

BÖLÜM 12

ÜÇ-BOYUTLU PANEL YÖNTEMLERİ

- 12.1 Giriş
- 12.2 Üç-boyutlu panel yöntemlerinin genel yapısı
- 12.3 Atnalı girdap elemanlarıyla taşıyıcı çizgi çözümü

12.1 Giriş

Üç-boyutlu potansiyel akımda potansiyel fonksiyonunun herhangi bir P noktasındaki değerinin

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\sigma \cdot \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} \left[\mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \Phi_\infty(P) \quad (3.13a)$$

türünde bir integralle hesaplanabileceği daha önce görülmüştü. Burada S_B katı cidarı, S_W hesaba katılmışsa iz sınırlarını, σ ve μ ise katı yüzey ve iz sınırları boyunca bunların etkilerini temsilen yer alan kaynak ve dublelerin şiddetlerini belirtmektedir.

P noktasında hız vektörünü potansiyel fonksiyonundan

$$\vec{V}(P) = \nabla \Phi \quad (12.1)$$

şeklinde elde etmek mümkündür.

Yukarıdaki bağıntılardan yararlanarak potansiyel fonksiyonunun değerini veya hız vektörünü hesaplayabilmek için kaynak ve duble (veya girdap) şiddetlerini bilmek gerektiği açıktır.

İz üzerindeki tekilliklerin şiddetleri genellikle potansiyel akım hesaplamalarına paralel olarak yapılan (viskoz) iz hesaplamalarından elde edilir.

Katı cidar boyunca tekilliklerin şiddetini elde edebilmek için ise katı cidar üzerindeki sınır şartından yararlanılarak yazılan bir denklemin çözümüne çalışılır.

Ancak bu türden bir denklemde bilinmeyen tekillik şiddetlerinin integral ifadesi içerisinde yer alması çözümü güçleştirir. Bu bakımdan katı cidar panel adı verilen küçük yüzey elemanlarına ayrılarak yukarıdaki ifadeler, örneğin potansiyel fonksiyonu için

$$\Phi(P) = \Phi_\infty(P) + \sum_{j=1}^{NB} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\sigma \cdot \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \sum_{k=1}^{NW} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} \left[\mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS \quad (12.2)$$

olmak üzere, toplamlar şeklinde yazılır.

Bu durumda da bilinmeyen tekillik şiddetleri halen integraller içerisinde olduğundan çözüm güçlük gösterir. Bu bakımdan panel geometrileri ve panel boyunca tekillik şiddetlerinin dağılımları için yapılan özel kabullerle tekillik şiddetleri integral dışına alınarak

$$\Phi(P) = \Phi_\infty(P) + \sum_{j=1}^{NB} (A_j \sigma_j + B_j \mu_j) + \Phi_W(P) \quad (12.3)$$

türünde ifadeler elde edilir. Burada A_j ve B_j büyüklükleri sadece panel geometrisine bağlı integrallerden ibaret olan katsayıları, σ_j ve μ_j ise j inci panel üzerindeki tekillik şiddetini ve dağılımını temsil eden bilinmeyenleri belirtmektedir. Benzeri bağıntıları hız bileşenleri için de yazmak mümkündür.

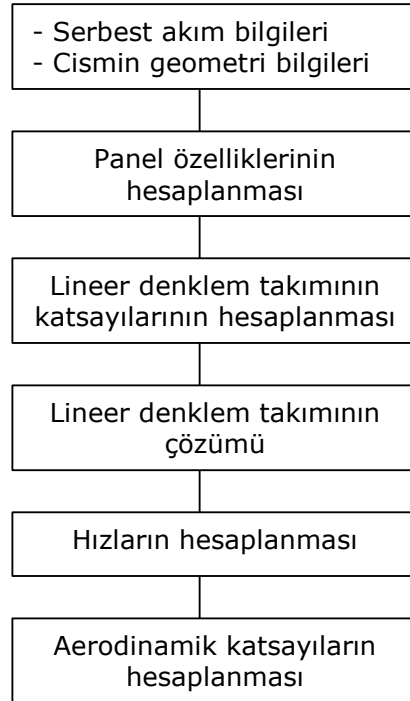
Bu tip bağıntılar paneller üzerinde seçilen kontrol noktalarında yazılıp katı cidar sınır şartı da uygulanarak tekillik şiddetleri için lineer denklemler elde etmek ve bu denklemleri standart yöntemlerle çözerek tekillik şiddetlerini hesaplamak mümkündür.

Literatürde iki-boyutlu halde olduğu gibi panel geometrisinin türüne, tekillik dağılımının cinsine, sınır şartına bağlı olarak farklı panel yöntemleri görülmektedir.

Bu bölümde önce üç-boyutlu panel yöntemlerinin genel yapısına bakılacak, ardından bazı özel panel yöntemleri tanıtılacaktır.

12.2 Panel yöntemlerinin genel yapısı

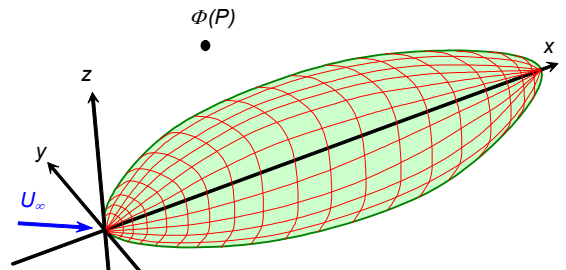
Üç-boyutlu panel yöntemlerinin genel aşamaları da iki-boyutlu haldekine benzerdir:



12.3 Serbest akım ve cismin geometri bilgileri

Pratikte herhangi bir potansiyel akım problemi genellikle *cisme bağlı* bir *eksen takımı*nda incelenir. Yani cismin koordinatları ve serbest akım doğrultusu cisme bağlı bir eksen takımında verilir.

Panel yöntemleri için cisim yüzeyi panel adı verilen küçük elemanlara ayrılır.



Serbest akım hızı V_∞ ve cisme bağlı eksen takımındaki bileşenleri $V_{x'}$, V_y ve V_z olmak üzere hız vektörü

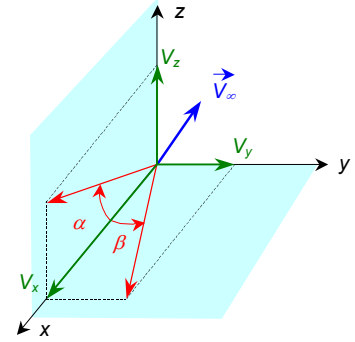
$$\vec{V}_\infty = V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j} + V_{\infty z} \vec{k}$$

şeklinde tanımlanabilir. Aerodinamik uygulamalarında genel olarak şekilde görüldüğü gibi hız vektörünün x eksenine göre $x-z$ düzleminde yaptığı α açısı **hücum açısı** olarak, yatay $x-y$ düzleminde yaptığı β açısı ise **yanlama açısı** olarak adlandırılır. Buna göre hız bileşenleri için sırasıyla

$$V_{\infty x} = V_\infty \cos \alpha \cos \beta$$

$$V_{\infty y} = V_\infty \cos \alpha \sin \beta$$

$$V_{\infty z} = V_\infty \sin \alpha$$



yazmak mümkündür.

Öte yandan serbest akım hız vektörünün eksenlerle yaptığı açılarının kosinüsleri, yani kosinüs direktörleri sırasıyla $\cos \alpha_v$, $\cos \beta_v$ ve $\cos \gamma_v$ ile belirtilirse

$$\begin{array}{l} V_{\infty x} = V_\infty \cos \alpha_v \\ V_{\infty y} = V_\infty \cos \beta_v \\ V_{\infty z} = V_\infty \cos \gamma_v \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \cos \alpha_v = \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \beta_v = \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \gamma_v = \cos \beta \sin \alpha \end{array} \quad (12.4)$$

olduğu görülür.

Serbest akım hızının herhangi bir noktadaki hızı bulmak için yukarıdaki bağıntılar yeterlidir. Ancak serbest akım hızının herhangi bir panelin kontrol noktasındaki hızı bulunurken bu panele bağlı bir teğet-normal eksen takımında ifade edilmesi uygun olur.

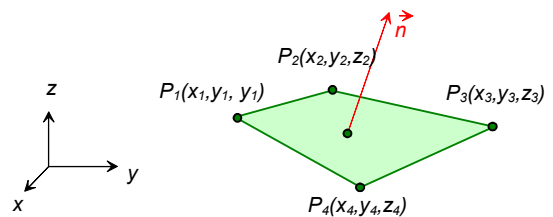
Ayrıca bir panel üzerindeki tekillik dağılımının bir başka panelin kontrol noktasında oluşturacağı etkilerin hesabı için **panele bağlı** bir **eksen takımı**nın kullanılması daha uygun olur. Bu nedenle panel yönteminin pratik uygulaması sırasında öncelikle ve daha ziyade geometrik hesaplamalar ve eksen takımı dönüşümleriyle ilgilenmek gerekmektedir.

12.3.1 Panele bağlı eksen takımının oluşturulması

Cisim üzerindeki panellerden herhangi birini ele alalım. Panel köşe noktalarının koordinatları

$$P_k(x_k, y_k, z_k), \quad k=1,2,3,4$$

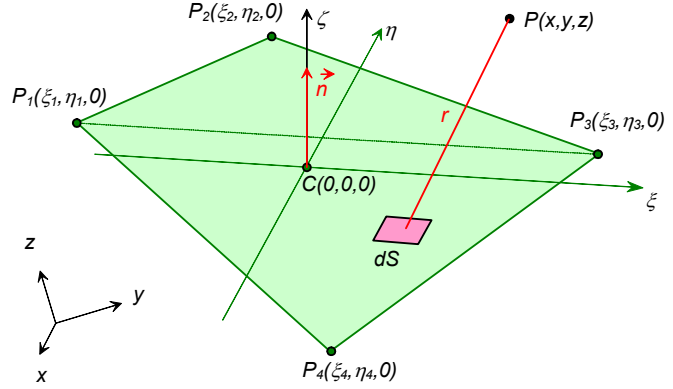
olsun (Bazı hallerde panel köşe sayısının 3 alınması gerekebilir). Bu noktalar cisme dışarıdan panel normali yönüne zıt yönde bakıldığında saat ibreleri yönünde sıralanmış olsun.



Panellerin eğrisel yüzeyler şeklinde seçildiği yüksek dereceden panel yöntemleri şimdilik kolaylık açısından hariç tutularak sadece düzlemsel panellerle ilgilenilecektir. Böyle bir panel için panele bağlı eksen takımının iki ekseninin panel düzleminde ve üçüncüsünün de panel

normali doğrultusunda olduğu, ayrıca eksen takımının başlangıç noktasının panel ağırlık merkezinde yer aldığı kabul edilecektir.

Panele bağlı eksen takımının eksenlerini (ξ, η, ζ) olarak isimlendirelim. Bunlardan ζ eksenini normal doğrultuda olsun. Panel yüzeyindeki diğer eksenlerden birisi özel şartlarda seçilirse diğeri buna dik olacak şekilde kolaylıkla tanımlanır. ξ eksenini panel merkezinden geçen 1 ve 3 köşe noktalarından geçen doğrultuya paralel ve 1-3 yönünde tanımlayalım. Bu doğrultuyu istenilen başka doğrultularda da (örneğin 1-2 köşeleri arasındaki doğrultuda) almak mümkündür.



Bu eksen takımında panel köşe noktaları da

$$P_k(\xi_k, \eta_k, 0), \quad k=1,2,3,4$$

şeklinde adlandırılmaktadır. Panel yöntemiyle hesaplamalar için öncelikle:

- Panel köşe noktalarının panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarının,
- Herhangi bir i 'inci panel kontrol noktasının j 'inci panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarının

elde edilmesi gerekmektedir. Bu hesaplar için de ayrıca

- Panel sentroidlerinin,
- Panel eksenlerinin cisme bağlı eksen takımındaki kosinüs direktörlerinin

bilinmesine gerek vardır.

Bütün bu hesapların kolaylıkla yapılabilmesi için vektörlerin skaler ve vektörel çarpma özelliklerinden yararlanılacaktır.

İki vektörün skaler çarpımı

Cisme bağlı koordinat sisteminde iki vektör

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \\ \vec{V}_2 &= a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k} \end{aligned}$$

şeklinde olsun. İki vektörün skaler çarpımı, aralarındaki açı θ olmak üzere genel olarak



$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cos \theta$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan bu vektörleri şiddetleri ve skaler çarpımları bileşenleri cinsinden sırasıyla

$$|\vec{V}_1| = d_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}, \quad |\vec{V}_2| = d_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}, \quad |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

şeklinde yazılabilir. Bunlar önceki bağıntıda kullanılarak

$$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{d_1 d_2}$$

elde edilir. Bu bağıntı

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \quad (12.5a)$$

şeklinde de düzenlenebilir. Burada

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{d_1} &= \cos \alpha_1, & \frac{b_1}{d_1} &= \cos \beta_1, & \frac{c_1}{d_1} &= \cos \gamma_1 \\ \frac{a_2}{d_2} &= \cos \alpha_2, & \frac{b_2}{d_2} &= \cos \beta_2, & \frac{c_2}{d_2} &= \cos \gamma_2 \end{aligned} \quad (12.5b)$$

büyükükleri vektörlerin cisme bağlı eksen takımındaki kosinüs direktörleri, yani eksenlerle yaptıkları açılarının kosinüsleridir.

Skaler çarpma ayrıca bir vektörün diğeri üzerindeki izdüşümü ile ikinci vektörün şiddetinin çarpımı olarak da değerlendirilebilir.

İki vektörün vektörel çarpımı

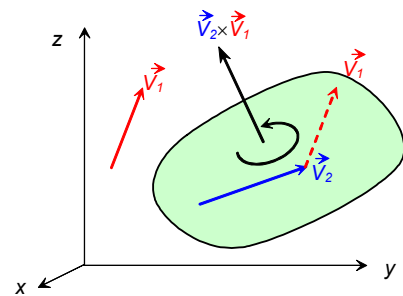
Aynı vektörlerin vektörel çarpımı için matris formda

$$\vec{V}_2 \times \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Bu determinat hesaplanarak

$$\begin{aligned} \vec{V}_2 \times \vec{V}_1 &= \begin{vmatrix} b_{13} & c_{13} \\ b_{12} & c_{12} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_{13} & c_{13} \\ a_{12} & c_{12} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_{13} & b_{13} \\ a_{12} & b_{12} \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (b_{13}c_{12} - b_{12}c_{13})\vec{i} + (c_{13}a_{12} - c_{12}a_{13})\vec{j} + (a_{13}b_{12} - a_{12}a_{13})\vec{k} \end{aligned} \quad (12.6)$$

elde edilir. Çarpımın sonucu yeni bir vektör olup bu vektör çarpılan iki vektörün oluşturdukları düzleme diktir. Vektörün yönü ise çarpımdaki sıraya bağlıdır. Örneğin şekildeki



örnekte çarpım sonucu elde edilen vektör sağ el kuralına göre düzlemden yukarıya doğru yönlendirilmiştir.

Bir vektörün başka bir eksen takımına dönüştürülmesi

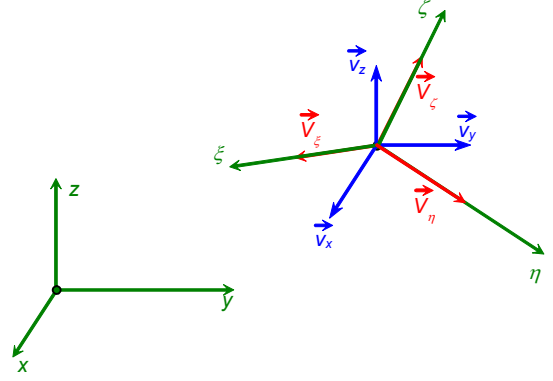
Bir vektör (x, y, z) ve (ξ, η, ζ) eksen takımlarında sırasıyla

$$\vec{V}_{xyz} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (12.7a)$$

$$\vec{V}_{\xi\eta\zeta} = v_\xi \vec{e}_\xi + v_\eta \vec{e}_\eta + v_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (12.7b)$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

Vektörün bileşenleri bir eksen takımında bilindiğinde diğerindeki bileşenleri bulabilmek için eksen takımlarını birbirine bağlayan ilişkiye ihtiyaç vardır.



(ξ, η, ζ) eksen takımındaki eksenlerin birim vektörleri (x, y, z) eksen takımında sırasıyla

$$\begin{aligned} \vec{e}_\xi &= \cos \alpha_\xi \vec{i} + \cos \beta_\xi \vec{j} + \cos \gamma_\xi \vec{k} \\ \vec{e}_\eta &= \cos \alpha_\eta \vec{i} + \cos \beta_\eta \vec{j} + \cos \gamma_\eta \vec{k} \\ \vec{e}_\zeta &= \cos \alpha_\zeta \vec{i} + \cos \beta_\zeta \vec{j} + \cos \gamma_\zeta \vec{k} \end{aligned} \quad (12.8)$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradaki $(\cos \alpha_\xi, \cos \beta_\xi, \cos \gamma_\xi, \cos \alpha_\eta, \dots, \cos \gamma_\zeta)$ büyüklükleri eksenlerin kosinüs direktörleridir.

Bu bağıntılar (12.7b) de kullanılarak

$$\begin{aligned} \vec{V}_{\xi\eta\zeta} = v_\xi \vec{e}_\xi + v_\eta \vec{e}_\eta + v_\zeta \vec{e}_\zeta &= v_\xi (\cos \alpha_\xi \vec{i} + \cos \beta_\xi \vec{j} + \cos \gamma_\xi \vec{k}) \\ &+ v_\eta (\cos \alpha_\eta \vec{i} + \cos \beta_\eta \vec{j} + \cos \gamma_\eta \vec{k}) \\ &+ v_\zeta (\cos \alpha_\zeta \vec{i} + \cos \beta_\zeta \vec{j} + \cos \gamma_\zeta \vec{k}) \end{aligned}$$

ve (12.7a) ile karşılaştırılarak

$$\begin{aligned} v_x &= v_\xi \cos \alpha_\xi + v_\eta \cos \alpha_\eta + v_\zeta \cos \alpha_\zeta \\ v_y &= v_\xi \cos \beta_\xi + v_\eta \cos \beta_\eta + v_\zeta \cos \beta_\zeta \\ v_z &= v_\xi \cos \gamma_\xi + v_\eta \cos \gamma_\eta + v_\zeta \cos \gamma_\zeta \end{aligned} \quad (12.9)$$

elde edilir

Bu dönüşümün tersi yapılmak, yani hız vektörü (x, y, z) eksen takımında bilinip de (ξ, η, ζ) eksen takımında hesaplanmak istenirse, hız vektörünün her bir eksen doğrultusundaki bileşenini bulmak için bu eksene ait birim vektörle skaler olarak çarpılması yeterli olur. Örneğin ξ eksen doğrultusundaki hız bileşeni için

$$v_{\xi} = \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{e}_{\xi} = (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot (\cos \alpha_{\xi} \vec{i} + \cos \beta_{\xi} \vec{j} + \cos \gamma_{\xi} \vec{k})$$

$$v_{\xi} = \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{e}_{\xi} = v_x \cos \alpha_{\xi} + v_y \cos \beta_{\xi} + v_z \cos \gamma_{\xi} \quad (12.10a)$$

bulunur. Benzeri işlemle diğer hız bileşenleri için de

$$v_{\eta} = \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{e}_{\eta} = v_x \cos \alpha_{\eta} + v_y \cos \beta_{\eta} + v_z \cos \gamma_{\eta} \quad (12.10b)$$

$$v_{\zeta} = \vec{V}_{xyz} \cdot \vec{e}_{\zeta} = v_x \cos \alpha_{\zeta} + v_y \cos \beta_{\zeta} + v_z \cos \gamma_{\zeta} \quad (12.10c)$$

elde edilebilir.

12.3.2 Panel sentroidinin koordinatları

Panel sentroidinin cisme bağlı eksen takımındaki koordinatları

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{I}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ y_c &= \frac{I}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ z_c &= \frac{I}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \end{aligned} \quad (12.11a)$$

şeklinde hesaplanabilir. Panelin üçgenel olması halinde sentroid koordinatları

$$x_c = \frac{I}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_c = \frac{I}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad z_c = \frac{I}{3}(z_1 + z_2 + z_3) \quad (12.11b)$$

şeklinde hesaplanacaktır.

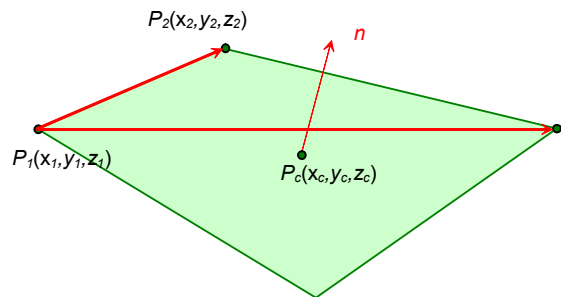
12.3.3 Panel eksenlerinin cisme bağlı eksen takımındaki kosinüs direktörleri:

Panele bağlı eksen takımında ζ ekseninin panele dik (normal doğrultusunda) ve cisim yüzeyinden dışarıya doğru olacağı daha önce belirtilmişti.

Panel üzerindeki herhangi iki vektörün vektörel çarpımı panel yüzeyine dik olacaktır. Buna göre panelin P_1 , P_2 ve P_3 köşe noktalarını kullanarak

$$\vec{P}_1 \vec{P}_3 \times \vec{P}_1 \vec{P}_2 \parallel \vec{\zeta}$$

yazmak mümkündür. ζ eksenini doğrultusunun cisme bağlı eksen takımındaki kosinüs direktörleri



$$e_\zeta = \cos \alpha_\zeta \vec{i} + \cos \beta_\zeta \vec{j} + \cos \gamma_\zeta \vec{k} \quad (12.12)$$

şeklinde ifade edilirse

$$\cos \alpha_\zeta \vec{i} + \cos \beta_\zeta \vec{j} + \cos \gamma_\zeta \vec{k} = \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_3 \times \vec{P}_1 \vec{P}_2}{\left| \vec{P}_1 \vec{P}_3 \times \vec{P}_1 \vec{P}_2 \right|}$$

şeklinde hesaplanabileceği görülür. Buna göre, panel üzerindeki vektörler için

$$\vec{P}_1 \vec{P}_2 = (a_{12}, b_{12}, c_{12}), \quad a_{12} = x_2 - x_1, \quad b_{12} = y_2 - y_1, \quad c_{12} = z_2 - z_1 \quad (12.13a)$$

$$\vec{P}_1 \vec{P}_3 = (a_{13}, b_{13}, c_{13}), \quad a_{13} = x_3 - x_1, \quad b_{13} = y_3 - y_1, \quad c_{13} = z_3 - z_1 \quad (12.13b)$$

yazılarak yukarıdaki vektörel çarpım

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 \vec{P}_3 \times \vec{P}_1 \vec{P}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{13} & b_{13} & c_{13} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{13} & c_{13} \\ b_{12} & c_{12} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_{13} & c_{13} \\ a_{12} & c_{12} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_{13} & b_{13} \\ a_{12} & b_{12} \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (b_{13}c_{12} - b_{12}c_{13})\vec{i} + (c_{13}a_{12} - c_{12}a_{13})\vec{j} + (a_{13}b_{12} - a_{12}b_{13})\vec{k} \end{aligned}$$

veya daha kısa bir gösterimle düzenlenerek

$$\vec{P}_1 \vec{P}_3 \times \vec{P}_1 \vec{P}_2 = \zeta_x \vec{i} + \zeta_y \vec{j} + \zeta_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} \zeta_x = B_{13}C_{12} - B_{12}C_{13} \\ \zeta_y = C_{13}A_{12} - C_{12}A_{13} \\ \zeta_z = A_{13}B_{12} - A_{12}B_{13} \end{cases} \quad (12.14)$$

şeklinde yazılabilir. Vektörün şiddeti

$$\left| \vec{P}_1 \vec{P}_3 \times \vec{P}_1 \vec{P}_2 \right| = d = \sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2} \quad (12.15)$$

olup, panel ζ ekseninin kosinüs direktörleri için sonuçta

$$\cos \alpha_\zeta = \frac{\zeta_x}{d}, \quad \cos \beta_\zeta = \frac{\zeta_y}{d}, \quad \cos \gamma_\zeta = \frac{\zeta_z}{d} \quad (12.16)$$

elde edilir.

Panelin, P_1P_3 doğrultusuna paralel seçileceği daha önce belirtilmiş olan ζ ekseninin kosinüs direktörleri de

$$\vec{e}_\xi = \cos \alpha_\xi \vec{i} + \cos \beta_\xi \vec{j} + \cos \gamma_\xi \vec{k} \quad (12.17)$$

şeklinde ifade edilirse

$$\cos \alpha_\xi \vec{i} + \cos \beta_\xi \vec{j} + \cos \gamma_\xi \vec{k} = \frac{\vec{P}_1 P_3}{|\vec{P}_1 P_3|}$$

şeklinde hesaplanabileceği görülür. Buradaki vektör için daha önce (12.13b) ile

$$\vec{P}_1 P_3 = (a_{13}, b_{13}, c_{13}), \quad a_{13} = x_3 - x_1, \quad b_{13} = y_3 - y_1, \quad c_{13} = z_3 - z_1$$

bağıntısı verilmişti. Vektörün şiddeti de

$$|\vec{P}_1 P_3| = d = \sqrt{a_{13}^2 + b_{13}^2 + c_{13}^2} \quad (12.18)$$

olup, sonuç olarak olan ξ ekseninin kosinüs direktörleri için

$$\cos \alpha_\xi = \frac{a_{13}}{d}, \quad \cos \beta_\xi = \frac{b_{13}}{d}, \quad \cos \gamma_\xi = \frac{c_{13}}{d} \quad (12.19)$$

elde edilir.

Panel η eksenini diğer iki eksene dik olup, vektörel çarpma özelliğinden yararlanarak

$$\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_\xi = \vec{e}_\eta$$

yazılabilir. Veya

$$\vec{e}_\eta = \cos \alpha_\eta \vec{i} + \cos \beta_\eta \vec{j} + \cos \gamma_\eta \vec{k} \quad (12.20)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \cos \alpha_\eta \vec{i} + \cos \beta_\eta \vec{j} + \cos \gamma_\eta \vec{k} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha_\zeta & \cos \beta_\zeta & \cos \gamma_\zeta \\ \cos \alpha_\xi & \cos \beta_\xi & \cos \gamma_\xi \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \beta_\zeta & \cos \gamma_\zeta \\ \cos \beta_\xi & \cos \gamma_\xi \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \cos \alpha_\zeta & \cos \gamma_\zeta \\ \cos \alpha_\xi & \cos \gamma_\xi \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \cos \alpha_\zeta & \cos \beta_\zeta \\ \cos \alpha_\xi & \cos \beta_\xi \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_\eta &= \cos \beta_\zeta \cos \gamma_\xi - \cos \beta_\xi \cos \gamma_\zeta \\ \cos \beta_\eta &= \cos \gamma_\zeta \cos \alpha_\xi - \cos \gamma_\xi \cos \alpha_\zeta \\ \cos \gamma_\eta &= \cos \alpha_\zeta \cos \beta_\xi - \cos \alpha_\xi \cos \beta_\zeta \end{aligned} \quad (12.21)$$

elde edilir.

12.3.4 Panel köşe noktalarının panele bağlı eksen takımındaki koordinatları

Panel köşe noktalarından herhangi birinin cisme bağlı koordinat sistemindeki koordinatları $P_k(x_k, y_k, z_k)$ ve panel senroidinin koordinatları da $C(x_c, y_c, z_c)$ olsun. Bu iki nokta arasındaki vektör

$$\vec{P_c P_k} = a_{ck} \vec{i} + b_{ck} \vec{j} + c_{ck} \vec{k} \quad (12.22a)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} a_{ck} &= x_k - x_c \\ b_{ck} &= y_k - y_c \\ c_{ck} &= z_k - z_c \end{aligned} \quad (12.22b)$$

ve ayrıca vektörün boyu da

$$d_{ck} = \left| \vec{P_c P_k} \right| = \sqrt{a_{ck}^2 + b_{ck}^2 + c_{ck}^2} \quad (12.22c)$$

dir. Köşe noktasının panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarını bulmak için $\vec{P_c P_k}$ vektörünün ilgili eksen üzerindeki izdüşümünü almak yeterlidir. Bunun için de vektörün ilgili eksenin birim vektörü ile skaler çarpımı yapılmalıdır. Buna göre:

$$\xi_k = \vec{P_c P_k} \cdot \vec{e}_\xi \quad \rightarrow \quad \xi_k = a_{ck} \cos \alpha_\xi + b_{ck} \cos \beta_\xi + c_{ck} \cos \gamma_\xi \quad (12.23a)$$

$$\eta_k = \vec{P_c P_k} \cdot \vec{e}_\eta \quad \rightarrow \quad \eta_k = a_{ck} \cos \alpha_\eta + b_{ck} \cos \beta_\eta + c_{ck} \cos \gamma_\eta \quad (12.23b)$$

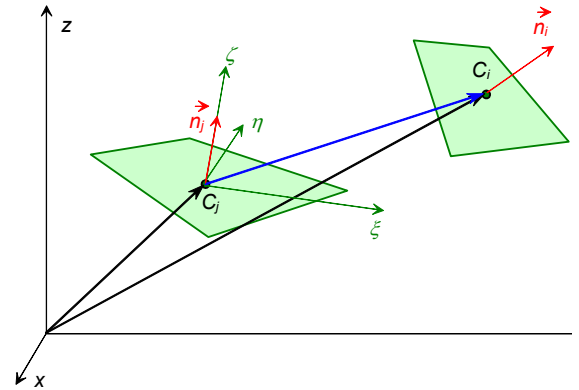
elde edilir. Köşe noktaları panel üzerinde olduğundan ζ koordinatları sıfır olacaktır.

12.3.5 i 'inci panel kontrol noktasının j 'inci panel eksen takımındaki koordinatları

i 'inci panelin C_i kontrol noktasının (panel sentroidi), j 'inci panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarını bulmak için $\vec{C_j C_i}$ vektörünün j 'inci panelin eksenleri üzerindeki izdüşümlerini almak gerekir.

$$\vec{C_j C_i} = A_{ji} \vec{i} + B_{ji} \vec{j} + C_{ji} \vec{k} \quad (12.24a)$$

$$\begin{aligned} A_{ji} &= X_{ci} - X_{cj} \\ B_{ji} &= Y_{ci} - Y_{cj} \\ C_{ji} &= Z_{ci} - Z_{cj} \end{aligned} \quad (12.24b)$$



olup panel eksenlerinin kosinüs direktörleri daha önce tanımlanmıştı. Buna göre C_i kontrol noktasının koordinatları

$$\xi_i = C_j \vec{C}_i \cdot \vec{e}_\xi \rightarrow \boxed{\xi_i = a_{ji} \cos \alpha_\xi + b_{ji} \cos \beta_\xi + c_{ji} \cos \gamma_\xi} \quad (12.25a)$$

$$\eta_i = C_j \vec{C}_i \cdot \vec{e}_\eta \rightarrow \boxed{\eta_i = a_{ji} \cos \alpha_\eta + b_{ji} \cos \beta_\eta + c_{ji} \cos \gamma_\eta} \quad (12.25b)$$

$$\zeta_i = C_j \vec{C}_i \cdot \vec{e}_\zeta \rightarrow \boxed{\zeta_i = a_{ji} \cos \alpha_\zeta + b_{ji} \cos \beta_\zeta + c_{ji} \cos \gamma_\zeta} \quad (12.25c)$$

olarak elde edilir.

12.3.6 Serbest akım hızının panel eksen takımındaki bileşenleri

Serbest akım hızının herhangi bir panelin kontrol noktasındaki hıza teğetsel ve normal doğrultulardaki katkılarını bulmak için hız vektörünün bu panel eksenleri üzerindeki izdüşümlerini almak gerekir. Bunun için serbest akım hız vektörünün cisme bağlı eksen takımında

$$\vec{V}_\infty = V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j} + V_{\infty z} \vec{k}$$

şeklinde tanımlandığı hatırlanır, i 'inci panele bağlı eksen takımında aynı vektör

$$\vec{V}_{\infty \xi \eta \zeta} = V_{\infty \xi} \vec{e}_\xi + V_{\infty \eta} \vec{e}_\eta + V_{\infty \zeta} \vec{e}_\zeta$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned} V_{\infty \xi} &= \vec{V}_\infty \cdot \vec{e}_\xi = (V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j} + V_{\infty z} \vec{k}) \cdot (\cos \alpha_\xi \vec{i} + \cos \beta_\xi \vec{j} + \cos \gamma_\xi \vec{k}) \\ V_{\infty \eta} &= \vec{V}_\infty \cdot \vec{e}_\eta = (V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j} + V_{\infty z} \vec{k}) \cdot (\cos \alpha_\eta \vec{i} + \cos \beta_\eta \vec{j} + \cos \gamma_\eta \vec{k}) \\ V_{\infty \zeta} &= \vec{V}_\infty \cdot \vec{e}_\zeta = (V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j} + V_{\infty z} \vec{k}) \cdot (\cos \alpha_\zeta \vec{i} + \cos \beta_\zeta \vec{j} + \cos \gamma_\zeta \vec{k}) \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\begin{aligned} V_{\infty \xi} &= V_{\infty x} \cos \alpha_\xi + V_{\infty y} \cos \beta_\xi + V_{\infty z} \cos \gamma_\xi \\ V_{\infty \eta} &= V_{\infty x} \cos \alpha_\eta + V_{\infty y} \cos \beta_\eta + V_{\infty z} \cos \gamma_\eta \\ V_{\infty \zeta} &= V_{\infty x} \cos \alpha_\zeta + V_{\infty y} \cos \beta_\zeta + V_{\infty z} \cos \gamma_\zeta \end{aligned} \quad (12.26)$$

elde edilir.

12.3.7 Hız bileşenlerinin i 'inci panele bağlı eksen takımına aktarılması

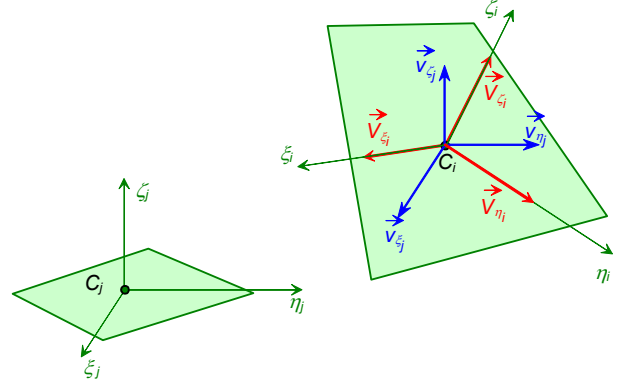
Akım hızlarına göre formüleleştirilen panel yöntemlerinde j 'inci panel üzerindeki tekilliklerin bu panele bağlı eksen takımında i 'inci panel kontrol noktasında indüklediği hız bileşenlerinin i 'inci panele bağlı eksen takımında ifade edilmesi gerekmektedir. Bunun için hız bileşenlerinin

- önce cisme bağlı eksen takımına aktarılması,

- ardından i 'inci panele bağlı eksen takımına aktarılması

uygun olur.

Herhangi bir j 'inci panel üzerindeki kaynak dağılımının i 'inci panelin kontrol noktasında indüklediği bozuntu hız vektörünü j 'inci panele, cisme ve i 'inci panele bağlı eksen takımlarında sırasıyla:



$$\vec{V}_j = v_{\xi_j} \vec{e}_{\xi_j} + v_{\eta_j} \vec{e}_{\eta_j} + v_{\zeta_j} \vec{e}_{\zeta_j} \quad (12.27a)$$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad (12.27b)$$

$$\vec{V}_i = v_{\xi_i} \vec{e}_{\xi_i} + v_{\eta_i} \vec{e}_{\eta_i} + v_{\zeta_i} \vec{e}_{\zeta_i} \quad (12.27c)$$

ile gösterelim. Buna göre cisme bağlı eksen takımında hız bileşenleri, örneğin x bileşeni için

$$\begin{aligned} v_x = \vec{V}_j \cdot \vec{i} &= (v_{\xi_j} \vec{e}_{\xi_j} + v_{\eta_j} \vec{e}_{\eta_j} + v_{\zeta_j} \vec{e}_{\zeta_j}) \cdot \vec{i} \\ &= \left[\begin{aligned} &v_{\xi_j} (\cos \alpha_{\xi_j} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_j} \vec{j} + \cos \gamma_{\xi_j} \vec{k}) + \\ &v_{\eta_j} (\cos \alpha_{\eta_j} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_j} \vec{j} + \cos \gamma_{\eta_j} \vec{k}) + \\ &v_{\zeta_j} (\cos \alpha_{\zeta_j} \vec{i} + \cos \beta_{\zeta_j} \vec{j} + \cos \gamma_{\zeta_j} \vec{k}) \end{aligned} \right] \cdot \vec{i} \end{aligned}$$

eşitliği düzenlenerek

$$\boxed{v_x = v_{\xi_j} \cos \alpha_{\xi_j} + v_{\eta_j} \cos \alpha_{\eta_j} + v_{\zeta_j} \cos \alpha_{\zeta_j}} \quad (12.28a)$$

şeklinde ve benzeri işlemlerle diğer bileşenler de

$$\boxed{v_y = \vec{V}_j \cdot \vec{j} = v_{\xi_j} \cos \beta_{\xi_j} + v_{\eta_j} \cos \beta_{\eta_j} + v_{\zeta_j} \cos \beta_{\zeta_j}} \quad (12.28b)$$

$$\boxed{v_z = \vec{V}_j \cdot \vec{k} = v_{\xi_j} \cos \gamma_{\xi_j} + v_{\eta_j} \cos \gamma_{\eta_j} + v_{\zeta_j} \cos \gamma_{\zeta_j}} \quad (12.28c)$$

şeklinde elde edilir. i 'inci panel üzerindeki hız bileşenleri de, örneğin ξ bileşeni için

$$\begin{aligned} v_{\xi_i} = \vec{V} \cdot \vec{e}_{\xi_i} &= (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot \vec{e}_{\xi_i} \\ &= (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot (\cos \alpha_{\xi_i} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_i} \vec{j} + \cos \gamma_{\xi_i} \vec{k}) \end{aligned}$$

eşitliği düzenlenerek

$$v_{\xi_i} = \vec{V} \cdot \vec{e}_{\xi_i} = v_x \cos \alpha_{\xi_i} + v_y \cos \beta_{\xi_i} + v_z \cos \gamma_{\xi_i} \quad (12.29a)$$

şeklinde ve benzeri işlemlerle diğer bileşenler de

$$v_{\eta_i} = \vec{V} \cdot \vec{e}_{\eta_i} = v_x \cos \alpha_{\eta_i} + v_y \cos \beta_{\eta_i} + v_z \cos \gamma_{\eta_i} \quad (12.29b)$$

$$v_{\zeta_i} = \vec{V} \cdot \vec{e}_{\zeta_i} = v_x \cos \alpha_{\zeta_i} + v_y \cos \beta_{\zeta_i} + v_z \cos \gamma_{\zeta_i} \quad (12.29c)$$

şeklinde elde edilir.

12.3 Atmalı girdap elemanlarıyla taşıyıcı çizgi çözümü

İlk örnek olarak taşıyıcı çizgi teorisinin sayısal bir çözümü yapılacaktır. Bu uygulama taşıyıcı çizgi teorisinin sınırlarını gösterecek olup, uygulanacak sayısal çözüm yönteminin kanat ok açısı, dihedral açısı ve hatta kayma etkilerini içerecek biçimde genelleştirilmesi kolaylıkla mümkündür. Burada kolaylık açısından veter doğrultusunda tek girdap kullanılacaktır. Ancak yöntemin daha çok sayıda girdap içerecek biçimde değiştirilmesi mümkündür.

Bu yöntem küçük bozuntular teorisi çerçevesinde geçerli olup, bu bakımdan incelenen kanatların açıklık oranlarının büyük ($AR > 4$) olacağı kabul edilecektir.

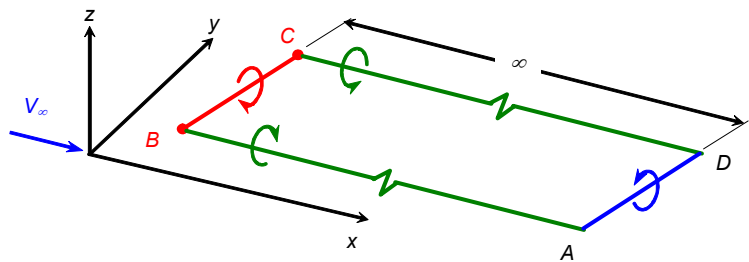
Girdap çizgisi Laplace denkleminin bir çözümü olup, sağlanması gereken tek sınır şartı kanat yüzeyine dik hız bileşeninin sıfır olmasından ibarettir.

$$\nabla(\Phi_\infty + \Phi) \cdot \vec{n} = 0 \quad (12.1)$$

Prandtl'ın klasik taşıyıcı çizgi teorisinde kanat bir kartezyen eksen takımında x-y düzleminde yer almakta olup, sınır şartı gereği kanada bağlı girdaplarla izdeki girdapların ve serbest akımın indüklediği yüzeye dik hız bileşenleri toplamı sıfır olacaktır:

$$w_b + w_i + V_\infty \alpha = 0 \quad (12.2)$$

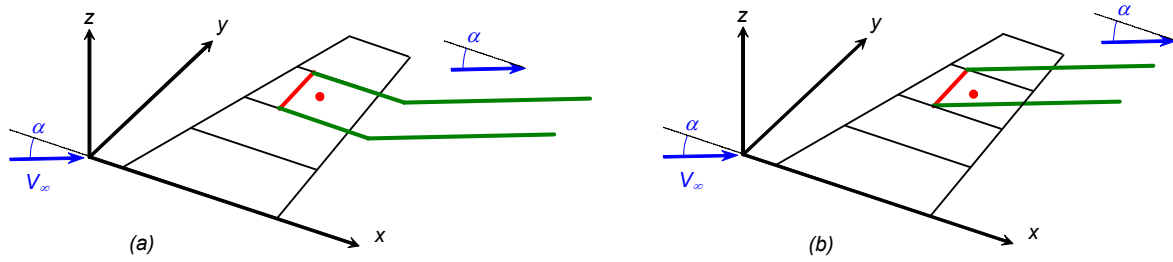
Bu problemi çözmek için Şekil 12.1 de görüldüğü gibi at nalı girdap elemanları kullanılacaktır. Bu eleman kanat taşımalarını modelleyen bir bağlı girdap (BC) ile izi temsil eden iki yarı-sonsuz girdaptan oluşmaktadır. Girdabın BC kısmı y eksenine paralel olmak zorunda değildir. Ancak izi temsil eden kısımları serbest akıma paralel olmak zorundadır. Böylece girdabı bu kısımlarına herhangi bir aerodinamik yük etkimeyecektir.



Şekil 12.1

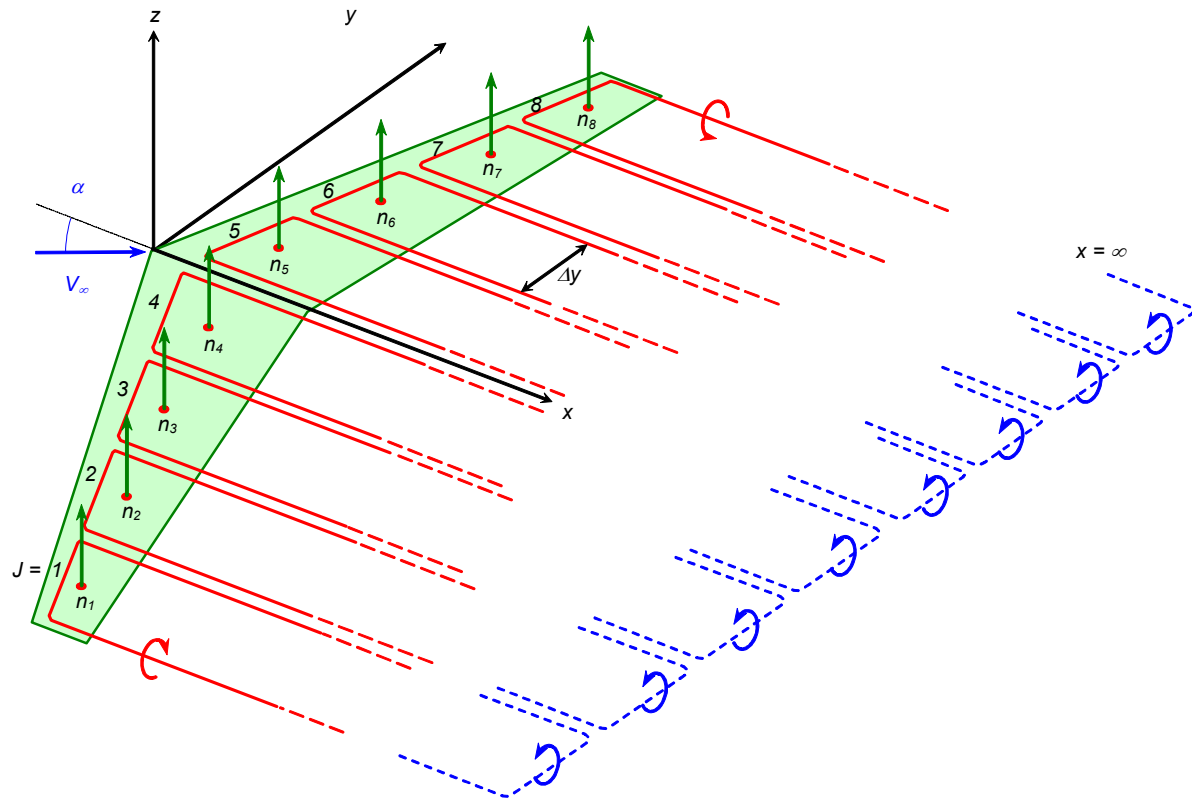
Helmholtz kuralının ihlal edilmemesi için aslında bu at-nalı girdap sisteminin sonsuz gerideki A ve D noktaları arasında sistemi halka şekline getiren bir girdap daha bulunmakla birlikte bu girdabın sonsuzda olması nedeniyle kanat üzerindeki etkisi ihmal edilmektedir.

Uzak izin serbest akıma paralel olma şartı modelleme zorluğu yaratır. Bu husus Şekil 12.2a da gösterilmiş olup, kaçma girdabı serbest akıma paralel olmak için firar kenarından sonra bükülmek zorunda kalmaktadır.



Şekil 12.2

Bir başka olasılık da Şekil 12.2b de görüldüğü gibi firar kenarında bükülmeyip akıma paralel kalan bir at-nalı girdabı almaktır. Hücum açısının çok küçük kabul edilmesi halinde izin Şekil 12.3 de gösterildiği gibi tamamıyla kanat düzlemi içinde (x - y düzleminde) alınması mümkündür.

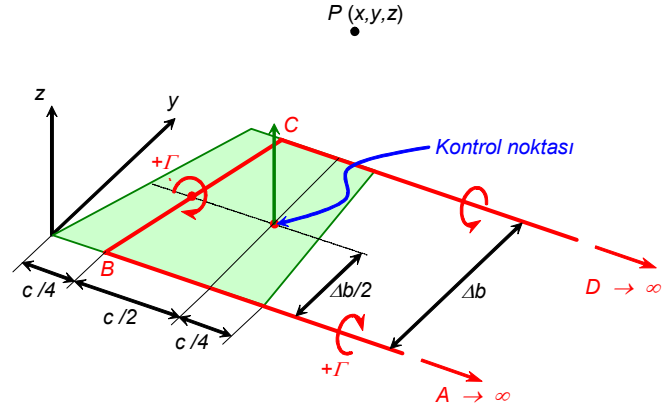


Şekil 12.3

Burada taşıyıcı çizgi modelinin sayısal çözümü amaçlandığından Şekil 12.3 deki küçük hücum açısı kabulüne dayanan model kullanılacaktır. Ancak yöntem 12.2a da gösterilen daha genel haller için de kullanılabilir.

Yöntem gereği ince kanat yüzeyi şekil 12.3 de gösterildiği gibi elemanlara (panel) ayrılır. Bu elemanlardan tipik birisi Şekil 12.4 de gösterilmiştir.

Asılı-girdap modelinin sonucuna dayanılarak burada bağlı girdap kanat hücum kenarından çeyrek veter kadar geriye konulmakta, panel kontrol noktası ise panel hücum kenarından üç-çeyrek veter boyu kadar geride (üç-çeyrek veter noktası) yer almaktadır. Girdabın şiddeti bütün at-nalı boyunca sabit olup, pozitif yönü şekilde gösterilmiştir.



Şekil 12.4

Yöntemin dayandığı asılı-girdap modelinde iki-boyutlu bir Kutta şartı uygulanmakta olup, bu üç-boyutlu modelde Kutta şartı (yaklaşık bir şekilde)

$$\gamma_{FK} = 0 \quad (12.3)$$

olmak üzere uygulanmaktadır.

Böyle bir eleman için herhangi bir P noktasında indüklenen hız

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \cdot \left(\frac{\vec{r}_0 \times \vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{r}_0 \times \vec{r}_2}{r_2} \right) \quad (10.115)$$

denklemini at-nalı girdabının her bir parçası için bir kez uygulanarak hesaplanır. Burada küçük bozuntulu taşıyıcı-çizgi yaklaşımı ile

$$y_A = y_B, \quad y_C = y_D, \quad x_A = x_D \rightarrow \infty$$

olup ∞ sembolü girdap çizgisinin x_A veya x_D nin ötesindeki etkisinin ihmal edilebileceği anlamına gelir. Pratikte sonsuz ile kanattan geriye açıklığın en az 20 katı kadar bir mesafe kastedilmektedir.

Bu noktada $x=\infty$ da $z_A = x_A \sin \alpha$ ve $z_D = x_D \sin \alpha$ olarak izi serbest akımla aynı doğrultuya getirmek mümkündür. Veya Şekil 12.2a'daki gibi kaçma girdabını iki parçaya ayırıp her bir parçanın indüklemesini ayrı hesaplamak mümkündür.

At-nalı girdabının üç parçasının indüklemeleri hesaplandıktan sonra bunlar toplanarak bu elemanın toplam indüklemesi elde edilir.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad (12.4)$$

İşlemler sırasında at-nalı girdabının kaçma girdabı kollarının indükledikleri aşağı sapma hızlarını bağlı girdap kısmının indüklediği hızdan ayırıp saklamakta yarar bulunmaktadır. Zira bu bilgi daha sonra indüklenmiş sürüklemenin hesaplanmasında kullanılacaktır.

$$\vec{v}^* = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \quad (12.5)$$

Ayrıklaştırma ve ağ üretimi

Uygulama için kanat başlangıçta açıklık boyunca N adet panele ayrılır. Panel kenarları x eksenine paralel kabul edilmektedir. Şekil 12.3 deki örnekte panel sayısı 8 alınmıştır.

Bu aşamada ayrıca S_j panel alanları, \vec{n}_j normal vektörleri ve kontrol noktalarının (x_j, y_j, z_j) koordinatları hesaplanır. Panel düz levha şeklinde alınmışsa normal vektörü

$$\vec{n}_j = \sin \alpha_j \vec{i} + \cos \alpha_j \vec{k} \quad (12.6)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Etkileşim katsayıları ve denklem sisteminin çözümü

Yüzey sınır şartını sağlamak için herbir panel kontrol noktasında (12.2) denklemi uygulanır.

Herhangi bir j inci panel üzerindeki atnalı girdabının herhangi bir i inci panelin kontrol noktasında indüklediği normal hız $\vec{v}_{ij}\Gamma_j$ olmak üzere, i 'inci kontrol noktasında bu denklemin

$$\left[\vec{v}_{11}\Gamma_1 + \vec{v}_{12}\Gamma_2 + \vec{v}_{13}\Gamma_3 + \dots + \vec{v}_{1N}\Gamma_N + \vec{V}_\infty \right] \cdot \vec{n}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde olacağı gösterilebilir. Bu denklem

$$A_{ij} = \vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_i, \quad R_i = \vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i \quad (12.7)$$

olmak üzere

$$\boxed{\sum_{j=1}^N A_{ij}\Gamma_j = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N} \quad (12.8)$$

şeklinde de düzenlenebilir.

Ortaya çıkan denklem sistemi diyagonal baskın bir katsayılar matrisine sahip olup, herhangi bir standart çözüm yöntemiyle (Gauss eliminasyon vb. gibi) çözülebilir.

Art işlemler: Basınçlar, aerodinamik yükler, hızlar:

Denklem sisteminin çözümü bilinmeyen girdap şiddetlerini verecektir. Herbir bağlı girdabın taşıması Kutta-Joukowski taşıma kanunu kullanılarak

$$\Delta L_j = \rho V_\infty \Gamma_j \Delta y_j \quad (12.9)$$

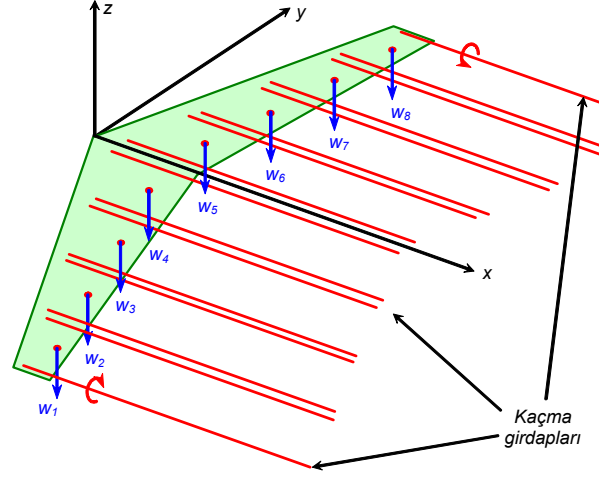
şeklinde hesaplanabilir. Burada Δy_j panelin bağlı girdabının serbest akıma dik doğrultudaki izdüşümüdür. Kanadın toplam taşıması herbir panelin katkılarının toplamına eşit olacaktır.

İndüklenmiş sürüklenme hesabı için indüklenmiş hız esas alınarak Kutta-Joukowski taşıma kanunu bir kez daha yazılırsa

$$\Delta D_j = -\rho w_{ind_j} \Gamma_j \Delta y_j \quad (12.10)$$

elde edilir. Burada w_{ind_j} büyüklüğü j 'inci panel kontrol noktasındaki indüklenmiş hız olup, bütün kaçma girdaplarının bu noktada indükledikleri dikey hız bileşenlerinin toplamına eşittir (Şekil 12.5).

Herbir panele ait indüklenmiş sürüklemeler toplanarak kanada etkiyen toplam indüklenmiş sürüklenme elde edilir.



Şekil 12.5

İndüklenmiş sürüklenme momentum denklemi yardımıyla firar kenarından yeterince uzakta serbest akıma dik Trefftz düzleminde de hesaplanabilir. İze bir kuvvet etkemediğinden kaçma girdapları Trefftz düzlemine dik olacaklardır. Dolayısıyla indüklenmiş hızları iki boyutlu formülle hesaplanabilir. Sonuç olarak her bir kaçma girdabı üzerindeki aşağı sapma hızı

$$w_j = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N_w} \frac{x_j - x_i}{(z_j - z_i)^2 + (x_j - x_i)^2}$$

Olur. Burada N_w büyüklüğü kaçma girdaplarının sayısını belirtmektedir. Herhangi bir girdabın kendi üzerindeki indüklemesi sıfır alınacaktır. Kaçma girdap çizgileri üzerindeki aşağı sapma hızları bu şekilde elde edildikten sonra kanadın indüklenmiş sürüklemesi

$$D = -\frac{\rho}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) w dy = -\frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_j w_{ind_j} \Delta y_j \quad (12.10a)$$

şeklinde bulunur.