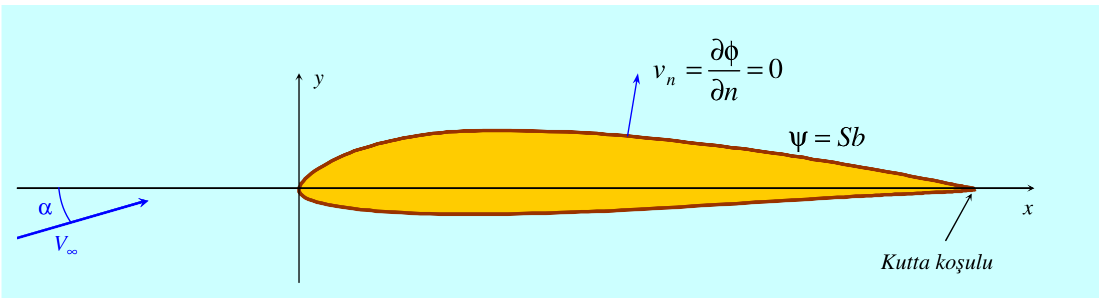
Bir kanat profili etrafındaki daimi, sıkıştırılamaz potansiyel akım probleminin panel yöntemi ile incelenmesi

Kanat profili etrafındaki daimi, sıkıştırılamaz potansiyel akım problemi

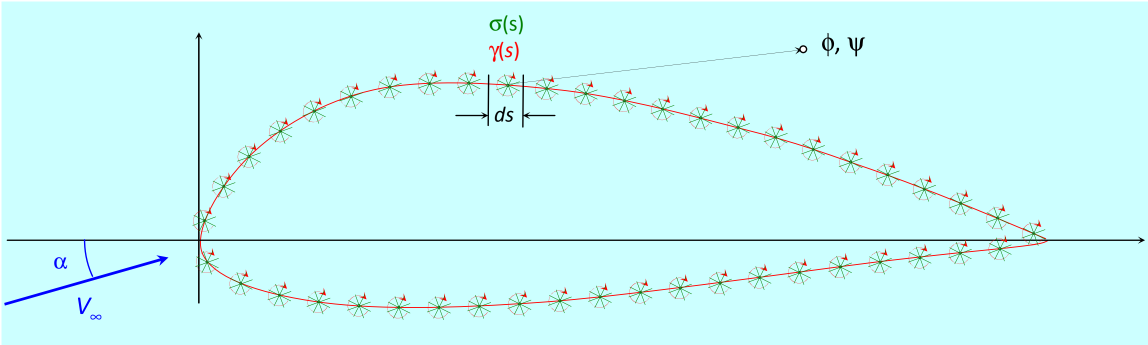
$$\left.\begin{array}{l} \nabla^2\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \phi(x,y) \quad \rightarrow \quad \vec{V} \\ \nabla^2\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = \psi(x,y) \quad \rightarrow \quad \vec{V} \end{array}\right\} \rightarrow \quad C_p = 1 - (V/V_\infty)^2$$



$$f(z) \quad \rightarrow \quad w^*(z) = \frac{df(z)}{dz} \rightarrow \quad V = \left|w^*(z)\right| \quad \rightarrow \quad C_p = 1 - (V/V_\infty)^2$$

Hess-Smith panel yöntemi

Hess yönteminde profil yüzeyi boyunca kaynak ve girdap dağılımı kullanılır



Yüzey sınır koşulu ve Kutta koşulu uygulanarak bilinmeyen kaynak ve girdap şiddetleri hesaplanır.

Kaynak ve girdap tekilliklerinin indüklemeleri

Kaynak ve girdap için kompleks potansiyel fonksiyonları

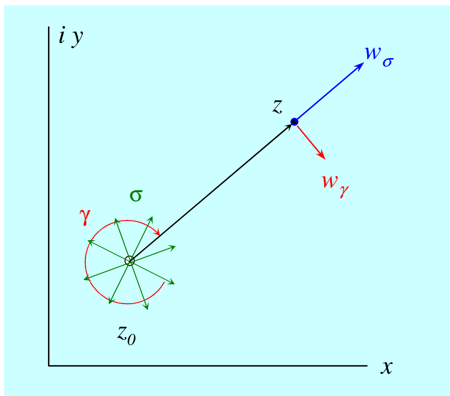
$$f_\sigma(z) = \frac{\sigma}{2\pi}\ln(z - z_0)\,, \qquad f_\gamma(z) = \frac{i\gamma}{2\pi}\ln(z - z_0)$$

Kaynak ve girdap için kompleks eşlenik hızlar

$$w^*_\sigma(z) = \frac{\sigma}{2\pi(z - z_0)}\,, \qquad w^*_\gamma(z) = \frac{i\gamma}{2\pi(z - z_0)}$$

İki fonksiyon birleştirilerek

$$\nu = \sigma + i\gamma \quad \rightarrow \quad w^*_\nu(z) = \frac{\nu}{2\pi(z - z_0)}$$



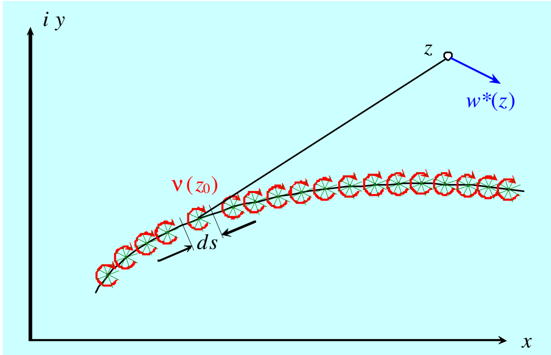
Bir kaynak+girdap tekillik yüzeyinin indüklemesi

ds uzunluklu yay parçası üzerindeki kaynak+ girdap dağılımının indüklediği kompleks eşlenik hız

$$dw_\nu^*(z) = \frac{\nu(z_0)\, ds}{2\pi(z - z_0)}$$

C yayı üzerindeki tüm kaynak+ girdap dağılımının indüklediği kompleks eşlenik hız

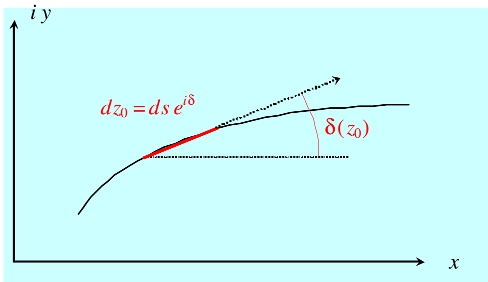
$$w_\nu^*(z) = \int_C \frac{\nu(z_0)\, ds}{2\pi(z - z_0)}$$



Elemanter yay parçasının kompleks ifadesi

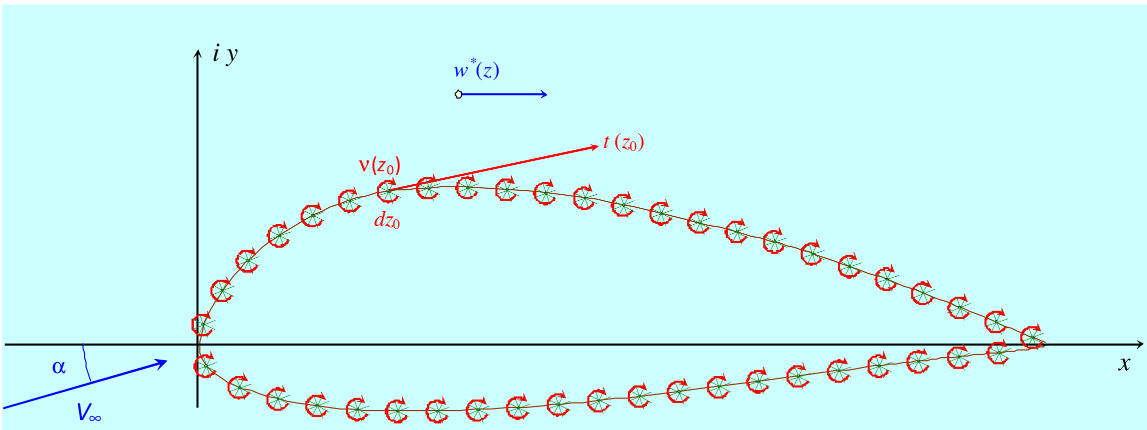
$$dz_0 = ds \cdot t(z_0) \qquad t(z_0) = e^{i\delta(z_0)}$$

Birim teğet vektörü



Buna göre $\boxed{w_\nu^*(z) = \int_C \frac{\nu(z_0)\, t^*(z_0)\, dz_0}{2\pi(z - z_0)}}$

Kanat profili etrafındaki akımın süperpozisyon yoluyla modellenmesi



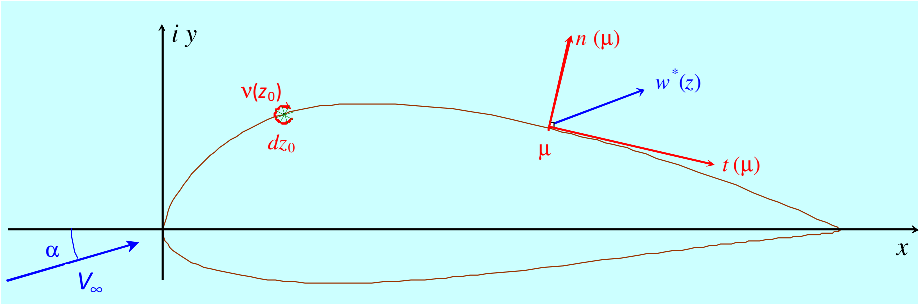
$$w^*(z) = w_\infty^* + \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\nu(z_0) \cdot t^*(z_0)}{z - z_0}\, dz_0$$

$$w_\infty^* = V_\infty e^{-i\alpha}$$

Kaynak ve girdap şiddetleri bilinmiyor

$$\boxed{\nu(z_0) = ?}$$

Yüzey sınır koşulunun uygulanması



Yüzey üzerindeki bir μ noktasında hız

$$w^*(\mu) = w_\infty^* + \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{\nu(z_0)\cdot t^*(z_0)}{\mu - z_0}\, dz_0$$

μ noktasındaki teğet-normal eksen takımında hız

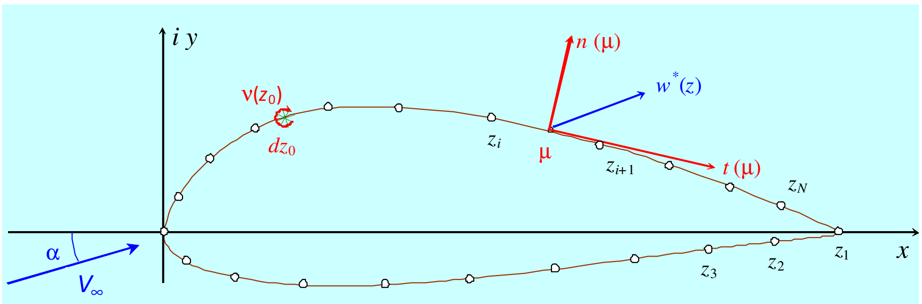
$$w_{tn}^*(\mu) = w_\infty^* \cdot t(\mu) + \frac{t(\mu)}{2\pi}\oint_C \frac{\nu(z_0)\cdot t^*(z_0)}{\mu - z_0}\, dz_0$$

Yüzey sınır koşulu uygulanarak $\quad v_n(\mu) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{IM\left\{\frac{t(\mu)}{2\pi}\oint_C \frac{\nu(z_0)\cdot t^*(z_0)}{\mu - z_0}\, dz_0\right\} = -IM\left\{w_\infty^* \cdot t(\mu)\right\}}$$

$\boxed{\nu(z_0) = ?}$ Mevcut durumda çözüm mümkün değil

İntegral denklemin ayrıklaştırılması - Panel yöntemi



Profil yüzeyi *N* adet panele ayrılarak $\quad z_j = x_j + iy_j \qquad (j = 1,2,\ldots,N)$

Yüzey üzerinde hızlar

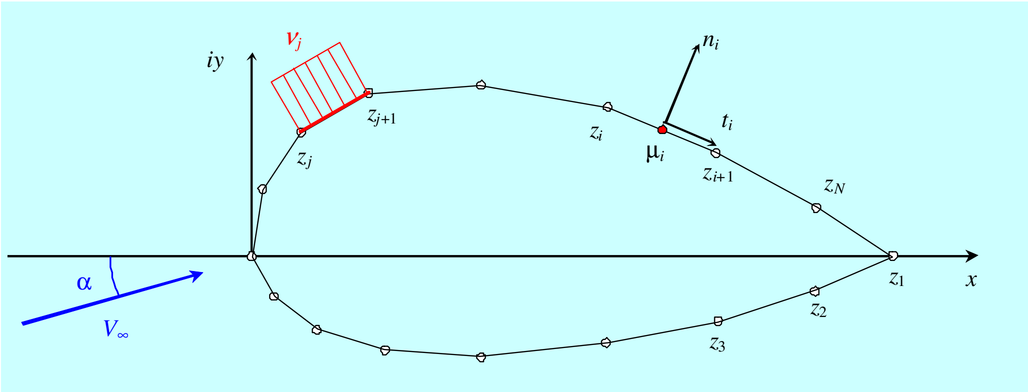
$$w_{tn}^*(\mu) = w_\infty^* t(\mu) + \frac{t(\mu)}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\nu(z_0)\cdot t^*(z_0)}{\mu - z_0}\, dz_0$$

Yüzey sınır koşulundan

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Im}\left\{\frac{t(\mu)}{2\pi}\int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{\nu(z_0)\cdot t^*(z_0)}{\mu - z_0}\, dz_0\right\} = -\mathrm{Im}\left\{w_\infty^* t(\mu)\right\}$$

$\boxed{\nu(z_0) = ?}$ Bilinmeyen integral içinde olduğundan halen çözüm mümkün değil

Doğrusal paneller boyunca sabit tekillik dağılımı ile çözüm



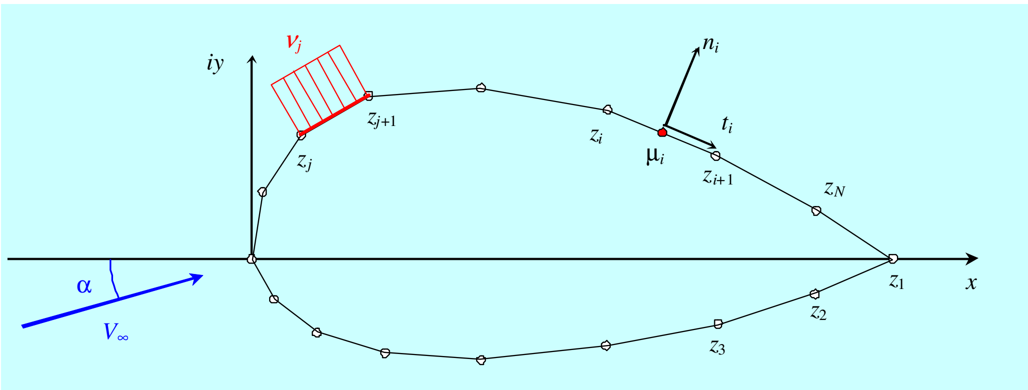
Paneller doğrusal alınarak:

- Panel birim teğet vektörleri $\quad t_j = \dfrac{z_{j+1} - z_j}{\left| z_{j+1} - z_j \right|}$
- Kontrol noktaları panel orta noktaları $\quad \mu_j = \dfrac{z_j + z_{j+1}}{2}$

Panel boyunca sabit tekillik dağılımı alınarak $\quad \nu_j(z_0) = \nu_j = \sigma_j + i\gamma_j = sb$

$$(j = 1,2,\ldots,N)$$

Doğrusal paneller boyunca sabit tekillik dağılımı ile çözüm



Panelin orta noktalarında hızlar $\quad \boxed{w^*_{tn\,i} = w^*_\infty \cdot t_i + \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\nu_j} \quad \boxed{C_{ij} = \dfrac{t_i t_j^*}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \dfrac{dz_0}{\mu_i - z_0}}$

Yüzey sınır koşulundan $\quad \boxed{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Im}\{C_{ij}\nu_j\} = -\mathrm{Im}\{w^*_\infty \cdot t_i\}} \quad (i = 1,2,\ldots,N) \quad$ *N* adet denklem

$$\nu_j = ? \quad \begin{Bmatrix} \sigma_j = ? \\ \gamma_j = ? \end{Bmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,N)$$

2N adet bilinmeyen

Doğrusal paneller boyunca sabit tekillik dağılımı ile çözüm

$$\boxed{w^*_{tn\,i} = w^*_\infty \cdot t_i + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{C}_{ij}\nu_j} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} w^*_{tn\,i} &= v_{t\,i} - i v_{n\,i} \\ C_{ij} &= A_{ij} + iB_{ij} \\ \nu_j &= \sigma_j + i\gamma_j \end{aligned}} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{t\,i} = \mathrm{Re}\{w^*_\infty \cdot t_i\} + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_{ij}\sigma_j - \sum_{j=1}^{N} \mathrm{B}_{ij}\gamma_j}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{B}_{ij}\sigma_j + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_{ij}\gamma_j = -\mathrm{Im}\{w^*_\infty \cdot t_i\}} \quad \boxed{i = 1,2,\ldots,N}$$

Halen *2N* adet bilinmeyen
N adet denklem var ! ?

Bilinmeyen sayısını azaltmak için çeşitli yollar izlenebilir

Bir <u>çözüm yolu</u> girdap şiddetini bütün yüzey boyunca sabit almaktır.

$$\sigma_j = ? \qquad (j = 1,2,\cdots,N)$$
$$\gamma_1 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_N = \gamma = Sb$$

N+1 adet bilinmeyen

İlave bir denklem Kutta koşulundan elde edilecektir.

Hess panel yöntemi

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{B}_{ij}\sigma_j + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_{ij}\gamma_j = -\mathrm{Im}\{w^*_\infty \cdot t_i\}} \qquad \boxed{v_{t\,i} = \mathrm{Re}\{w^*_\infty \cdot t_i\} + \sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_{ij}\sigma_j - \sum_{j=1}^{N} \mathrm{B}_{ij}\gamma_j}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \mathrm{A}_{ij} = B_{i,N+1}} \quad \boxed{-\mathrm{Im}\{w^*_\infty \cdot t_i\} = R_i} \quad \boxed{\begin{aligned} \sigma_j &= X_j \\ \gamma_j = \gamma &= X_{N+1} \end{aligned}} \quad \boxed{\mathrm{Re}\{w^*_\infty \cdot t_i\} = Q_i} \quad \boxed{-\sum_{j=1}^{N} \mathrm{B}_{ij} = A_{i,N+1}}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N+1} B_{ij} X_j = R_i} \qquad \boxed{i = 1,2,\ldots,N} \qquad \boxed{V_{t\,i} = Q_i + \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} X_j}$$

N+1 adet bilinmeyen *N* denklem var

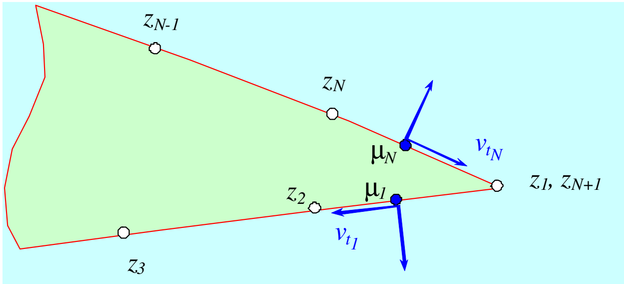
İlave bir denklem Kutta koşulundan elde edilecektir.

Hess panel yöntemi

Kutta koşulu

Firar kenarına komşu iki panel üzerindeki hızlar aynı olmalıdır.

$$v_{t1} = -v_{tN} \Longrightarrow \boxed{v_{t1} + v_{tN} = 0}$$



Teğetsel hızlar için çıkartılan formül μ_1 ve μ_N noktalarında uygulanarak Kutta şartı

$$\boxed{v_{t1} + v_{tN} = Q_1 + \sum_{j=1}^{N+1} A_{1j} X_j + Q_N + \sum_{j=1}^{N+1} A_{Nj} X_j = 0}$$

düzenlenerek

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N+1} (A_{1j} + A_{Nj}) X_j = -(Q_1 + Q_N)}$$

$$\boxed{A_{1j} + A_{Nj} = B_{N+1,j} \ , \qquad -(Q_1 + Q_N) = R_{N+1}}$$

olmak üzere

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N+1} B_{N+1,j} X_j = R_{N+1}}$$

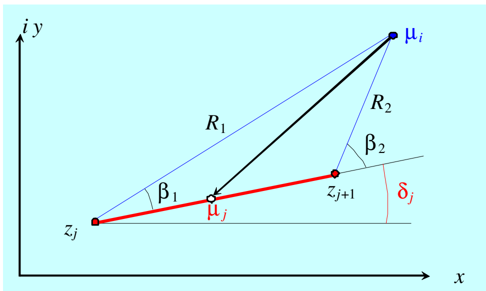
Böylece denklem sistemi

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N+1} B_{ij} \sigma_j = R_i \qquad (i = 1, 2, ..., N+1)}$$

Denklem sayısı (N+1) ile bilinmeyen sayısı eşittir

C_{ij} etkileşim katsayısı için integralin hesabı

$$C_{ij} = \frac{t_i t_j^*}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz_0}{\mu_i - z_0} = \frac{t_i t_j^*}{2\pi} \cdot \left[-\ln(\mu_i - z_0) \right]_{z_j}^{z_{j+1}}$$



$$\boxed{i \neq j} \Longrightarrow \boxed{C_{ij} = \frac{t_i t_j^*}{2\pi} \cdot \ln \frac{\mu_i - z_j}{\mu_i - z_{j+1}}}$$

$$\boxed{i = j} \Longrightarrow t_i t_j^* = t_j t_j^* = 1$$

$$C_{jj} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\mu_i \to \mu_j} \ln \frac{\mu_i - z_j}{\mu_i - z_{j+1}} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\mu_i \to \mu_j} \ln \frac{R_1 e^{\beta_1 + \delta_j}}{R_2 e^{\beta_2 + \delta_j}} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\mu_i \to \mu_j} \left[\ln \frac{R_1}{R_2} + i(\beta_1 - \beta_2) \right]$$

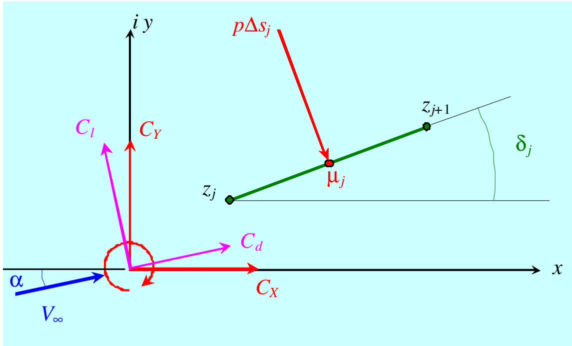
$$C_{jj} = \frac{1}{2\pi} \left[\ln(1) + i(-\pi) \right] \Longrightarrow \boxed{C_{jj} = -\frac{i}{2}}$$

Kuvvet ve moment katsayılarının hesabı

$$C_Y = \oint (1 - C_p)\, d\bar{x}$$

$$C_X = -\oint (1 - C_p)\, d\bar{y}$$

$$C_{mHK} = -\oint (1 - C_p)\,(\bar{x}\, d\bar{x} + \bar{y}\, d\bar{y})$$



$$C_Z^* = C_X + iC_Y = i\oint (1 - C_p)\, d\bar{z}$$

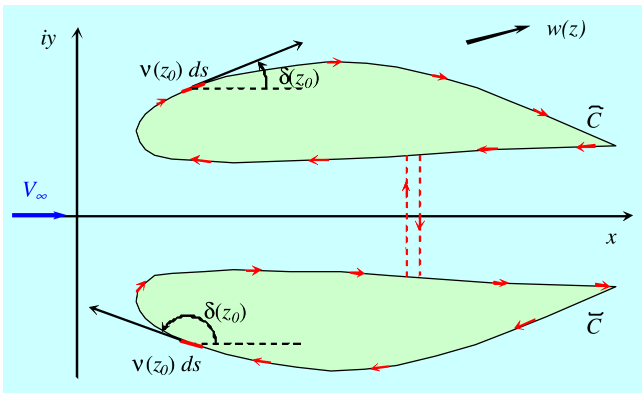
$$C_{mHK} = -\mathrm{Re}\left\{ \oint (1 - C_p)\, \bar{z}^*\, d\bar{z} \right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_Z^* &= C_X + iC_Y = i\sum_{j=1}^{N} (1 - C_p)_j\, \Delta_j t_j \\ C_{mHK} &= -\mathrm{Re}\left\{ \sum_{j=1}^{N} (1 - C_p)_j\, \mu_j^*\, \Delta_j t_j \right\} \end{aligned}}$$

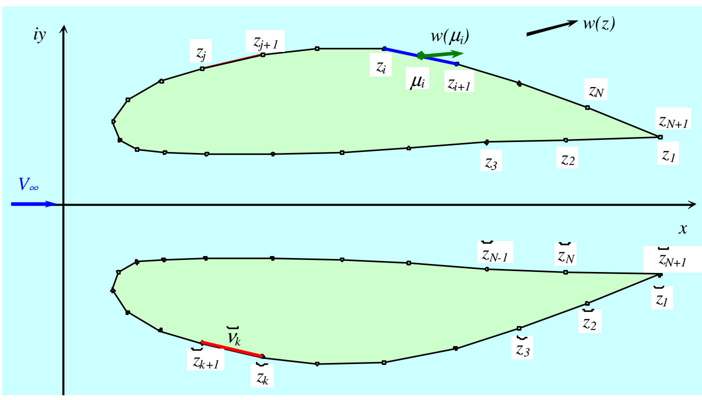
$$\boxed{C_d + iC_l = C_Z e^{-i\alpha}}$$

$$\boxed{C_{m\bar{x}} = C_{mHK} + \bar{x}\, C_Y}$$

Yer etkisi

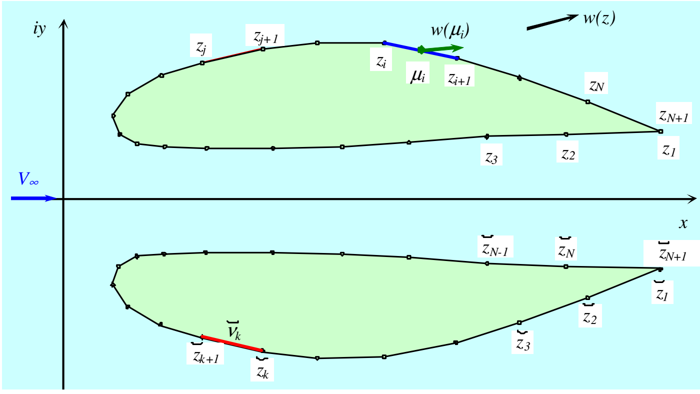


$$w^*(z) = V_\infty + \frac{1}{2\pi}\oint_{\bar{C}} \frac{\nu(z_0)\, t^*(z_0)\, dz_0}{z - z_0} + \frac{1}{2\pi}\oint_{\breve{C}} \frac{\nu(z_0)\, t^*(z_0)\, dz_0}{z - z_0}$$



$$w^*(z) = V_\infty + \sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_j\, t_j^*}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz_0}{z - z_0} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\breve{\nu}_k\, \breve{t}_k^*}{2\pi} \int_{\breve{z}_k}^{\breve{z}_{k+1}} \frac{dz_0}{z - z_0}$$

Yer etkisi



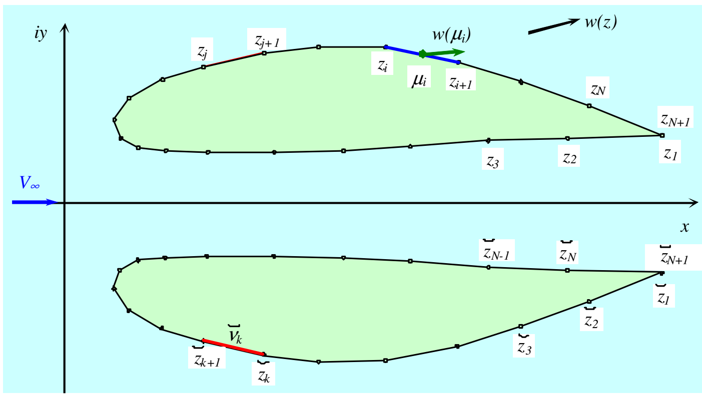
$$\boxed{w_{tn}^*(z)=V_\infty t_i+\sum_{j=1}^{N}\frac{\nu_j\, t_i t_j^*}{2\pi}\int_{z_j}^{z_{j+1}}\frac{dz_0}{\mu_i-z_0}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\breve\nu_k\, t_i\breve t_k^*}{2\pi}\int_{\breve z_k}^{\breve z_{k+1}}\frac{dz_0}{\mu_i-z_0}}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{aligned}\breve\sigma_k&=\sigma_j\\ \breve\gamma_k&=-\gamma_j\end{aligned}\quad\rightarrow\quad \breve\nu_k=\nu_j^*\\
&I_j=\int_{z_j}^{z_{j+1}}\frac{dz_0}{z-z_0}=\ln\frac{\mu_i-z_j}{\mu_i-z_{j+1}}\\
&\breve I_k=\int_{\breve z_k}^{\breve z_{k+1}}\frac{dz_0}{z-z_0}=\ln\frac{\mu_i-\breve z_k}{\mu_i-\breve z_{k+1}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{w_{tn}^*(z)=V_\infty t_i+\sum_{j=1}^{N}\frac{t_i t_j^*}{2\pi}I_j\nu_j+\sum_{k=1}^{N}\frac{t_i\breve t_k^*}{2\pi}\breve I_k\nu_j^*}$$

Yer etkisi

$$\boxed{w_{tn}^*(z)=V_\infty t_i+\sum_{j=1}^{N}\frac{t_i t_j^*}{2\pi}I_j\nu_j+\sum_{k=1}^{N}\frac{t_i\breve t_k^*}{2\pi}\breve I_k\breve\nu_k}$$



$$t_i=\frac{z_{i+1}-z_i}{\Delta_i}\qquad t_j^*=\frac{\left(z_{j+1}-z_j\right)^*}{\Delta_j}$$

$$\breve t_k^*=\frac{\left(\breve z_{k+1}-\breve z_k\right)^*}{\breve\Delta_k}\qquad \boxed{\begin{aligned}\breve\Delta_k&=\Delta_j\\ \breve z_k&=z_{j+1}^*\ ,\ \ \breve z_{k+1}=z_j^*\end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\breve t_k^*=-\frac{z_{j+1}-z_j}{\Delta_j}=t_j$$

$$\breve I_k=\ln\frac{\mu_i-\breve z_k}{\mu_i-\breve z_{k+1}}=\ln\frac{z-z_{j+1}^*}{z-z_j^*}=\breve I_j$$

$$\boxed{w_{tn}^*(z)=V_\infty t_i+\sum_{j=1}^{N}\frac{t_i}{2\pi}\left(t_j^*I_j\nu_j+t_j\breve I_j\nu_j^*\right)}$$

Yer etkisi

$$w_{tn}^*(z) = V_\infty t_i + \sum_{j=1}^{N} \frac{t_i}{2\pi}\left(t_j^* I_j \nu_j + t_j \breve{I}_j \nu_j^*\right)$$

$$\nu_j = \sigma_j + i\gamma_j \qquad \nu_j^* = \sigma_j - i\gamma_j$$

$$w_{tn}^*(z) = V_\infty t_i + \sum_{j=1}^{N} C_{ij}\,\sigma_j + \sum_{j=1}^{N} \overline{C}_{ij}\,\gamma_j$$

$$C_{ij} = \frac{t_i}{2\pi}\left(t_j^* I_j + t_j \breve{I}_j\right) \qquad \overline{C}_{ij} = \frac{i \cdot t_i}{2\pi}\left(t_j^* I_j - t_j \breve{I}_j\right)$$