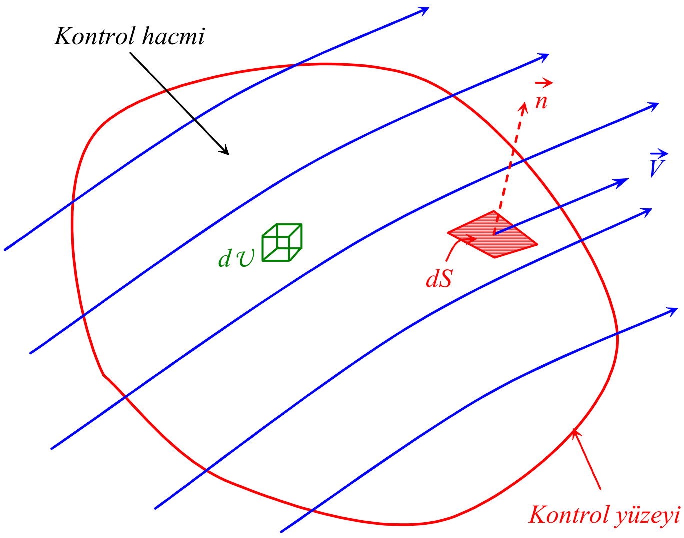
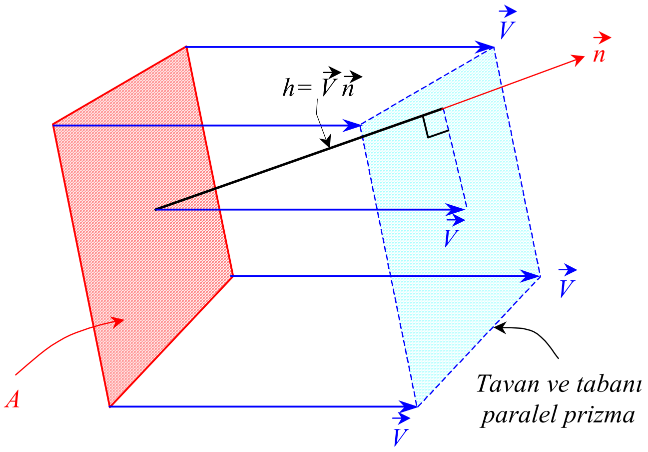
BÖLÜM 2

KORUNUM DENKLEMLERİ

2.1-Uzayda Sabit Konumlu, Sonlu Kontrol Hacmi



2.2- Debi



A	*Yüzey alanı*
$\vec{V}$	*Akışkanın birim zamanda aldığı yol – hız*
$\vec{n}$	*yüzey normali*
h	*Prizmanın yüksekliği*

hacimsel debi = Birim zamanda A yüzeyinden geçen akışkan hacmi = prizmanın hacmi

= Taban alanı × Yükseklik

$$\boxed{Q = A \cdot \left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right)}$$

Kütlesel debi = Hacımsal debi × yoğunluk

$$\boxed{\dot{m} = \rho \cdot \dot{Q} = \rho \cdot A \cdot \left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right)}$$

2.3- Hareketi Takiben Alınmış Türev

(x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde bir $A(x, y, z, t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Fonksiyonun tam diferansiyeli $$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz + \frac{\partial A}{\partial t}dt$$

Düzenlenerek $$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Hız tanımı $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, $\rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$

Böylece $$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} + v\frac{\partial A}{\partial y} + w\frac{\partial A}{\partial z}$$

Ayrıca gradyan tanımı gereği $$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

Böylece *hareketi takiben alınmış türev* $$\boxed{\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla A}$$

Bu ifadede ilk terim zamana göre değişimleri, ikinci terim ise konuma göre değişimleri ifade etmektedir. Sedece konuma göre alınmış türevlerden farklı olduğunun anlaşılması için de türev sembolü olarak küçük ***d*** harfi yerine büyük ***D*** harfi kullanılmaktadır.

2.4- Süreklilik Denklemi

Kütlenin korunumu prensibi : *Kütle yok edilemez / yoktan var edilemez*

⇩

$\mathcal{V}$ kontrol hacminin S yüzeyinden birim zamanda çıkan net kütle miktarı = *$\mathcal{V}$ kontrol hacmindeki kütle miktarının birim zamandaki değişimi*

⇩ ⇩

$$= \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\upsilon} \rho \cdot d\upsilon$$

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\upsilon} \rho \cdot d\upsilon$$

Sonuç olarak *süreklilik denkleminin integral formu*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\upsilon} \rho \cdot d\upsilon + \iint_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = 0}$$

2.5- Momentum Denklemi

Hareketin korunumu prensibi : *Dış kuvvetler toplamı atalet kuvvetine eşittir*

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Sabit kütle için

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)$$

Dış kuvvetler toplamı* = *Momentumun birim zamandaki değişimi

Dış kuvvetler

Bünyesel kuvvetler Gravitasyonel kuvvetler $= \iiint\limits_{\upsilon} \vec{f} \cdot \rho \cdot d\upsilon$

Elektromanyetik kuvvetler

Not : $\vec{f}$ birim kütleye etkiyen bünyesel kuvvettir

Yüzeysel kuvvetler Basınç kuvvetleri $= -\iint\limits_{S} p \cdot \vec{n}\ dS$

Teğetsel kuvvetler $= \vec{F}_{visc}$

Momentumun birim zamandaki değişimi

Kontrol yüzeyinden çıkan ve giren kütlelerin taşıdıkları momentumlar arasındaki fark $= \iint\limits_{S} \left(\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\ dS\right) \cdot \vec{V}$

Kontrol yüzeyindeki kütle miktarının değişiminden kaynaklanan momentum değişimi $= \frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\upsilon} (\rho \cdot d\upsilon) \cdot \vec{V}$

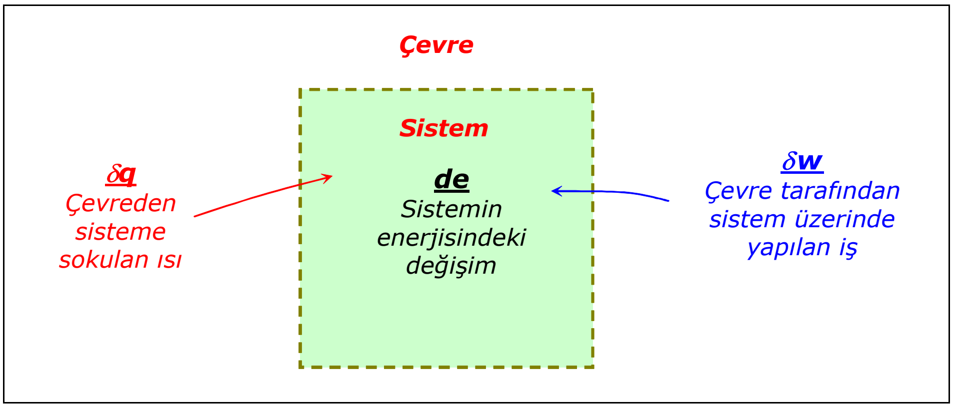
Sonuç olarak *Momentum denkleminin integral formu*

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\upsilon} (\rho \cdot d\upsilon) \cdot \vec{V} + \iint\limits_{S} \left(\rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\ dS\right) \cdot \vec{V} = -\iint\limits_{S} p \cdot \vec{n}\ dS + \vec{F}_{visc} + \iiint\limits_{\upsilon} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\upsilon$$

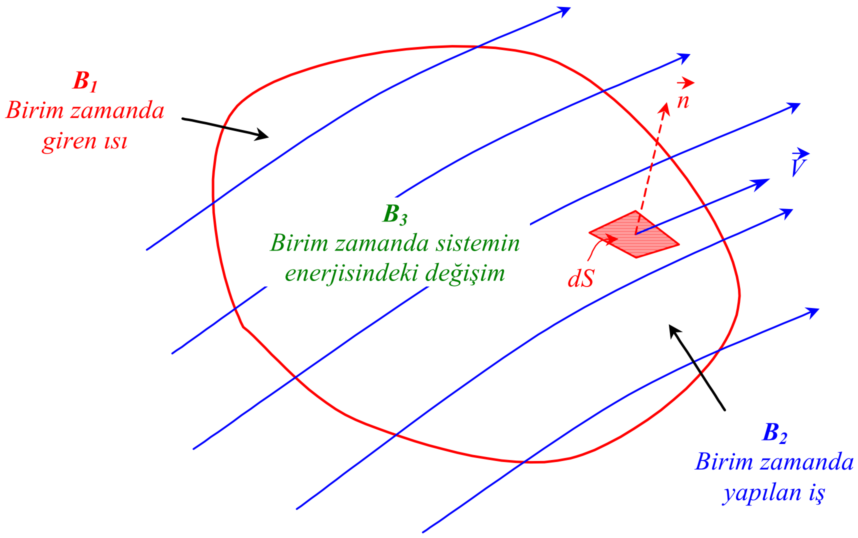
2.6- Enerji Denklemi

<u>*Enerjinin korunumu prensibi*</u> *Enerji yok edilemez, yoktan var edilemez, form değiştirir*

<u>*Termodinamiğin 1. Kanunu*</u>



$\boxed{\delta q + \delta w = de}$ (birim kütle başına)



$$\boxed{B_1 + B_2 = B_3}$$

<u>NOT:</u>

Enerji denklemi aslında <u>güç boyutunda</u> olmakla birlikte, bir alışkanlık eseri olarak "enerji" kelimesi kullanılmaktadır.

B_1 – Sisteme birim zamanda sokulan ısı miktarı:

1- ***Radyasyon*** veya ***yanma*** yoluyla ***birim zamanda*** sokulan ısı $= \iiint_{\upsilon} \dot{q} \cdot \rho \cdot d\upsilon$

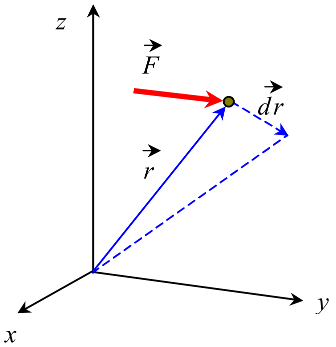
Not : $\dot{q}$ birim kütle başına sokulan ısı

2- ***Viskoz kaynaklı*** (ısı iletimi, kütle difüzyonu) olarak sokulan ısı $= \dot{Q}_{visc}$

Böylece
$$\boxed{B_1 = \iiint_{\upsilon} \dot{q} \cdot \rho \cdot d\upsilon + \dot{Q}_{visc}}$$

B_2 – Çevrenin sistem üzerinde birim zamanda yaptığı iş:

İş tanımı



$\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F}$ kuvvetinin birim zamanda yaptığı iş $\vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$

O halde, çevrenin sisteme etkittiği kuvvetlerin yaptığı iş

1- ***Basınç kuvvetleri***nin yaptığı iş $= -\iint_S \left(p \cdot \vec{n}\ dS\right) \cdot \vec{V}$

2- ***Bünyesel kuvvetler***in yaptığı iş $= \iiint_{\upsilon} \left(\vec{f} \cdot \rho \cdot d\upsilon\right) \cdot \vec{V}$

3- ***Viskoz kuvvetler***in yaptığı iş $= \dot{W}_{visc}$

Böylece
$$\boxed{B_2 = -\iint_S \left(p \cdot \vec{n}\ dS\right) \cdot \vec{V} + \iiint_{\upsilon} \left(\vec{f} \cdot \rho \cdot d\upsilon\right) \cdot \vec{V} + \dot{W}_{visc}}$$

B_3 – Sistemin enerjisinin birim zamanda değişimi:

$$\boxed{\text{Birim kütle başına enerji} \quad = \quad e + \frac{1}{2}V^2}$$

e	İç enerji	(Durağan sistem için sadece iç enerji vardır)
$\frac{1}{2}V^2$	Kinetik enerji	(Hareketli sistem için ilaveten kinetik enerji vardır.

Kontrol yüzeyinden çıkan ve giren kütlelerin taşıdıkları enerjiler arasındaki fark
$$=\iint_S \left(\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)$$

Kontrol hacmindeki kütle miktarının değişiminden kaynaklanan enerji değişimi
$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\upsilon (\rho\cdot d\upsilon)\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)$$

Sonuç olarak Enerji denkleminin integral formu

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\upsilon \rho\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\cdot d\upsilon+\iint_S\left(\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)=-\iint_S(p\cdot\vec{n}\,dS)\cdot\vec{V}+\iiint_\upsilon\left(\vec{f}\cdot\rho\cdot d\upsilon\right)\cdot\vec{V}+\dot{W}_{visc}+\iiint_\upsilon \dot{q}\cdot\rho\cdot d\upsilon+\dot{Q}_{visc}}$$

2.7- Denklemlerin Bilançosu

Genel denklemler

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\upsilon \rho\cdot d\upsilon+\iint_S \rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\upsilon (\rho\cdot d\upsilon)\cdot\vec{V}+\iint_S\left(\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\vec{V}=-\iint_S p\cdot\vec{n}\,dS+\vec{F}_v+\iiint_\upsilon \rho\cdot\vec{f}\cdot d\upsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\upsilon \rho\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\cdot d\upsilon+\iint_S\left(\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)=-\iint_S(p\cdot\vec{n}\,dS)\cdot\vec{V}+\iiint_\upsilon\left(\vec{f}\cdot\rho\cdot d\upsilon\right)\cdot\vec{V}+\dot{W}_{visc}+\iiint_\upsilon \dot{q}\cdot\rho\cdot d\upsilon+\dot{Q}_{visc}$$

1 süreklilik + 3 momentum + 1 enerji denklemi = Toplam 5 adet denklem

Bilinmeyenler $\boxed{\rho\,,\quad \vec{V}\,(u,v,w)\,,\quad p\,,\quad e}$ **Toplam 6 adet bilinmeyen**

O halde, denklem sayısı çözüm için yeterli değildir.

İlave denklemler (Termodinamik bağıntılar)		İlave bilinmeyen
Hal denklemi	$\boxed{p=\rho RT}$	$\boxed{T}$
Kalorik mükemmel gazlar için	$\boxed{e=c_v T}$	

SONUÇ OLARAK

7 adet denklem (ve bağıntı) ile 7 bilinmeyen çözülebilir.