Kaynak dağılımı esaslı 3 Boyutlu Panel Yöntemi

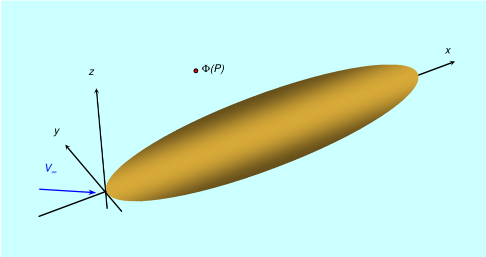
Green'in 3. idantitesinden

P noktasındaki hız potansiyeli

$$\Phi(p)=\phi_\infty(p)+\frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\sigma(q)\,dS}{r(P,q)}$$

P noktasındaki hız vektörü

$$\vec{V}(p)=\nabla\Phi=\nabla\phi_\infty+\frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla\left[\frac{\sigma(q)}{r(P,q)}\right]dS$$



Yüzey üzerindeki hız bileşenleri

$$\vec{V}_{np}=\vec{V}\cdot\vec{n}_p=\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}_p+\iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\sigma(q)}{r(p,q)}\right]dS$$

$$\vec{V}_{tp}=\vec{V}\cdot\vec{n}_t=\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}_t+\iint_S \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sigma(q)}{r(p,q)}\right]dS$$

$$\boxed{\sigma(q)=?}$$

Yüzey üzerindeki sınır koşulundan

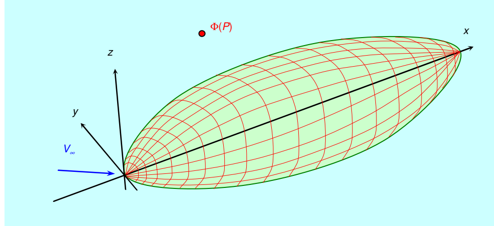
$$\vec{V}_n=\vec{V}\cdot\vec{n}_p=\nabla\Phi\cdot\vec{n}_p=\frac{\partial\Phi}{\partial n_p}=0 \quad\Rightarrow\quad \iint_S \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\sigma(q)}{r(p,q)}\right]dS=-\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}_p$$

Kaynak dağılımı esaslı 3 Boyutlu Panel Yöntemi

Yüzey *N* adet panele ayrılarak

$$\sum_{j=1}^{N}\iint_{S_j}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[\frac{\sigma(q)}{r(p_i,q)}\right]dS=-\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}_p$$

$$\vec{V}_{tp}=\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}_t+\sum_{j=1}^{N}\iint_{S_j}\frac{\partial}{\partial t_i}\left[\frac{\sigma(q)}{r(p_i,q)}\right]dS$$



Düzlemsel paneller üzerinde sabit kaynak dağılımı alınarak

$$\sum_{j=1}^{N}B_{ij}\sigma_j=-\vec{V}_\infty\vec{n}_i \qquad (i=1,2,\ldots,N)$$

$$\vec{V}_{tp}=\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}_t+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\sigma_j$$

Burada

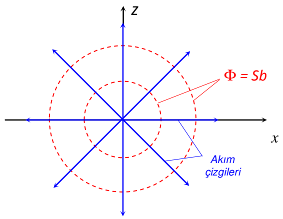
$$A_{ij}=\iint_{S_j}\frac{\partial}{\partial t_i}\left[\frac{1}{r(p_i,q)}\right]dS$$

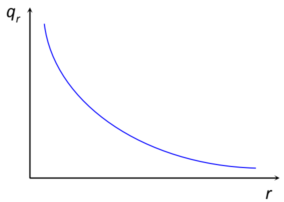
$$B_{ij}=\iint_{S_j}\frac{\partial}{\partial n_i}\left[\frac{1}{r(p_i,q)}\right]dS$$

3B (noktasal) Kaynağın indüklemesi

$$\Phi=-\frac{\sigma}{4\pi\,|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\vec{V}=\frac{\sigma}{4\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$





Kartezyen koordinatlarda potansiyel fonksiyonu ve hız bileşenleri

$$\Phi(x,y,z)=-\frac{\sigma}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$u(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\sigma\,(x-x_0)}{4\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}$$

$$v(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\sigma\,(y-y_0)}{4\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}$$

$$w(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\sigma\,(z-z_0)}{4\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}$$

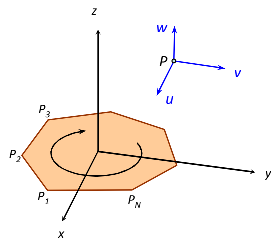
Sabit şiddetli kaynak yüzeyinin indüklemesi

$$\Phi(x,y,z)=-\frac{\sigma}{4\pi}\iint_S\frac{dS}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$u(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\sigma}{4\pi}\iint_s\frac{(x-x_0)\,dS}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}$$

$$v(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\sigma}{4\pi}\iint_S\frac{(y-y_0)\,dS}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}$$

$$w(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\sigma}{4\pi}\iint_S\frac{(z-z_0)\,dS}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}$$



İntegrallerin analitik ifadelerle hesaplanabilmesi gerekir.

İntegrallerin hesabı için Bousquet Formülasyonu

$$d_k = \left|\overrightarrow{P_k P_{k+1}}\right| = \sqrt{(\xi_{k+1}-\xi_k)^2 + (\eta_{k+1}-\eta_k)^2}$$

$$r_k = \left|\overrightarrow{P_k M}\right| = \sqrt{(\xi-\xi_k)^2 + (\eta-\eta_k)^2}$$

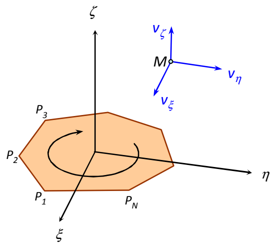
$$\lambda_k = \overrightarrow{MP_k} \cdot \frac{\overrightarrow{P_k P_{k+1}}}{\left|P_k P_{k+1}\right|} = \frac{(\xi_k-\xi)(\xi_{k+1}-\xi_k) + (\eta_k-\eta)(\eta_{k+1}-\eta_k)}{d_k}$$

$$\mu_k = \overrightarrow{MP_{k+1}} \cdot \frac{\overrightarrow{P_k P_{k+1}}}{\left|P_k P_{k+1}\right|} = \frac{(\xi_{k+1}-\xi)(\xi_{k+1}-\xi_k) + (\eta_{k+1}-\eta)(\eta_{k+1}-\eta_k)}{d_k}$$

$$R_k = \frac{(\xi-\xi_k)(\eta_{k+1}-\eta_k) - (\eta-\eta_k)(\xi_{k+1}-\xi_k)}{d_k}$$

$$Q_k = \log\frac{r_k + r_{k+1} + d_k}{r_k + r_{k+1} - d_k} \qquad J_k = \tan^{-1}\left[R_k|\zeta| \frac{r_k \mu_k - r_{k+1}\lambda_k}{r_k r_{k+1} R_k^2 + \zeta^2 \lambda_k \mu_k}\right]$$

$$v_\xi = \frac{-1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\eta_{k+1}-\eta_k}{d_k}Q_k \qquad v_\eta = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_{k+1}-\xi_k}{d_k}Q_k \qquad v_\zeta = \frac{1}{4\pi}Sign(\zeta)\left[\Delta\theta - \sum_{k=1}^{N}J_k\right]$$



$Ri > 0$ ise $\Delta\theta = 2\pi$
Aksi halde $\Delta\theta = 0$

Bousquet formülasyonu için kaynak yazılım

```
Sub JBousquet(j, KsiI, ItaI, ZtaI, vKsiJ, vItaJ, vZtaJ, PhiJ)

   method = "Bousquet"

   vKsiJ = 0
   vItaJ = 0
   vZtaJ = 0
   PhiJ = 0

   SignBRK = 1

   For k = 1 To NP(j)

      L = k + 1
      If L > NP(j) Then L = 1

      dK = Sqr((Ksi(L, j) - Ksi(k, j)) ^ 2 + (Ita(L, j) - Ita(k,
j)) ^ 2)
      rK = Sqr((KsiI - Ksi(k, j)) ^ 2 + (ItaI - Ita(k, j)) ^ 2 +
ZtaI ^ 2)
      rL = Sqr((KsiI - Ksi(L, j)) ^ 2 + (ItaI - Ita(L, j)) ^ 2 +
ZtaI ^ 2)

      LK = (Ksi(k, j) - KsiI) * (Ksi(L, j) - Ksi(k,j))
      LK = (LK + (Ita(k, j) - ItaI) * (Ita(L, j) - Ita(k,j))) / dK

      mK = (Ksi(L, j) - KsiI) * (Ksi(L, j) - Ksi(k, j))
      mK = (mK + (Ita(L, j) - ItaI) * (Ita(L, j) - Ita(k, j))) /
dK

      bRK = (KsiI - Ksi(k, j)) * (Ita(L, j) - Ita(k, j))
      bRK = (bRK - (ItaI - Ita(k, j)) * (Ksi(L, j) - Ksi(k, j))) /
dK
      Qk = Log((rK + rL + dK) / (rK + rL - dK))
      denom = (rK * rL * bRK ^ 2 + ZtaI ^ 2 * LK * mK)

      If denom = 0 Then
         JK = 0
      Else
         TanJK = bRK * (Abs(ZtaI) * (rK * mK - rL * LK)) /
denom
         JK = Atn(TanJK)
         If TanJK < 0 Then JK = JK + pi
      End If

      If bRK < 0 Then
         SignBRK = -1
         JK = JK - pi
      End If
      If bRK = 0 Then JK = JK + pi

      vKsiJ = vKsiJ - (Ita(L, j) - Ita(k,j)) * Qk / dK
      vItaJ = vItaJ + (Ksi(L, j) - Ksi(k, j)) * Qk / dK
      vZtaJ = vZtaJ + JK
      PhiJ = PhiJ + bRK * Qk + Abs(ZtaI) * JK

   Next k

   dTeta = 0
   If SignBRK > 0 Then dTeta = pi2

   vKsiJ = vKsiJ / pi4
   vItaJ = vItaJ / pi4
   SignZeta = 1: If ZtaI < 0 Then SignZeta = -1
   vZtaJ = SignZeta * (dTeta - vZtaJ) / pi4

   PhiJ = -(PhiJ - Abs(ZtaI) * dTeta) / pi4

End Sub
```


Kaynak panel yönteminin genel yapısı

- Serbest akım bilgileri
- Cismin geometri bilgileri

Panel özelliklerinin hesaplanması

Lineer denklem takımının katsayılarının hesaplanması

Lineer denklem takımının çözümü

Hızların hesaplanması

Aerodinamik katsayıların hesaplanması

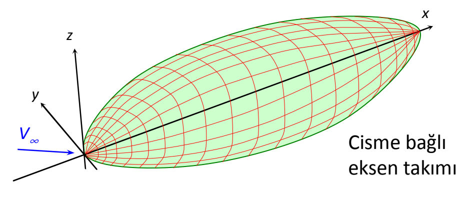
Serbest akım ve cismin geometri bilgileri

Serbest akım hız vektörü

$$\boxed{\vec{V}_\infty = V_{\infty x}\vec{i} + V_{\infty y}\vec{j} + V_{\infty z}\vec{k}}$$

$$V_{\infty x} = V_\infty \cos\alpha\cos\beta$$
$$V_{\infty y} = V_\infty \cos\alpha\sin\beta$$
$$V_{\infty z} = V_\infty \cos\beta\sin\alpha$$

α hücum açısı
β sapma açısı



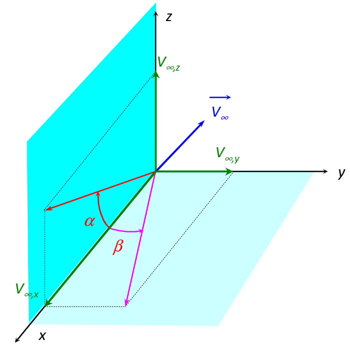
Cisme bağlı eksen takımı

hız vektörünün eksenlerle yaptığı açıların kosinüsleri, yani kosinüs direktörleri sırasıyla

$\cos\delta_x$, $\cos\delta_y$ ve $\cos\delta_z$

olmak üzere

$V_{\infty x} = V_\infty \cos\delta_x$	$\cos\delta_x = \cos\alpha\cos\beta$
$V_{\infty y} = V_\infty \cos\delta_y$	$\cos\delta_y = \cos\alpha\sin\beta$
$V_{\infty z} = V_\infty \cos\delta_z$	$\cos\delta_z = \cos\beta\sin\alpha$

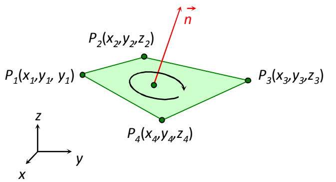


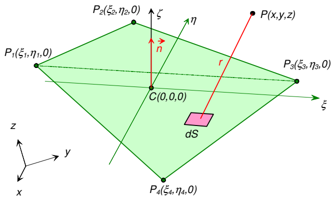
Panele bağlı eksen takımının oluşturulması

Panel köşe noktalarının koordinatları

$P_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1,2,3,4$

cisme dışarıdan panel normali yönüne zıt yönde bakıldığında saat ibreleri yönünde sıralanmıştır. (Bousquet formülasyonunun gereği)





ζ ekseni normal doğrultudadır.

ξ ekseni panel merkezinden geçmektedir. 1-3 köşegenine paralel ve 1-3 yönündedir.

η ekseni bu ikisine diktir.

Panel köşe noktalarının bu eksen takımındaki koordinatları $P_k(\xi_k, \eta_k, 0)$, $k=1,2,3,4$

Panele bağlı eksen takımının oluşturulması

Panel yöntemiyle hesaplamalar için öncelikle:

- Panel köşe noktalarının panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarının,
- Herhangi bir *i* 'inci panel kontrol noktasının *j* 'inci panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarının

elde edilmesi gerekmektedir. Bu hesaplar için de ayrıca

- Panel sentroidlerinin,
- Panel eksenlerinin cisme bağlı eksen takımındaki kosinüs direktörlerinin

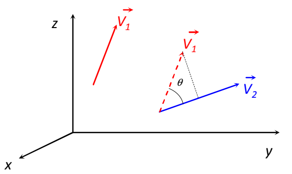
bilinmesine gerek vardır.

Bütün bu hesapların kolaylıkla yapılabilmesi için vektörlerin skaler ve vektörel çarpma özelliklerinden yararlanılacaktır.

İki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \left|\vec{V}_1\right| \cdot \left|\vec{V}_2\right| \cos\theta}$$



$$\left|\vec{V}_1\right| = d_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$
$$\left|\vec{V}_2\right| = d_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$$
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\left|\vec{V}_1\right| \cdot \left|\vec{V}_2\right|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1 d_2}$$

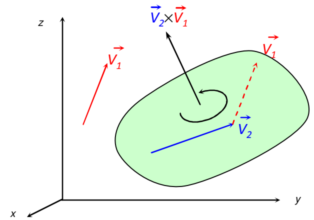
$$\frac{a_1}{d_1} = \cos\alpha_1 , \quad \frac{b_1}{d_1} = \cos\beta_1 , \quad \frac{c_1}{d_1} = \cos\gamma_1$$

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

$$\frac{a_2}{d_2} = \cos\alpha_2 , \quad \frac{b_2}{d_2} = \cos\beta_2 , \quad \frac{c_2}{d_2} = \cos\gamma_2$$

İki vektörün vektörel çarpımı

$$\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$$



$$\boxed{\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

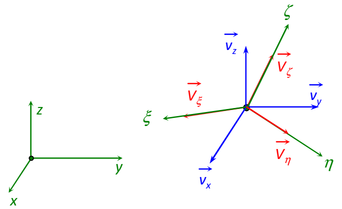
$$\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (b_2 c_1 - b_1 c_2)\vec{i} + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\vec{j} + (a_2 b_1 - a_1 a_2)\vec{k}$$

Bir vektörün başka bir eksen takımına aktarılması

$$\boxed{\vec{V}_{\xi\eta\zeta} = v_\xi \vec{e}_\xi + v_\eta \vec{e}_\eta + v_\zeta \vec{e}_\zeta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_\xi &= \xi_x\,\vec{i} + \xi_y\,\vec{j} + \xi_z\,\vec{k} \\ \vec{e}_\eta &= \eta_x\,\vec{i} + \eta_y\,\vec{j} + \eta_z\,\vec{k} \\ \vec{e}_\zeta &= \zeta_x\,\vec{i} + \zeta_y\,\vec{j} + \zeta_z\,\vec{k} \end{aligned}}$$ olup



$$\vec{V}_{\xi\eta\zeta} = v_\xi\left(\xi_x\,\vec{i} + \xi_y\,\vec{j} + \xi_z\,\vec{k}\right) + v_\eta\left(\eta_x\,\vec{i} + \eta_y\,\vec{j} + \eta_z\,\vec{k}\right) + v_\zeta\left(\zeta_x\,\vec{i} + \zeta_y\,\vec{j} + \zeta_z\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{V}_{\xi\eta\zeta} = \left(v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x + v_\zeta\zeta_x\right)\vec{i} + \left(v_\xi\xi_y + v_\eta\eta_y + v_\zeta\zeta_y\right)\vec{j} + \left(v_\xi\xi_z + v_\eta\eta_z + v_\zeta\zeta_z\right)\vec{k}$$

Veya $\boxed{\vec{V}_{xyz} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}$

olmak üzere
$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_\xi\xi_x + v_\eta\eta_x + v_\zeta\zeta_x \\ v_y &= v_\xi\xi_y + v_\eta\eta_y + v_\zeta\zeta_y \\ v_z &= v_\xi\xi_z + v_\eta\eta_z + v_\zeta\zeta_z \end{aligned}}$$
elde edilir.

Bir vektörün başka bir eksen takımına aktarılması

Ters yönde bir dönüşüm için
$$\begin{aligned} v_\xi &= \vec{V}_{xyz}\cdot\vec{e}_\xi = \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)\cdot\left(\xi_x\,\vec{i} + \xi_y\,\vec{j} + \xi_z\,\vec{k}\right) \\ v_\eta &= \vec{V}_{xyz}\cdot\vec{e}_\eta = \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)\cdot\left(\eta_x\,\vec{i} + \eta_y\,\vec{j} + \eta_z\,\vec{k}\right) \\ v_\zeta &= \vec{V}_{xyz}\cdot\vec{e}_\zeta = \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)\cdot\left(\zeta_x\,\vec{i} + \zeta_y\,\vec{j} + \zeta_z\,\vec{k}\right) \end{aligned}$$

yazılarak
$$\boxed{\begin{aligned} v_\xi &= v_x\xi_x + v_y\xi_y + v_z\xi_z \\ v_\eta &= v_x\eta_x + v_y\eta_y + v_z\eta_z \\ v_\zeta &= v_x\zeta_x + v_y\zeta_y + v_z\zeta_z \end{aligned}}$$
elde edilir.

Burada:
$$\boxed{\begin{aligned} &\xi_x = \frac{\vec{e}_\xi\cdot\vec{i}}{\left|\vec{e}_\xi\right|\cdot\left|\vec{i}\right|},\quad \xi_y = \frac{\vec{e}_\xi\cdot\vec{j}}{\left|\vec{e}_\xi\right|\cdot\left|\vec{j}\right|},\quad \xi_y = \frac{\vec{e}_\xi\cdot\vec{k}}{\left|\vec{e}_\xi\right|\cdot\left|\vec{k}\right|} \\ &\eta_x = \frac{\vec{e}_\eta\cdot\vec{i}}{\left|\vec{e}_\eta\right|\cdot\left|\vec{i}\right|},\quad \eta_y = \frac{\vec{e}_\eta\cdot\vec{j}}{\left|\vec{e}_\eta\right|\cdot\left|\vec{j}\right|},\quad \eta_y = \frac{\vec{e}_\eta\cdot\vec{k}}{\left|\vec{e}_\eta\right|\cdot\left|\vec{k}\right|} \\ &\zeta_x = \frac{\vec{e}_\zeta\cdot\vec{i}}{\left|\vec{e}_\zeta\right|\cdot\left|\vec{i}\right|},\quad \zeta_y = \frac{\vec{e}_\zeta\cdot\vec{j}}{\left|\vec{e}_\zeta\right|\cdot\left|\vec{j}\right|},\quad \zeta_y = \frac{\vec{e}_\zeta\cdot\vec{k}}{\left|\vec{e}_\zeta\right|\cdot\left|\vec{k}\right|} \end{aligned}}$$
Kosinüs direktörleridir

Panel sentroidinin koordinatları

Panel sentroidinin cisme bağlı eksen takımındaki koordinatları

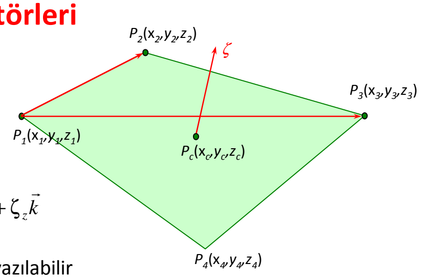
Dörtgen paneller için
$$x_C = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)$$
$$y_C = \frac{1}{4}\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)$$
$$z_C = \frac{1}{4}\left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4\right)$$

Üçgen paneller için:
$$x_C = \frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3\right)$$
$$y_C = \frac{1}{3}\left(y_1 + y_2 + y_3\right)$$
$$z_C = \frac{1}{3}\left(z_1 + z_2 + z_3\right)$$

Panel eksenlerinin cisme bağlı eksen takımında kosinüs direktörleri

Panel üzerindeki herhangi iki vektörün vektörel çarpımı panel yüzeyine dik olacaktır

$$\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_2} \;//\; \vec{\zeta}$$



ζ doğrultusunda birim vektör $\vec{e}_\zeta = \zeta_x\vec{i} + \zeta_y\vec{j} + \zeta_z\vec{k}$

olmak üzere $\zeta_x\vec{i} + \zeta_y\vec{j} + \zeta_z\vec{k} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_2}\right|}$ yazılabilir

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(a_{12}, b_{12}, c_{12}\right),\qquad a_{12} = x_2 - x_1\,,\quad b_{12} = y_2 - y_1\,,\quad c_{12} = z_2 - z_1$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(a_{13}, b_{13}, c_{13}\right),\qquad a_{13} = x_3 - x_1\,,\quad b_{13} = y_3 - y_1\,,\quad c_{13} = z_3 - z_1$$
olmak üzere

$$\overrightarrow{P_1P_3}\times\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{13} & c_{13} \\ b_{12} & c_{12} \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_{13} & c_{13} \\ a_{12} & c_{12} \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_{13} & b_{13} \\ a_{12} & b_{12} \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= \left(b_{13}c_{12} - b_{12}c_{13}\right)\vec{i} + \left(c_{13}a_{12} - c_{12}a_{13}\right)\vec{j} + \left(a_{13}b_{12} - a_{12}b_{13}\right)\vec{k}$$

Panel eksenlerinin cisme bağlı eksen takımında kosinüs direktörleri

Böylece $\boxed{\begin{aligned}\zeta_x &= d_x / d \\ \zeta_y &= d_y / d \\ \zeta_z &= d_z / d\end{aligned}}$ olur. Burada $\boxed{\begin{aligned} d_x &= b_{13}c_{12} - b_{12}c_{13} \\ d_y &= c_{13}a_{12} - c_{12}a_{13}\,; \qquad d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} \\ d_z &= a_{13}b_{12} - a_{12}b_{13}\end{aligned}}$

ξ doğrultusunda birim vektör $\vec{e}_\xi = \xi_x\vec{i} + \xi_y\vec{j} + \xi_z\vec{k}$

P_1P_3 doğrultusuna paralel olacağı için $\xi_x\vec{i} + \xi_y\vec{j} + \xi_z\vec{k} = \dfrac{\overrightarrow{P_1P_3}}{|\overrightarrow{P_1P_3}|}$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (a_{13}, b_{13}, c_{13})$ olmak üzere $\boxed{\xi_x = \dfrac{a_{13}}{d}, \quad \xi_y = \dfrac{b_{13}}{d}, \quad \xi_z = \dfrac{c_{13}}{d}}$

Burada $\boxed{a_{13} = x_3 - x_1\,, \quad b_{13} = y_3 - y_1\,, \quad c_{13} = z_3 - z_1}$

$$\boxed{d = \left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| = \sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2 + c_{13}^2}}$$

Panel eksenlerinin cisme bağlı eksen takımında kosinüs direktörleri

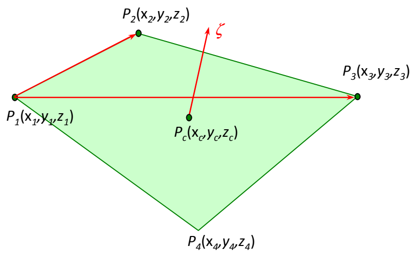
Panel η ekseni diğer iki eksene dik olup $\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\xi = \vec{e}_\eta = \eta_x\vec{i} + \eta_y\vec{j} + \eta_z\vec{k}$

$$\eta_x\vec{i} + \eta_y\vec{j} + \eta_z\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \\ \xi_x & \xi_y & \xi_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta_y & \zeta_z \\ \xi_y & \xi_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \zeta_x & \zeta_z \\ \xi_x & \xi_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \zeta_x & \zeta_y \\ \xi_x & \xi_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

Böylece $\begin{aligned}\eta_x &= \zeta_y\xi_z - \xi_y\zeta_z \\ \eta_y &= \zeta_z\xi_x - \xi_z\zeta_x \\ \eta_z &= \zeta_x\xi_y - \xi_x\zeta_y\end{aligned}$ olur

Panel köşe noktalarının panele bağlı eksen takımındaki koordinatları

Köşe noktası koordinatı $P_k(\xi, \eta, 0)$ olup



$$\overrightarrow{P_cP_k} = a_{ck}\vec{i} + b_{ck}\vec{j} + c_{ck}\vec{k}\,, \qquad (k = 1,2,3,4)$$

$$\begin{aligned} a_{ck} &= x_k - x_c \\ b_{ck} &= y_k - y_c \\ c_{ck} &= z_k - z_c \end{aligned} \qquad \left|\overrightarrow{P_cP_k}\right| = d_{ck} = \sqrt{a_{ck}^2 + b_{ck}^2 + c_{ck}^2}$$

olmak üzere

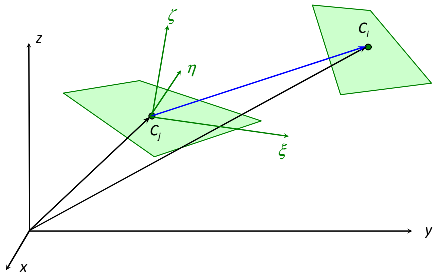
$$\begin{aligned}\xi_k &= \overrightarrow{P_cP_k}\cdot\vec{e}_\xi \\ \eta_k &= \overrightarrow{P_cP_k}\cdot\vec{e}_\eta\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\xi_k &= a_{ck}\xi_x + b_{ck}\xi_y + c_{ck}\xi_z \\ \eta_k &= a_{ck}\eta_x + b_{ck}\eta_y + c_{ck}\eta_z\end{aligned}}$$

i panel kontrol noktasının *j* panel eksen takımındaki koordinatları

$$\overrightarrow{C_jC_i} = a_{ji}\vec{i} + b_{ji}\vec{j} + c_{ji}\vec{k}$$

$$\begin{aligned} a_{ji} &= x_{ci} - x_{cj} \\ b_{ji} &= y_{ci} - y_{cj} \\ c_{ji} &= z_{ci} - z_{cj} \end{aligned}$$

x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} Panel sentroid koordinatları



$$\begin{aligned}\xi_i &= \overrightarrow{C_jC_i}\cdot\vec{e}_\xi \\ \eta_i &= \overrightarrow{C_jC_i}\cdot\vec{e}_\eta \\ \zeta_i &= \overrightarrow{C_jC_i}\cdot\vec{e}_\zeta\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\xi_i &= a_{ji}\xi_x + b_{ji}\xi_y + c_{ji}\xi_z \\ \eta_i &= a_{ji}\eta_x + b_{ji}\eta_y + c_{ji}\eta_z \\ \zeta_i &= a_{ji}\zeta_x + b_{ji}\zeta_y + c_{ji}\zeta_z\end{aligned}}$$

ξ_i, η_i, ζ_i : Panele bağlı eksen takımında koordinatlar

$\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \ldots$: Panel eksenlerinin kosinüs direktörleri

Serbest akım hızının panel eksen takımındaki bileşenleri

$\vec{V}_{\infty} = V_{\infty x}\vec{i} + V_{\infty y}\vec{j} + V_{\infty z}\vec{k}$ Cisme bağlı eksen takımında hız vektörü

$\vec{V}_{\infty_p} = V_{\infty\xi}\vec{e}_{\xi} + V_{\infty\eta}\vec{e}_{\eta} + V_{\infty\zeta}\vec{e}_{\zeta}$ Panele bağlı eksen takımında hız vektörü

$$V_{\infty\xi} = \vec{V}_{\infty}\cdot\vec{e}_{\xi} = \left(V_{\infty x}\vec{i} + V_{\infty y}\vec{j} + V_{\infty z}\vec{k}\right)\cdot\left(\xi_x\,\vec{i} + \xi_y\,\vec{j} + \xi_z\,\vec{k}\right)$$
$$V_{\infty\eta} = \vec{V}_{\infty}\cdot\vec{e}_{\eta} = \left(V_{\infty x}\vec{i} + V_{\infty y}\vec{j} + V_{\infty z}\vec{k}\right)\cdot\left(\eta_x\,\vec{i} + \eta_y\,\vec{j} + \eta_z\,\vec{k}\right)$$
$$V_{\infty\zeta} = \vec{V}_{\infty}\cdot\vec{e}_{\zeta} = \left(V_{\infty x}\vec{i} + V_{\infty y}\vec{j} + V_{\infty z}\vec{k}\right)\cdot\left(\zeta_x\,\vec{i} + \zeta_y\,\vec{j} + \zeta_z\,\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{\infty\xi} &= V_{\infty x}\xi_x + V_{\infty y}\xi_y + V_{\infty z}\xi_z \\ V_{\infty\eta} &= V_{\infty x}\eta_x + V_{\infty y}\eta_y + V_{\infty z}\eta_z \\ V_{\infty\zeta} &= V_{\infty x}\zeta_x + V_{\infty y}\zeta_y + V_{\infty z}\zeta_z \end{aligned}}$$

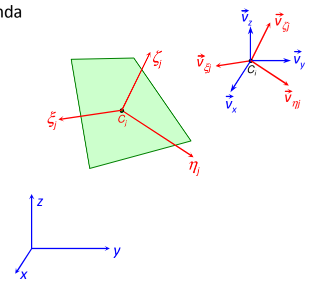
$\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \ldots$: Panel eksenlerinin kosinüs direktörleri

Hız bileşenlerinin *j* paneli eksen takımından cisme bağlı eksen takımına aktarılması

hız vektörü

$\vec{V}_j = v_{\xi_j}\vec{e}_{\xi_j} + v_{\eta_j}\vec{e}_{\eta_j} + v_{\zeta_j}\vec{e}_{\zeta_j}$ *j* paneline bağlı eksen takımında

$\vec{V} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ Cisme bağlı eksen takımında



$$v_x = \vec{V}_j\cdot\vec{i} = \left(v_{\xi_j}\vec{e}_{\xi_j} + v_{\eta_j}\vec{e}_{\eta_j} + v_{\zeta_j}\vec{e}\right)\cdot\vec{i} =$$
$$= \begin{bmatrix} v_{\xi_j}\left(\xi_{x\,j}\,\vec{i} + \xi_{y\,j}\,\vec{j} + \xi_{z\,j}\,\vec{k}\right) + \\ v_{\eta_j}\left(\eta_{x\,j}\,\vec{i} + \eta_{y\,j}\,\vec{j} + \eta_{z\,j}\,\vec{k}\right) + \\ v_{\zeta_j}\left(\zeta_{x\,j}\,\vec{i} + \zeta_{y\,j}\,\vec{j} + \zeta_{z\,j}\,\vec{k}\right) \end{bmatrix}\cdot\vec{i}$$

$$\boxed{v_x = v_{\xi_j}\xi_{x\,j} + v_{\eta_j}\eta_{x\,j} + v_{\zeta_j}\zeta_{x\,j}}$$

Benzeri işlemlerle

$v_y = \vec{V}_j\cdot\vec{j}$

$v_z = \vec{V}_j\cdot\vec{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_y &= \vec{V}_j\cdot\vec{j} = v_{\xi_j}\xi_{y\,j} + v_{\eta_j}\eta_{y\,j} + v_{\zeta_j}\zeta_{y\,j} \\ v_z &= \vec{V}_j\cdot\vec{k} = v_{\xi_j}\xi_{z\,j} + v_{\eta_j}\eta_{z\,j} + v_{\zeta_j}\zeta_{z\,j} \end{aligned}}$$

$\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \ldots$

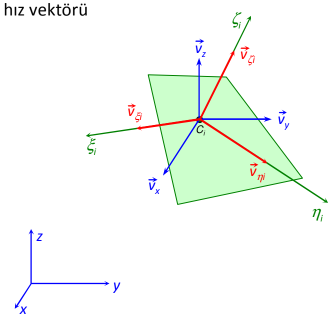
Panel eksenlerinin kosinüs direktörleri

Hız bileşenlerinin i ’inci panele bağlı eksen takımına aktarılması

$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ Cisme bağlı eksen takımında hız vektörü

$\vec{V}_p = V_{\xi_i}\vec{e}_{\xi} + V_{\eta_i}\vec{e}_{\eta} + V_{\zeta_i}\vec{e}_{\zeta}$ Panele bağlı eksen takımında hız vektörü

$$V_{\xi_i} = \vec{V}\cdot\vec{e}_{\xi} = \left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right)\cdot\left(\xi_x\,\vec{i} + \xi_y\,\vec{j} + \xi_z\,\vec{k}\right)$$
$$V_{\eta_i} = \vec{V}\cdot\vec{e}_{\eta} = \left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right)\cdot\left(\eta_x\,\vec{i} + \eta_y\,\vec{j} + \eta_z\,\vec{k}\right)$$
$$V_{\zeta_i} = \vec{V}\cdot\vec{e}_{\zeta} = \left(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right)\cdot\left(\zeta_x\,\vec{i} + \zeta_y\,\vec{j} + \zeta_z\,\vec{k}\right)$$



$$\boxed{\begin{aligned} V_{\xi_i} &= V_x\xi_x + V_y\xi_y + V_z\xi_z \\ V_{\eta_i} &= V_x\eta_x + V_y\eta_y + V_z\eta_z \\ V_{\zeta_i} &= V_x\zeta_x + V_y\zeta_y + V_z\zeta_z \end{aligned}}$$

$\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \ldots$: Panel eksenlerinin kosinüs direktörleri