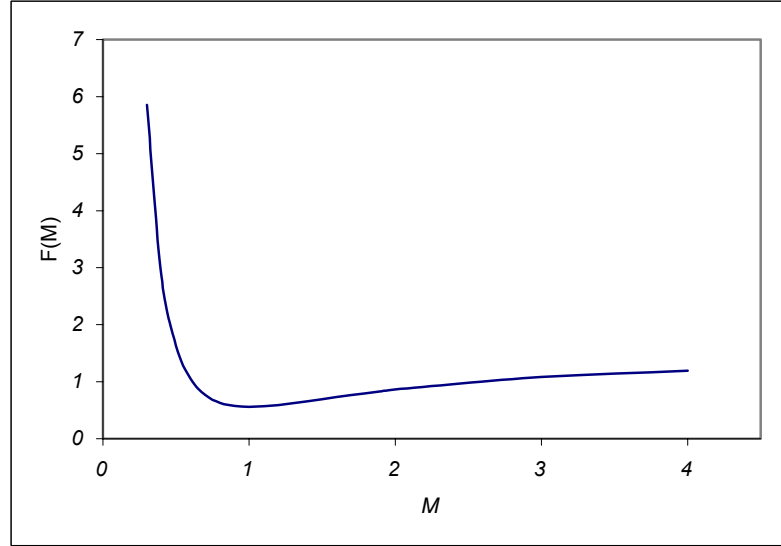
↓

$$\boxed{\left(1 - \frac{1}{\gamma M^2}\right) \cdot \frac{du}{u} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{dT}{T} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4f}{D} dx}$$

$$\frac{4\bar{f}}{D}(x_2 - x_1) = F(M_1) - F(M_2)$$

$$F(M) = \frac{1}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $F(M)$ fonksiyonunun değişimi şekildeki grafikte görülmektedir. Fonksiyonun en küçük değeri $M=1$ için $F(M)=0.5580$ olarak elde edilmektedir.



Bir-boyutlu sürtülmeli akım boyunca $x_2 > x_1$ olduğu kabul edilirse yukarıdaki eşitliğe göre daima $F(M_1) > F(M_2)$ olması gerekecektir. Bu durumda grafiğe göre:

Sesaltı akımlar için $M_2 > M_1$ akım hızlanacaktır.

Sesüstü akımlar için $M_2 < M_1$ akım yavaşlayacaktır.

3.9.4- Mach sayıları bilindiğinde giriş-çıkış büyüklüklerinin ilişkileri

Enerji denklemi (adyabatik halde)

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Durma şartları cinsinden

$$h_{01} = h_{02}$$

Kalorik mükemmel gaz için

$$h = C_p \cdot T \Rightarrow$$

$$C_p T_{01} = C_p T_{02}$$

$$T_{01} = T_{02} = T_0$$

Adyabatik halde (çevreyle ısı alışverişi yoksa) sürtülmeli akımda **Toplam sıcaklık değişmez**

Sıcaklıklar oranı	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2}$	\rightarrow	$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}$
Hal denkleminde	$p = \rho RT$	\rightarrow	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 RT_2}{\rho_1 RT_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{T_2}{T_1}$
Süreklilikten	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 a_1}{M_2 a_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2}$	\Rightarrow	$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$
Böylece basınçlar oranı			$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2}$
Hal denkleminde	$\rho = \frac{p}{RT}$	\rightarrow	$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}$
Basınç ve sıcaklık oranları kullanılarak			$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{1/2}$
Durma basınçlarının oranı			$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}/p_2}{p_{o1}/p_1} \cdot \frac{p_2}{p_1}$
Basınç oranları ve izotropik akım bağıntıları ile			$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

Referans olarak sonik akım şartları seçildiği takdirde bu oranlar

$$\begin{array}{l}
 M_1 = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = p^* \\ T_1 = T^* \\ \rho_1 = \rho^* \\ p_{o1} = p_{o}^* \end{array} \right\} \\
 \\
 M_2 = M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_2 = p \\ T_2 = T \\ \rho_2 = \rho \\ p_{o2} = p_o \end{array} \right\}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2} \\ \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \\ \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2} \\ \frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1}{M} \cdot \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{array} \right\}$$

şeklini alır. Böylece herhangi bir Mach sayısındaki büyüklüklerden sonik şartlardaki büyüklüklere geçmek, veya tersini yapmak mümkün olur. Bu yaklaşım standart tablolar yardımıyla problemin çözümünü kolaylaştırır.

Örneğin sesaltı akım halinde M_1 Mach sayısı ile bir boruya giren akımın sürtünme nedeniyle hangi mesafede sonik şartlara erişeceği, $x_1 = 0$ ve $x_2 = L_1^*$ denilerek

$$\frac{4\bar{f}}{D}L_1^* = F(M_1) - 0.5580$$

şeklinde hesaplanabilir. Gaz L boyundaki boruda hızlanarak daha yüksek bir M_2 Mach sayısı ile çıkacaktır. M_2 Mach sayısındaki akımın sonik şartlara erişeceği mesafe de, $x_1 = 0$ ve $x_2 = L_2^*$ denilerek benzeri şekilde hesaplanabilir

$$\frac{4\bar{f}}{D}L_2^* = F(M_2) - 0.5580$$

Bu iki bağıntı birbirinden çıkartılırsa

$$\frac{4\bar{f}}{D}(L_1^* - L_2^*) = F(M_1) - F(M_2)$$

bulunur. Görüldüğü gibi boru boyu için

$$x_2 - x_1 = L = L_1^* - L_2^*$$

yazmak mümkündür.

Yüzey sürtünme katsayısı f genellikle

- Akımın laminar veya türbülanslı oluşuna
- Mach sayısına
- Reynolds sayısına
- Yüzey pürüzlülüğüne

bağlıdır. Bu ilişki ampirik formüller şeklinde belirtilir. Yaklaşık ortalama bir değer $Re > 10^5$ (Türbülanslı akım) ve yüzey pürüzlülüğü $0.001 \cdot D$ olmak üzere

$$f = 0.005$$

alınabilir.

Örnek Problem

İç çapı 0.15 m olan 30 m boyundaki bir borunun girişindeki akım şartları $M_1 = 0.3$, $p_1 = 1 \text{ atm}$ ve $T_1 = 273^\circ\text{K}$ şeklindedir. Sürtünme katsayısını $f = S_b = 0.005$ alarak boru çıkışındaki akım özelliklerini hesaplayınız.

Cözüm

$M_1=0.3$ için *izantropik akım tablolarından*

$$\frac{p_{o1}}{p_1} = 1.064$$

$p_1=1 \text{ atm}$ için

$$p_{o1} = 1.064 \times 1 \rightarrow p_{o1} = 1.064 \text{ atm}$$

$M_1=0.3$ için sürtülmeli akım fonksiyonundan

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_1^* = 5.2999$$

$$L = L_1^* - L_2^* \rightarrow L_2^* = L_1^* - L \rightarrow$$

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = \frac{4\bar{f}}{D} L_1^* - \frac{4\bar{f}}{D} L$$

$D = 0.15 \text{ m}$, $L = 30 \text{ m}$, $f = 0.005$ için

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = 5.2999 - \frac{4 \times 0.005}{0.15} \times 30 = 1.2993$$

$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = 1.2993$ için sürtülmeli akım fonksiyonundan

$$M_2 = 0.475$$

$M_1=0.3$ için sürtülmeli akım bağıntılarından

$$\frac{p_1}{p^*} = 3.619, \quad \frac{T_1}{T^*} = 1.179, \quad \frac{p_{o1}}{p_o^*} = 2.035$$

$M_2=0.475$ için sürtülmeli akım bağıntılarından

$$\frac{p_2}{p^*} = 2.258, \quad \frac{T_2}{T^*} = 1.148, \quad \frac{p_{o2}}{p_o^*} = 1.392$$

Buna göre çıkış büyüklükleri

$$p_2 = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} \cdot p_1 = \frac{2.258}{3.619} \times 1 \rightarrow p_2 = 0.624 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} \cdot T_1 = \frac{1.148}{1.179} \times 273 \rightarrow T_2 = 265.8^\circ\text{K}$$

$$p_{o2} = \frac{p_{o2}/p_o^*}{p_{o1}/p_o^*} \cdot p_{o1} = \frac{1.392}{2.035} \times 1.064 \rightarrow p_{o2} = 0.728 \text{ atm}$$

Örnek Problem

İç çapı 0.12 m olan 1.5 m boyundaki bir borunun girişindeki akım şartları $M_1 = 3$, $p_1 = 1 \text{ atm}$ ve $T_1 = 300^\circ\text{K}$ şeklindedir. Sürtünme katsayısını $f = S_b = 0.005$ olarak boru çıkışındaki akım özelliklerini hesaplayınız.

Cözüm

$M_1=3$ için *izantropik akım tablolarından*

$$\frac{p_{o1}}{p_1} = 36.73$$

$p_1=1 \text{ atm}$ için

$$p_{o1} = 36.73 \times 1 \rightarrow p_{o1} = 36.73 \text{ atm}$$

$M_1=3$ için sürtülmeli akım fonksiyonundan

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_1^* = 0.5222$$

$$L = L_1^* - L_2^* \rightarrow L_2^* = L_1^* - L \rightarrow$$

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = \frac{4\bar{f}}{D} L_1^* - \frac{4\bar{f}}{D} L$$

$D = 0.12 \text{ m}$, $L = 1.5 \text{ m}$, $\bar{f} = 0.005$ için

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = 0.5222 - \frac{4 \times 0.005}{0.12} \times 1.5 = 0.2722$$

$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = 0.2722$ için sürtülmeli akım fonksiyonundan

$$M_2 = 1.893$$

$M_1=3$ için sürtülmeli akım bağıntılarından

$$\frac{p_1}{p^*} = 0.218, \quad \frac{T_1}{T^*} = 0.429, \quad \frac{p_{o1}}{p_o^*} = 4.235$$

$M_2=1.893$ için sürtülmeli akım bağıntılarından

$$\frac{p_2}{p^*} = 0.442, \quad \frac{T_2}{T^*} = 0.699, \quad \frac{p_{o2}}{p_o^*} = 1.555$$

Buna göre çıkış büyüklükleri

$$p_2 = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} \cdot p_1 = \frac{0.442}{0.218} \times 1 \rightarrow p_2 = 2.014 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} \cdot T_1 = \frac{0.699}{0.429} \times 300 \rightarrow T_2 = 487^\circ\text{K}$$

$$p_{o2} = \frac{p_{o2}/p_o^*}{p_{o1}/p_o^*} \cdot p_{o1} = \frac{1.555}{4.235} \times 36.73 \rightarrow p_{o2} = 13.5 \text{ atm}$$

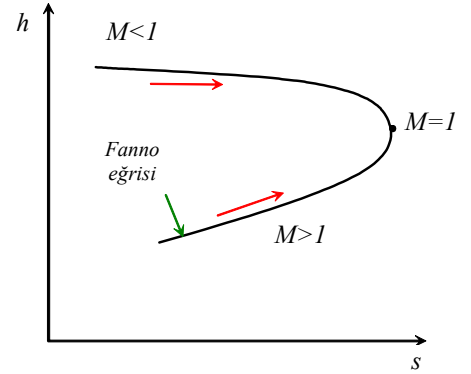
Önemli sonuç

Yukarıdaki iki örnek de göstermektedir ki, sürtülmeli akımlar sesaltı ve sesüstü şartlarda farklı gelişim göstermektedir.

$M < 1$ için	$M > 1$ için
$M_2 > M_1$	$M_2 < M_1$
$p_2 < p_1$	$p_2 > p_1$
$T_2 < T_1$	$T_2 > T_1$
$p_{02} < p_{01}$	$p_{02} < p_{01}$
$u_2 > u_1$	$u_2 < u_1$

3.9.5- Sürtülmeli akımlar için Fanno eğrisi

Bir boyutlu akım sesaltı ve sesüstü hızlarda farklı uzunluklardaki borularda akıtılarak (farklı sürtülmelere maruz bırakılarak), elde edilen akım şartlarındaki antropiler ve bu sürtülmeler sonucu meydana gelen entropi artışları bir $h-s$ diyagramında gösterilebilir. Bu suretle şekilde görüldüğü gibi elde edilen diyagramlara *Fanno eğrisi* adı verilir.



Bu diyagrama göre:

<u>M>1 halinde</u>	<u>M<1 halinde</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Borunun boyu arttıkça Mach sayısı azalır. - Ancak, boru boyunun belli bir sınır değerinde akım sonik şartlara erişir. Bu şartlarda <u>akım boğulmuştur</u> (choked) denilir. - Borunun daha fazla uzatılması halinde akımın ön bölgesinde bir normal şok oluşur. Ve akım bu şok etkisiyle sesaltı rejime iner. 	<ul style="list-style-type: none"> - Borunun boyu arttıkça Mach sayısı artar. - Ancak, boru boyunun belli bir sınır değerinde akım sonik şartlara erişir. Bu şartlarda <u>akım boğulmuştur</u> (choked) denilir. - Giriş şartları değiştirilmedikçe boru boyu daha fazla arttırılamaz.

Her iki halde de toplam basınçta daima bir azalma olur.

Örnek Problem

İç çapı 0.12 m, giriş şartları $M_1 = 3$, $p_1 = 1 \text{ atm}$ ve $T_1 = 300^\circ\text{K}$ olan bir borunun içindeki hava akımının boğulması için gerekli boru boyunu hesaplayınız. (Not: Sürtünme katsayısını $f = S_b = 0.005$ alınız)

Çözüm

$M_1=3$ için sürtülmeli akım fonksiyonundan

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_1^* = 0.5222$$

Boğulma halinde $M_2=1$ olup sürtülmeli akım fonksiyonundan

$$\frac{4\bar{f}}{D} L_2^* = 0$$

$$L = L_1^* - L_2^* = L_1^* = 0.5222 \cdot \frac{D}{4\bar{f}} = 0.5222 \times \frac{0.12}{4 \times 0.005} \rightarrow L = 3.13 \text{ m}$$

Örnek Sorular

Soru 1

a) Mach sayısının 1 olduğu noktada ses hızı a^* ile gösterilerek herhangi bir noktadaki akım hızının $M^*=u/a^*$ şeklinde tanımlanan oranı "karakteristik Mach sayısı" olarak adlandırılır. Buna göre enerji denklemini ses hızı cinsinden

$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2} u^2 = Sb$$

şeklinde yazarak, bu bağıntıdan hareketle herhangi bir noktadaki Mach sayısını bu noktadaki karakteristik Mach sayısına $M^2=f(M^{*2})$ formunda bağlayan ifadeyi elde ediniz.

b) Normal şokun önündeki ve arkasındaki akım hızları sırasıyla u_1 ve u_2 olmak üzere $u_1 \cdot u_2 = a^{*2}$ şeklinde verilen Prandtl bağıntısından hareketle normal şokun gerisindeki M_2 Mach sayısını önündeki M_1 Mach sayısına bağlayan ifadeyi elde ediniz.

Soru 2

Normal şok için bir kontrol hacmi seçiniz. Şokun önündeki akım büyüklüklerini 1 ve arkasındaki leri 2 indisiyle göstererek akımı yöneten 1-boyutlu denklemleri yazınız.

Şokun arkasındaki p_2 basıncı ile önündeki p_1 basıncının oranını şokun önündeki M_1 Mach sayısına bağlayan ifadeyi çıkartınız.

Soru 3

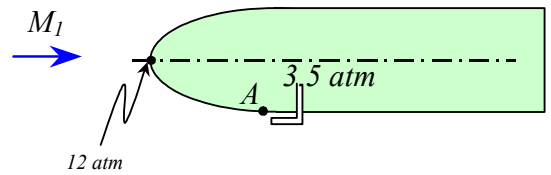
Deniz seviyesinde standart atmosfer şartlarında sabit seviyede süpersonik hızla simetrik bir uçuş yapmakta olan şekildeki roketin burun noktasında 12 atm ve alt yüzünde yer alan bir pitot tüpünden ise 3.5 atm basınç ölçülmüştür.

a) Roketin uçuş Mach sayısını hesaplayınız.

b) Pitot tüpü civarında pitot tüpünden etkilenmeyen A noktasında Mach sayısını hesaplayınız.

c) A noktasındaki basınç katsayısını hesaplayınız.

d) A noktasında sıcaklığı hesaplayınız.



Soru 4

Isı ilaveli, sürtünmesiz, bir-boyutlu akımlar için enerji denklemini yazınız.

Sabit kesitli bir boru içindeki hava akımı dışarıdan ısıtılmaktadır. Borunun girişindeki havanın sıcaklığı 288 K , Mach sayısı 0.4 dür. Boru içindeki havaya birim kütle başına ilave edilen ısı $q=2.5 \times 10^5 \text{ J/kg}$ olduğuna göre boru çıkışındaki Mach sayısını ve sıcaklığı hesaplayınız.

Not: Hava için $C_p=1005\text{ J/kg}^\circ\text{K}$ dir.

Soru 5

Sabit kesitli borunun girişindeki akımın Mach sayısı 0.3 durma sıcaklığı $300\text{ }^\circ\text{K}$ olduğuna göre boru içindeki akımın boğulması için ne kadar ısı ilavesi gerektiğini hesaplayınız. (NOT: Hava için sabit basınçta özgül ısı $1005\text{ J/kg}^\circ\text{K}$)

Soru 6

Daimi, bir-boyutlu, ısı ilaveli akım problemlerinin incelenmesi için gerekli denklemleri yazınız.

Sabit kesitli bir kanal girişinde durma sıcaklığı $800\text{ }^\circ\text{K}$ olup kanal boyunca hava akımına 500 kJ/kg ısı ilave edilerek kanal çıkışında hava akımı boğulmuştur. Giriş kesitindeki Mach sayısını hesaplayınız. (Hava için $C_p = 1005\text{ J/kg}^\circ\text{K}$ alınız)

Soru 7

Boru içindeki bir-boyutlu sesaltı akımın sürtünme etkisi ile hızlandığı bilinmektedir. Boru içinde bir noktada Mach sayısı M ile verildiğinde, bu noktadan itibaren Mach sayısının 1 'e erişmesi için boru boyunca kat edilecek mesafe L^* olmak üzere bu mesafeyi verilen M Mach sayısına

$$\frac{4\bar{f}L^*}{D} = f(M)$$

şeklinde bağlamak ve $f(M)$ fonksiyonunun değerini genellikle önceden hesaplanmış tablolardan bulmak mümkündür. Bu bağlamda D boru çapını, f ise ortalama sürtünme katsayısını temsil etmektedir.

Buna göre, iç çapı 0.2 m ve boyu 40 m olan bir boru içindeki hava akımı için ortalama sürtünme katsayısı 0.005 ve boru çıkışında $M_2=0.5$, $p_2=1\text{ atm}$, $T_2=270\text{ K}$ olarak verildiği takdirde boru girişindeki Mach sayısı, basınç ve sıcaklığın değerlerinin ne olacağını hesaplayınız.

Soru 8

İç çapı 20 cm olan bir borunun girişindeki hava akımının durma basıncı 1.1 atm , statik basıncı 1 atm ve sıcaklığı $285\text{ }^\circ\text{K}$, çıkışındaki Mach sayısı ise 0.6 dir. Boru içinde ortalama sürtünme katsayısı 0.005 olduğuna göre borunun boyunu, çıkıştaki durma basıncını, statik basıncı ve sıcaklığı hesaplayınız.

Soru 9

10 cm çapındaki dairesel kesitli borunun girişindeki akımın Mach sayısı 2 dir. Boru içerisindeki sürtünme katsayısı ortalama 0.005 olduğuna göre boru içindeki akımın boğulması için boru boyunun ne kadar olması gerektiğini hesaplayınız.

Soru 10

60 m boyunda 15 cm çaplı borudaki sesaltı akım sürtünme nedeniyle boru çıkışında boğulmuştur. Sürtünme katsayısı borunun ilk yarısında 0.005 , ikinci yarısında ise 0.004 dür. Borunun girişindeki Mach sayısını bulunuz. Boru girişinde basınç 1 atm ve sıcaklık 300 K olduğuna göre borunun ortasındaki basıncı ve sıcaklığı hesaplayınız.