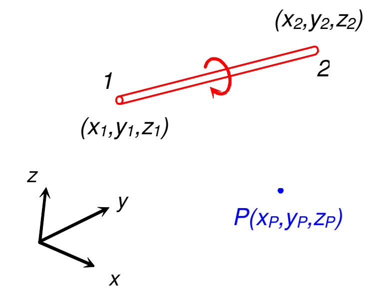
Sabit-şiddetli doğrusal girdap parçasının indüklemesi

Girdap kafes yöntemlerinde bir kanadı ve kaçma girdaplarını temsil eden bağlı girdaplar ve kaçma girdapları doğru parçaları şeklinde küçük çizgisel girdaplara bölünerek işlem yapılmaktadır. Bu bakımdan herhangi doğrusal bir girdap parçasının uzayda seçilen bir noktada indüklediği hız bileşenlerinin hesaplanması gerekir.

Herhangi bir çizgisel girdabın indüklediği hızlar Biot-Savart kanunundan elde edilen

$$\Delta\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



Şekil-Doğrusal girdap parçasının indüklemesi

vektörel bağıntısı ile hesaplanır. Bu bağıntı, şekilde gösterildiği gibi $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2(x_2,y_2,z_2)$ noktaları arasında yer alan bir doğrusal girdap parçası için

$$\Delta\vec{V}_{1-2} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|^2}\vec{r}_0\cdot\left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}-\frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}\right)$$

şekline getirilebilir [Katz]. Burada

$$\vec{r}_1 = \Delta x_{1P}\vec{i} + \Delta y_{1P}\vec{j} + \Delta z_{1P}\vec{k} \qquad \overrightarrow{P_1P} \text{ vektörü}$$

$$\vec{r}_2 = \Delta x_{2P}\vec{i} + \Delta y_{2P}\vec{j} + \Delta z_{2P}\vec{k} \qquad \overrightarrow{P_2P} \text{ vektörü}$$

$$\vec{r}_0 = \Delta x_{12}\vec{i} + \Delta y_{12}\vec{j} + \Delta z_{12}\vec{k} \qquad \overrightarrow{P_1P_2} \text{ vektörü}$$

ve

$$\boxed{\begin{array}{lll} \Delta x_{1P} = x_P - x_1 & \Delta x_{2P} = x_P - x_2 & \Delta x_{12} = x_2 - x_1 \\ \Delta y_{1P} = y_P - y_1 & \Delta y_{2P} = y_P - y_2 & \Delta y_{12} = y_2 - y_1 \\ \Delta z_{1P} = z_P - z_1 & \Delta z_{2P} = z_P - z_2 & \Delta z_{12} = z_2 - z_1 \end{array}}$$

olup hızın hesaplanması aşağıdaki adımlarla gerçekleştirilir:

1- $\vec{r}_1\times\vec{r}_2$ vektörel çarpımı

$$\vec{r}_1\times\vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x_{1P} & \Delta y_{1P} & \Delta z_{1P} \\ \Delta x_{2P} & \Delta y_{2P} & \Delta z_{2P} \end{vmatrix} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada

$$\boxed{\begin{array}{l} x_v = \Delta y_{1P}\Delta z_{2P} - \Delta y_{2P}\Delta z_{1P} \\ y_v = \Delta z_{1P}\Delta x_{2P} - \Delta z_{2P}\Delta x_{1P} \\ z_v = \Delta x_{1P}\Delta y_{2P} - \Delta x_{2P}\Delta y_{1P} \end{array}}$$

Böylece mutlak değer

$$\left| \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \right| = \Delta_v = \sqrt{(x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2}$$

2- r_1 ve r_2 uzunlukları,

$$\left| \vec{r}_1 \right| = \Delta_{1P} = \sqrt{(\Delta x_{1P})^2 + (\Delta y_{1P})^2 + (\Delta z_{1P})^2}$$

$$\left| \vec{r}_2 \right| = \Delta_{2P} = \sqrt{(\Delta x_{2P})^2 + (\Delta y_{2P})^2 + (\Delta z_{2P})^2}$$

3- Skaler çarpımlar

$$s = \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = s_{01} - s_{02}$$

olmak üzere

$$s_{01} = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{\Delta x_{12}\Delta x_{1P} + \Delta y_{12}\Delta y_{1P} + \Delta z_{12}\Delta z_{1P}}{\Delta_{1P}}$$

$$s_{02} = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{\Delta x_{12}\Delta x_{2P} + \Delta y_{12}\Delta y_{2P} + \Delta z_{12}\Delta z_{2P}}{\Delta_{2P}}$$

4- Böylece indüklenmiş hız vektörü

$$\Delta \vec{V}_{12} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$

olmak üzere

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x_v s}{(\Delta_v)^2}, \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{y_v s}{(\Delta_v)^2}, \quad u = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{z_v s}{(\Delta_v)^2},$$

elde edilir.

UYARI: *P* noktası girdap çizgisinin üzerinde ise tekillik söz konusu olup bu durumun kontrol edilmesi ve girdap çizgisinin çok yakınında özel bir uygulama yapılması gerekmektedir. Sayısal hesaplamada bu yakınlık ε yarıçaplı bir bölge ile tayin edilir. Yani

$$\vec{r}_1 < \varepsilon, \qquad \vec{r}_2 < \varepsilon, \qquad \left| \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \right| = \Delta_v < \varepsilon$$

olması durumlarına bakılır. Bu durum gerçekleşiyorsa üç hız bileşeni için de

$$u = v = w = 0$$

alınır.