

BÖLÜM 11

İKİ-BOYUTLU PANEL YÖNTEMLERİ

- 11.1 Giriş
- 11.2 Panel yöntemlerinin genel yapısı
 - 11.2.1 Serbest akım ve cismin geometri bilgileri
 - 11.2.2 Panel özellikleri
 - 11.2.3 Bir panel kontrol noktasının başka panele bağlı eksen takımında konumu
 - 11.2.4 Panel uç noktalarının panele bağlı eksen takımında koordinatları
 - 11.2.5 İndüklenen hızların i 'inci panele bağlı eksen takımında ifadesi
 - 11.2.6 Serbest akım hızının i 'inci panele bağlı eksen takımında bileşenleri
- 11.3 Sabit tekillik dağılımı ve Neumann tipi sınır şartı kullanan yöntemler
 - 11.3.1 Sabit kaynak dağılımı kullanan panel yöntemi
 - 11.3.2 Sabit duble dağılımı kullanan panel yöntemi
 - 11.3.3 Sabit girdap dağılımı kullanan panel yöntemi

11.1 Giriş

İki-boyutlu potansiyel akımda potansiyel fonksiyonunun herhangi bir P noktasındaki değerinin

$$\Phi(P) = \Phi_{\infty}(P) + \frac{I}{2\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \cdot \ln r - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) \right] \cdot ds - \frac{I}{2\pi} \int_{S_W} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) \cdot ds \quad (3.17)$$

türünde bir integralle hesaplanabileceği daha önce görülmüştü. Burada S_B katı cidarı, S_W hesaba katılmışsa iz sınırlarını, σ ve μ ise katı cidar ve iz sınırları boyunca bunların etkilerini temsilen yer alan kaynak ve dublelerin şiddetlerini belirtmektedir. Double yerine eşdeğer bir girdap çifti almak mümkündür.

Bu eşitlikten türevler alarak aynı P noktasında hız bileşenlerini

$$V_x(P) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y(P) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (11.1)$$

şeklinde elde etmek mümkündür.

Yukarıdaki bağıntılardan yararlanarak potansiyel fonksiyonunun değerini veya hız bileşenlerini hesaplayabilmek için kaynak ve duble (veya girdap) şiddetlerini bilmek gerektiği açıktır.

İz üzerindeki tekilliklerin şiddetleri genellikle potansiyel akım hesaplamalarına paralel olarak yapılan (viskoz) iz hesaplamalarından elde edilir.

Katı cidar boyunca tekilliklerin şiddetini elde edebilmek için ise katı cidar üzerindeki sınır şartından yararlanılarak yazılan bir denklemin çözümüne çalışılır.

Ancak bu türden bir denklemde bilinmeyen tekillik şiddetlerinin integral ifadesi içerisinde yer alması çözümü güçleştirir. Bu bakımdan katı cidar panel adı verilen küçük yüzey elemanlarına ayrılarak yukarıdaki ifadeler, örneğin potansiyel fonksiyonu için

$$\Phi(P) = \Phi_{\infty}(P) + \sum_{j=1}^{NB} \frac{I}{2\pi} \int_{S_j} \left[\sigma \cdot \ln r - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) \right] \cdot ds - \sum_{k=1}^{NW} \frac{I}{2\pi} \int_{S_k} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) \cdot ds \quad (11.2)$$

olmak üzere, toplamlar şeklinde yazılır.

Bu durumda da bilinmeyen tekillik şiddetleri halen integraller içerisinde olduğundan çözüm güçlük gösterir. Bu bakımdan panel geometrileri ve panel boyunca tekillik şiddetlerinin dağılımları için yapılan özel kabullerle tekillik şiddetleri integral dışına alınarak

$$\Phi(P) = \Phi_{\infty}(P) + \sum_{j=1}^{NB} (A_j \sigma_j + B_j \mu_j) - \Phi_W(P) \quad (11.3)$$

türünde ifadeler elde edilir. Burada A_j ve B_j büyüklükleri sadece panel geometrisine bağlı integrallerden ibaret olan katsayıları, σ_j ve μ_j ise j inci panel üzerindeki tekillik şiddetini ve dağılımını temsil eden bilinmeyenleri belirtmektedir. Benzeri bağıntıları hız bileşenleri için de yazmak mümkündür.

Bu tip bağıntılar paneller üzerinde seçilen kontrol noktalarında yazılıp katı cidar sınır şartı da uygulanarak tekillik şiddetleri için lineer denklemler elde etmek ve bu denklemleri standart yöntemlerle çözerek tekillik şiddetlerini hesaplamak mümkündür.

Literatürde:

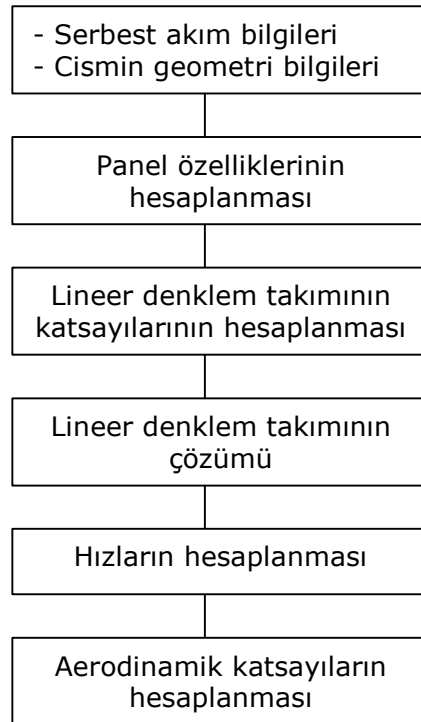
Panel geometrilerinin cinsine	- doğrusal - dairesel - parabolik
Kontrol noktalarının yerine	- panel orta noktaları - panel uç noktaları - panel özel noktaları
Tekillik dağılımının cinsine	- kaynak dağılımı - girdap dağılımı - duble dağılımı - bunların kombinasyonu
Sınır şartının cinsine	- Neumann tipi - Dirichlet tipi - karışık tip

bağlı olarak bir çok farklı panel yöntemine rastlamak mümkündür.

Bu bölümde önce iki-boyutlu herhangi bir panel yönteminin genel yapısından bahsedilecek, ardından bazı özel panel yöntemleri tanıtılacaktır.

11.2 Panel yöntemlerinin genel yapısı

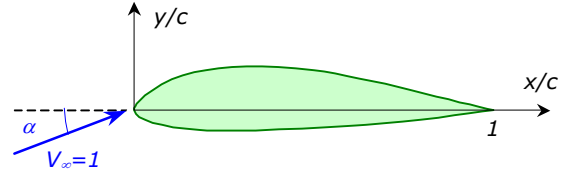
İki-boyutlu herhangi bir panel yönteminin genel aşamaları aşağıdaki gibidir:



11.2.1 Serbest akım ve cismin geometri bilgileri

İki boyutlu problemleri herhangi bir kartezyen eksen takımında incelemek mümkündür. Ancak çoğu zaman cisme bağlı bir eksen takımı tercih edilir.

Örneğin tek parçalı bir kanat profili (flap ve slat gibi ilave elemanları olmayan) için veter doğrultusuna ve hücum kenarına bağlı, şekildeki gibi bir eksen takımı kullanılması uygun olur.



Potansiyel akım probleminin çözümü cismin büyüklüğünden ve serbest akım hızından bağımsız olduğu için,

- profil koordinatlarını veter uzunluğu ile bölünmüş olarak kullanmak ve
- serbest akım hızını 1 olarak almak

mümkündür. Bu durumda serbest akım şartlarını sadece α hücum açısı belirleyecektir.

Geometri bilgileri cisim yüzeyi üzerinde seçilmiş noktaların bu eksen takımında koordinatları ile verilecektir. Profil yüzeyi üzerindeki noktaların sayısı genellikle problemin bir parametresidir.

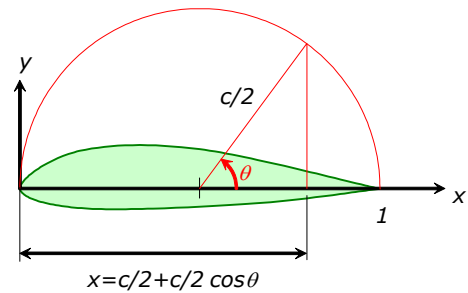
Profil yüzeyi üzerindeki noktaların dağılımı çoğu zaman uygulanan panel yönteminin sayısal başarısı açısından ve aerodinamik çözümün kalitesi açısından önemlidir.

Literatürde yer alan çoğu kanat profilinin geometrisi o profilin tasarımcısı tarafından belirlenen sayıda ve belirli biçimde dağılmış noktalarla sunulmaktadır. Bu bakımdan bir panel yönteminin uygulanmasından önce bu noktalarının sayısının artırılması ve noktaların panel yöntemine uygun biçimde yeniden dağıtılması gerekebilir.

Kanat profilleri için uygun nokta sayısı en az 50 civarındadır. Noktaların profil boyunca sıralaması tercihe göre saat ibreleri yönünde veya tersine olabilir. İntegral formüllerinde seçilen yöne bağlı olarak gerekli işaret ayarlamaları unutulmamalıdır. Profilin ilk noktası olarak firar kenarı noktasının seçilmesi genellikle uygun olmaktadır.

Nokta dağılımı için uygulamada tercih edilen bir yöntem "kosinüs dağılımı"dır. Bu dağılım için şekilde görüldüğü gibi kanat profilinin veter üzerine bir yarım daire oturtulur. Böylece profil üzerindeki noktaların x koordinatları yarım daire merkezindeki θ açısına

$$x = \frac{c}{2}(1 + \cos \theta) \quad (11.4)$$

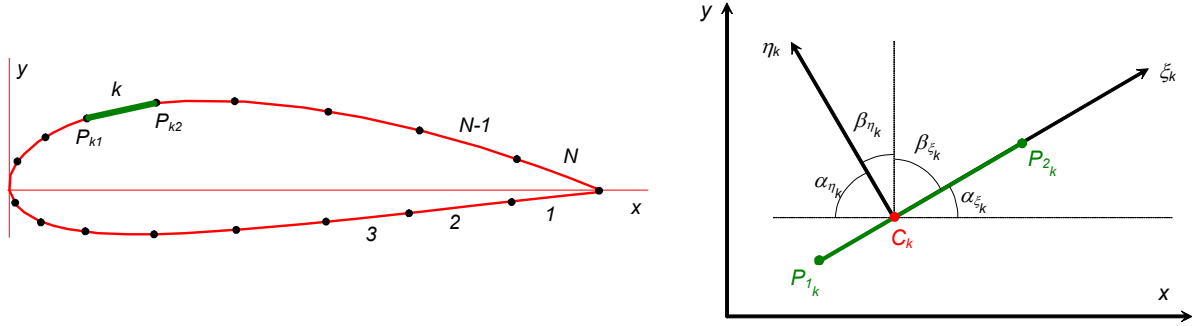


şeklinde bağlanır. Şayet daire üzerinde eşit açısal aralıklı noktalar alınırsa bu noktaların veter üzerindeki izdüşümlerinin, yani x koordinatlarının dağılımı hücum ve firar kenarları civarında daha sık ve profilin orta kısımlarında daha seyrek olarak elde edilir.

11.2.2 Panel özellikleri

İki boyutlu panel yöntemlerinin uygulamaları sırasında panellerin boyları, eksenlerle yaptığı açılarının kosinüsleri, kontrol noktalarının koordinatları vb gibi bazı geometrik büyüklüklerine ihtiyaç olacaktır.

Bu bakımdan şekildeki gibi bir kanat profili üzerinde noktaların saat ibreleri yönünde sıralandığını varsayarak panellerden herhangi birini ele alalım. Bu panel köşe noktalarının koordinatları sırasıyla $P_{k1}(x_{k1}, y_{k1})$, $P_{k2}(x_{k2}, y_{k2})$ olsun.



Panel uzunlukları

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \quad (11.4)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_{2k} - x_{1k} \\ \Delta y_k &= y_{2k} - y_{1k} \end{aligned} \quad (11.5)$$

dır. Panel kontrol noktalarının $C_k(x_{C_k}, y_{C_k})$ şeklinde tanımlandığını varsayalım. Kontrol noktaları panel orta noktaları olarak seçilirse koordinatları

$$x_{C_k} = \frac{x_{2k} + x_{1k}}{2}, \quad y_{C_k} = \frac{y_{2k} + y_{1k}}{2} \quad (11.6)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şayet C_k kontrol noktası başlangıç noktası olmak ve ξ_k eksenini panel uç noktalarından geçmek üzere panele bağlı bir (ξ_k, η_k) eksen takımı tanımlanırsa

ξ_k ekseninin kosinüs direktörleri

$$\cos \alpha_{\xi_k} = \frac{\Delta x_k}{\Delta s_k}; \quad \cos \beta_{\xi_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta s_k} \quad (11.7a)$$

η_k ekseninin kosinüs direktörleri

$$\cos \alpha_{\eta_k} = -\frac{\Delta y_k}{\Delta s_k}; \quad \cos \beta_{\eta_k} = \frac{\Delta x_k}{\Delta s_k} \quad (11.7b)$$

ξ_k ekseninin birim vektörü

$$\vec{\xi}_k = \cos \alpha_{\xi_k} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_k} \vec{j} \quad (11.7c)$$

η_k ekseninin birim vektörü

$$\vec{\eta}_k = \cos \alpha_{\eta_k} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_k} \vec{j} \quad (11.7d)$$

şeklinde hesaplanabilir.

11.2.3 Bir panel kontrol noktasının başka panele bağlı eksen takımında konumu

Uygulamada herhangi bir i 'inci panelin kontrol noktasının başka bir j 'inci panele bağlı eksen takımında ifade edilmesi gerekir.

Bu amaçla C_i kontrol noktasının (ξ_j, η_j) eksen takımındaki (ξ_{Cij}, η_{Cij}) koordinatları

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j$$

vektörünün sırasıyla ξ_j ve η_j eksenleri üzerindeki izdüşümleri alınarak hesaplanabilir.

Buna göre:

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = dx_{ij} \vec{i} + dy_{ij} \vec{j} \quad \text{burada} \quad dx_{ij} = (x_i - x_j), \quad dy_{ij} = (y_i - y_j)$$

olup

$$\begin{aligned} \xi_{Cij} &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{\xi}_j = (dx_{ij} \vec{i} + dy_{ij} \vec{j}) \cdot (\cos \alpha_{\xi_j} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_j} \vec{j}) \\ \eta_{Cij} &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{\eta}_j = (dx_{ij} \vec{i} + dy_{ij} \vec{j}) \cdot (\cos \alpha_{\eta_j} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_j} \vec{j}) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{cases} \xi_{Cij} = dx_{ij} \cos \alpha_{\xi_j} + dy_{ij} \cos \beta_{\xi_j} \\ \eta_{Cij} = dx_{ij} \cos \alpha_{\eta_j} + dy_{ij} \cos \beta_{\eta_j} \end{cases} \quad (11.8)$$

Bulunur.

11.2.4 Panel uç noktalarının panele bağlı eksen takımında koordinatları

Bir panel üzerindeki tekilliklerin indükledikleri potansiyel veya hız bileşenlerinin hesaplanması sırasında bu panelin uç noktalarının aynı panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarının bilinmesi gerekir.

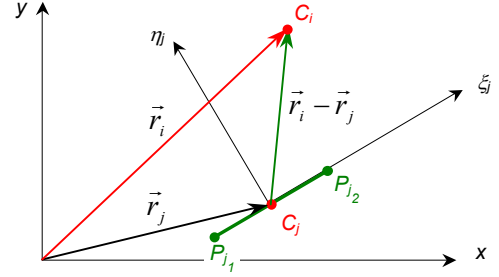
Bu amaçla önceki paragrafta yazılan formüllerde C_i noktasının koordinatları yerine bir defa P_{1j} ve bir defa da P_{2j} noktasının koordinatları konularak

$$\begin{cases} \xi_{1j} = dx_{1C} \cos \alpha_{\xi_j} + dy_{1C} \cos \beta_{\xi_j} \\ \xi_{2j} = dx_{2C} \cos \alpha_{\xi_j} + dy_{2C} \cos \beta_{\xi_j} \end{cases} \quad (11.9a)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{cases} dx_{1C} = (x_{1j} - x_{C_j}), & dy_{1C} = (y_{1j} - y_{C_j}) \\ dx_{2C} = (x_{2j} - x_{C_j}), & dy_{2C} = (y_{2j} - y_{C_j}) \end{cases} \quad (11.9b)$$

Kontrol noktasının ve panele bağlı eksen takımının başlangıç noktasının panel orta noktasında olması halinde uç noktalarının panele bağlı eksen takımındaki koordinatlarının



$$\boxed{\xi_{1j} = -\Delta s_k / 2, \quad \xi_{2j} = \Delta s_k / 2} \quad (11.10)$$

olacağı açıktır.

11.2.5. İndüklenen hızların i 'inci panele bağlı eksen takımında ifadesi

Akım hızlarına göre formülleştirilen panel yöntemlerinde j 'inci panel üzerindeki tekilliklerin bu panele bağlı eksen takımında i 'inci panel kontrol noktasında indüklediği hız bileşenlerinin i 'inci panele bağlı eksen takımında ifade edilmesi gerekmektedir. Bunun için hız bileşenlerinin

- önce cisme bağlı eksen takımına aktarılması,
- ardından i 'inci panele bağlı eksen takımına aktarılması

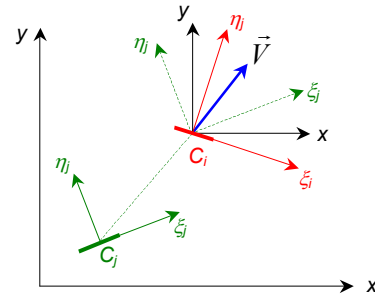
uygun olur.

Hız vektörü j 'inci panele, cisme ve i 'inci panele bağlı eksen takımlarında sırasıyla

$$\vec{V}_j = u_j \vec{\xi}_j + v_j \vec{\eta}_j$$

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

$$\vec{V}_i = u_i \vec{\xi}_i + v_i \vec{\eta}_i$$



şeklinde tanımlanmış olsun.

Buna göre cisme bağlı eksen takımında hız bileşenleri

$$u = \vec{V}_j \cdot \vec{i} = (u_j \vec{\xi}_j + v_j \vec{\eta}_j) \cdot \vec{i} = \left[u_j (\cos \alpha_{\xi_j} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_j} \vec{j}) + v_j (\cos \alpha_{\eta_j} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_j} \vec{j}) \right] \cdot \vec{i}$$

$$v = \vec{V}_j \cdot \vec{j} = (u_j \vec{\xi}_j + v_j \vec{\eta}_j) \cdot \vec{j} = \left[u_j (\cos \alpha_{\xi_j} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_j} \vec{j}) + v_j (\cos \alpha_{\eta_j} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_j} \vec{j}) \right] \cdot \vec{j}$$

veya

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_j \cos \alpha_{\xi_j} + v_j \cos \alpha_{\eta_j} \\ v &= u_j \cos \beta_{\xi_j} + v_j \cos \beta_{\eta_j} \end{aligned}} \quad (11.11)$$

i 'inci panele bağlı eksen takımında hız bileşenleri

$$u_i = \vec{V} \cdot \vec{\xi}_i = (u \vec{i} + v \vec{j}) \cdot (\cos \alpha_{\xi_i} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_i} \vec{j})$$

$$v_i = \vec{V} \cdot \vec{\eta}_i = (u \vec{i} + v \vec{j}) \cdot (\cos \alpha_{\eta_i} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_i} \vec{j})$$

veya

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= u \cos \alpha_{\xi_i} + v \cos \beta_{\xi_i} \\ v_i &= u \cos \alpha_{\eta_i} + v \cos \beta_{\eta_i} \end{aligned}} \quad (11.12)$$

olur.

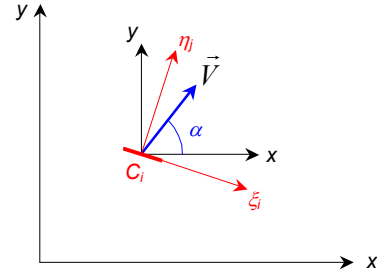
11.2.6 Serbest akım hızının i 'inci panele bağlı eksen takımında bileşenleri

Herhangi bir panel üzerindeki teğetsel ve normal hız bileşenlerinin hesaplanması sırasında serbest akım hızının katkısını da ilave edebilmek için serbest akım hız vektörünün bu panel kontrol noktasındaki teğetsel ve normal bileşenlerini bulmak gerekir. Buna göre serbest akım hız vektörü

$$\vec{V} = V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j}$$

$$V_{\infty x} = V_{\infty} \cos \alpha$$

$$V_{\infty y} = V_{\infty} \sin \alpha$$



şeklinde tanımlanırsa i 'inci panele bağlı eksen takımında hız bileşenleri

$$\vec{V}_i = V_{\infty \xi} \xi_i + V_{\infty \eta} \eta_i =$$

olmak üzere

$$V_{\infty \xi} = \vec{V} \cdot \xi_i = (V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j}) \cdot (\cos \alpha_{\xi_i} \vec{i} + \cos \beta_{\xi_i} \vec{j})$$

$$V_{\infty \eta} = \vec{V} \cdot \eta_i = (V_{\infty x} \vec{i} + V_{\infty y} \vec{j}) \cdot (\cos \alpha_{\eta_i} \vec{i} + \cos \beta_{\eta_i} \vec{j})$$

veya

$$\begin{cases} V_{\infty \xi} = V_{\infty x} \cos \alpha_{\xi_i} + V_{\infty y} \cos \beta_{\xi_i} \\ V_{\infty \eta} = V_{\infty x} \cos \alpha_{\eta_i} + V_{\infty y} \cos \beta_{\eta_i} \end{cases} \quad (11.13)$$

bulunur.

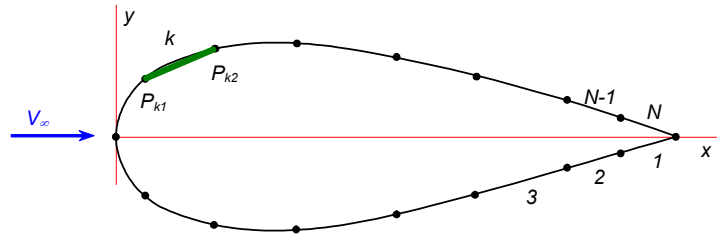
11.3 Sabit tekillik dağılımı ve Neumann tipi sınır şartı kullanan yöntemler

11.3.1 Sabit kaynak dağılımı kullanan panel yöntemi

Panel yöntemleri ilk olarak taşıma kuvveti üretmeyen iki- ve üç-boyutlu cisimler üzerinde kaynak tekillikleri kullanılarak ve Neumann tipi sınır şartı uygulanarak AMO Smith ve J. Hess tarafından ortaya konulmuştur.

İki-boyutlu halde bu probleme tipik örnekler olarak dairesel silindir etrafındaki veya sıfır hücum açısında simetrik kanat profili etrafındaki potansiyel akım problemi gösterilebilir.

Buna göre şekilde görüldüğü gibi sıfır hücum açısında serbest akım içerisinde yer alan simetrik bir kanat profili etrafındaki potansiyel akım problemi ele alınırsa bu akım alanının herhangi bir noktasında potansiyel fonksiyonu için kanat profili yüzeyi boyunca yayılı kaynak tekillikleri cinsinden



$$\Phi(P) = \Phi_{\infty}(P) + \frac{I}{2\pi} \int_{s_B} \sigma \cdot \ln r \cdot ds \quad (11.14)$$

şeklinde bir integral yazılabilir. Aynı noktadaki hız vektörü için bu ifadeden

$$\vec{V}(P) = \nabla\Phi = \nabla\Phi_{\infty} + \frac{I}{2\pi} \int_{s_B} \sigma \cdot \nabla(\ln r) \cdot ds \quad (11.15)$$

elde edilir. P noktası kanat profilinin yüzeyinde olmak üzere hız vektörünün yüzey normal vektörü ile skaler çarpımı yüzeye dik hız bileşenini verecektir.

$$V_n(P) = \vec{V} \cdot \vec{n}_p = \nabla\Phi \cdot \vec{n}_p = \nabla\Phi_{\infty} \cdot \vec{n}_p + \frac{I}{2\pi} \int_{s_B} \sigma \cdot \nabla(\ln r) \cdot \vec{n}_p \cdot ds$$

$$V_n(P) = \nabla\Phi_{\infty} \cdot \vec{n}_p + \frac{I}{2\pi} \int_{s_B} \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial n_p}(\ln r) \cdot ds \quad (11.16)$$

Neuman tipi sınır şartı gereği yüzeye dik hız bileşeni sıfır olacağı için

$$V_n(P) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{I}{2\pi} \int_{s_B} \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial n_p}(\ln r) \cdot ds = -\nabla\Phi_{\infty} \cdot \vec{n}_p} \quad (11.17)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü, bilinmeyen σ tekillik şiddetini verecektir.

Daha önce de belirtildiği gibi yukarıdaki tipte integral denklemleri çözümü bilinmeyen integral içinde olması nedeniyle zorluk gösterir. Yüzey panellere ayrılarak bu denklem

$$\sum_{j=1}^N \frac{I}{2\pi} \int_{s_j} \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial n_p}(\ln r) \cdot ds = -\nabla\Phi_{\infty} \cdot \vec{n}_p \quad (11.18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada N panel sayısıdır.

Her bir panel üzerinde *kaynak şiddetinin sabit olduğu* varsayılırsa bu denklemini

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j \frac{I}{2\pi} \int_{s_j} \cdot \frac{\partial}{\partial n_p}(\ln r) \cdot ds = -\nabla\Phi_{\infty} \cdot \vec{n}_p \quad (11.19)$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Buradan görüldüğü gibi N adet panel üzerinde bilinmeyen kaynak şiddetlerinin sayısı N olup çözüm için N adet denkleme ihtiyaç vardır.

Yüzey sınır şartı kanat profili yüzeyinin her noktasında geçerli olup yukarıdaki denklemin benzerinin kanat profilinin her noktasında yazılması mümkündür. Şayet her bir panel üzerinde seçilen bir kontrol noktasında bu denklem bir kez yazılırsa gereken sayıda denklem elde edilebilir.

$$\boxed{\sum_{j=1}^N A_{ij} \sigma_j = R_i ; \quad (i = 1, 2, \dots, N)} \quad (11.20)$$

Burada $\boxed{R_i = -\nabla\Phi_{\infty} \cdot \vec{n}_i}$ olup

$$A_{ij} = \frac{I}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_p} (\ln r) \cdot ds \quad (11.21)$$

ise j 'inci panel üzerindeki birim sabit şiddetli kaynak dağılımının i 'inci panelin kontrol noktasında indüklediği normal hız bileşenidir.

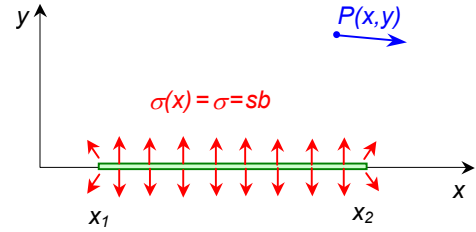
(11.20) denklem sistemi matris formda açık biçimde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2N} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \cdots \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \cdots \\ R_N \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

şeklinde yazılabilir.

(11.21) integral değerinin cisme bağlı eksen takımında hesaplaması zordur. Bu bakımdan bu integralin doğrudan hesaplanması yerine, j 'inci panel üzerindeki kaynak dağılımının i 'inci panel kontrol noktasında indüklediği hız vektörü j 'inci panele bağlı eksen takımında hesaplanıp, bu hız vektörü önce cisme bağlı eksen takımına daha sonra da i 'inci panele bağlı eksen takımına aktararak normal bileşeni olan A_{ij} büyüklüğü elde edilir.

Smith-Hess yönteminde paneller doğru parçaları şeklinde olup, doğrusal panel üzerinde sabit şiddetli bir kaynak dağılımının alınması halinde bu panele bağlı eksen takımında herhangi bir $P(x,y)$ noktasında indüklenen potansiyel fonksiyonu ve hız bileşenlerinin (10.11), (10.12) ve (10.13) bağıntılarıyla



$$\Phi(x,y) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.11)$$

$$u(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.12)$$

$$v(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.13)$$

şeklinde tanımlanacağı daha önce gösterilmiştir. Birim şiddette kaynak dağılımı için bu integrallerin değerleri de (10.14), (10.17) ve (10.18) bağıntılarından

$$\Phi(x,y) = \frac{I}{4\pi} \left[(x-x_1) \ln r_1^2 - (x-x_2) \ln r_2^2 - 2(x_2-x_1) + 2y(\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (11.23)$$

$$u(x,y) = \frac{I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sigma}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (11.24)$$

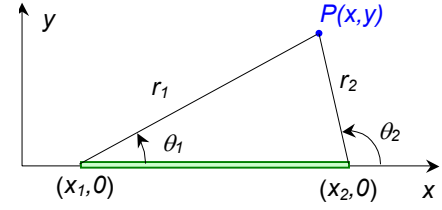
$$v(x,y) = \frac{I}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (11.25)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Buradaki parametreler yanda belirtilmiş olup

$$\theta_k = \tan^{-1} \frac{y}{x - x_k}; \quad k = 1, 2 \quad (10.15)$$

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + y^2}; \quad k = 1, 2 \quad (10.16)$$



şeklinde hesaplanır.

Özel olarak $i=j$ halinde bir panel üzerindeki sabit şiddetli kaynak dağılımının aynı panelin kontrol noktasındaki indüklemeleri söz konusu olur ki, bu durumda kontrol noktasının panel orta noktası olması halinde teğetsel ve normal hız bileşenlerinin sırasıyla

$$u(x, \pm 0) = 0$$

$$v(x, \pm 0) = \pm \frac{l}{2}$$

olacağı da yine daha önce (10.23) ve (10.24) bağıntılarıyla gösterilmiştir.

(11.20) denkleminin sağ tarafındaki $\nabla \Phi_\infty \cdot \vec{n}_i$ terimi de serbest akım hızının panel normali doğrultusundaki bileşenini belirtmekte olup bunun değeri daha önce verilen (11.13) bağıntıları yardımıyla elde edilecektir.

(11.20) denklem sistemi çözülerek kaynak şiddetlerinin elde edilmesinden sonra akım alanındaki herhangi bir P noktasında hız vektörünü elde etmek için (11.15) bağıntısından hareketle

$$\vec{V}(P) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \Delta \vec{V}_j \sigma_j \quad (11.25a)$$

bağıntısını yazmak mümkündür. Burada

$$\Delta \vec{V}_j = \frac{l}{2\pi} \int_{s_j} \nabla(\ln r) \cdot ds \quad (11.25b)$$

j 'inci panel üzerindeki birim şiddetli kaynak dağılımının P noktasında indüklediği hız vektörünü ifade etmekte olup bunun değerini hesaplamak için hız vektörü önce j 'inci panele bağlı eksen takımında, daha önce verilen (10.17) ve (10.18) bağıntılarıyla hesaplanır. Bu vektör daha sonra eksen takımı değiştirilerek (11.11) bağıntılarıyla cisme bağlı eksen takımına aktarılır.

Kanat profili üzerindeki panellerin kontrol noktalarındaki teğetsel hızların hesaplamasında herhangi bir P noktasındaki hızların hesaplanması için yapılan işlemler yapıldıktan sonra hız vektörü (11.12) bağıntıları vasıtasıyla i 'inci panele bağlı teğet-normal eksen takımına aktarılır. Böylece

$$V_{ti} = V_{\infty ti} + \sum_{j=1}^N B_{ij} \sigma_j \quad (11.26a)$$

şeklinde bir bağıntı elde etmek mümkündür. Burada $V_{\infty ti}$ serbest akım hızının i 'inci panele bağlı eksen takımındaki teğetsel bileşenini belirtmekte,

$$B_{ij} = \frac{I}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial s} (\ln r) \cdot ds \quad (11.26b)$$

ise j 'inci panel üzerindeki sabit birim şiddetteki kaynak dağılımının i 'inci panelin kontrol noktasında indüklediği teğetsel hızı ifade etmektedir. Bu hızlar da yine önce j 'inci panele bağlı eksen takımında hesaplanıp, daha sonra cisme bağlı eksen takımına ve ardından da i 'inci panele bağlı eksen takımına aktararak hesaplanabilir.

Profil üzerindeki veya herhangi bir noktadaki basınç katsayılarını elde etmek için Bernoulli denklemi yardımıyla yazılabilen

$$C_{p_i} = 1 - \left(\frac{\vec{V}_i}{\vec{V}_\infty} \right)^2 \quad (11.26)$$

bağıntısından yararlanılır.

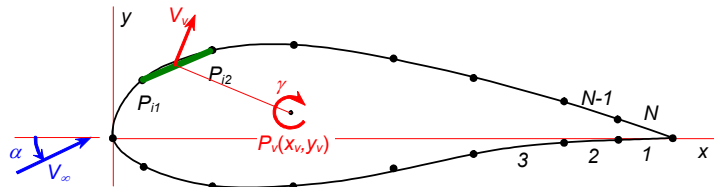
Sirkülasyonlu hal

Yukarıda izah edilen sabit kaynak dağılımı esaslı yöntem sirkülasyonlu (taşıma oluşturan) haller için kullanılamaz. İki-boyutlu cisim etrafında, hücum açılı ve/veya kamburluklu bir kanat profilinde olduğu gibi sirkülasyon etkisini yaratmak için probleme en az bir girdap veya bir girdap dağılımı ilave etmek gereklidir.

Münferit girdapla sirkülasyon

Basit bir uygulama olarak kanat profilinin içindeki bir noktaya şiddeti bilinmeyen bir münferit girdap ilave edilebilir. Bu girdap panel orta noktalarında normal ve teğetsel hızlar oluşturacaktır. Normal hızlar kaynakların ve serbest akımın oluşturduğu normal hızlara eklenerek yüzey sınır şartından elde edilen denklemlerin içinde yer alır.

Şekilde görüldüğü gibi bir $P_v(x_v, y_v)$ noktasında saat ibreleri yönünde γ şiddetinde bir girdap bulunduğunu varsayalım. Bu girdap i 'inci panelin kontrol noktasında



$$V_v = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

büyükliğünde bir hız indükleyecektir.

Burada $r = |\vec{r}| = ; \quad \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}, \quad \Delta x = x_{C_i} - x_v, \quad \Delta y = y_{C_i} - y_v$

olup (x_v, y_v) panel orta noktasının koordinatlarıdır. Hız vektörünün cisme bağlı eksen takımında bileşenleri

$$\vec{V}_v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}; \quad v_x = \frac{\gamma}{2\pi r} \frac{\Delta y}{r}, \quad v_y = -\frac{\gamma}{2\pi r} \frac{\Delta x}{r}$$

şeklinde bulunabilir. Panele bağlı eksen takımında normal ve teğetsel hızları bulmak için daha önce olduğu gibi panel kosinüs direktörlerinden yararlanılarak

$$\begin{cases} u_i = v_x \cos \alpha_{\xi_i} + v_y \cos \beta_{\xi_i} \\ v_i = v_x \cos \alpha_{\eta_i} + v_y \cos \beta_{\eta_i} \end{cases} \quad (11.27)$$

yazılabilir.

Girdap ilavesiyle (11.20) denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \sigma_j + A_{i,N+1} \gamma = R_i ; \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (11.28)$$

ve hızlar için verilen (11.26a) bağıntısı da

$$V_{ti} = V_{\infty ti} + \sum_{j=1}^N B_{ij} \sigma_j + B_{i,N+1} \gamma \quad (11.29)$$

şekline gelir.

(11.28) denklem sisteminde N adet denkleme karşılık $N+1$ bilinmeyen vardır. İlave bir denlem Kutta şartından elde edilir.

Kutta şartı gereği firar kenarına komşu iki panel kontrol noktasındaki hızlar eşit olmalıdır. Teğetsel hızların saat ibreleri yönünde ölçüldüğü dikkate alınarak bu şart

$$V_{t1} = -V_{tN} \quad \rightarrow \quad V_{t1} + V_{tN} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Veya (11.29) bağıntısı da kullanılarak ilave denklem

$$\sum_{j=1}^N (B_{1j} + B_{Nj}) \sigma_j + (B_{1,N+1} + B_{N,N+1}) \gamma = -(V_{\infty t1} + V_{\infty tN}) \quad (11.30)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece (11.28) denklem sistemi (11.30) denkleminin birlikte çözülerek tekillik şiddetleri elde edilir. Denklem sistemi matris formunda açık olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} & A_{1,N+1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2N} & A_{2,N+1} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3N} & A_{3,N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} & A_{N,N+1} \\ A_{N+1,1} & A_{N+1,2} & A_{N+1,3} & \cdots & A_{N+1,N} & A_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \cdots \\ \sigma_N \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \cdots \\ R_N \\ R_{N+1} \end{Bmatrix} \quad (11.31)$$

Burada katsayılar matrisinin sonuncu sütundaki ilk N satırda yer alan katsayılar birim şiddetli münferit girdabın herbir panel kontrol noktasında indüklediği normal hızları belirtmektedir. Katsayılar matrisinin sonuncu satırı Kutta şartından elde edilen (11.30) denkleminin katsayılarını içermekte olup, ilk N sütunda yer alan katsayıların herbiri o panel üzerindeki birim şiddetli kaynak dağılımının 1 'inci ve N 'inci panel kontrol noktalarında indüklediği teğetsel hızlar toplamını, sonuncu diyagonal elemanı ise birim şiddetli münferit girdabın 1 'inci ve N 'inci panel kontrol noktalarında indüklediği teğetsel hızlar toplamını ifade etmektedir.

$$A_{N+1,j} = B_{1j} + B_{Nj}, \quad (j = 1, 2, \dots, N+1)$$

$$R_{N+1} = -(V_{\infty 1} + V_{\infty N})$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Sabit şiddette girdap dağılımı ile sirkülasyon

Münferit girdap kullanılması halinde girdabın yakın olduğu bölgelerde çözüm hatalı olmaktadır. Bu bakımdan bir tek girdap kullanmak yerine bütün paneller boyunca aynı γ şiddetinde olmak üzere bir girdap dağılımı kullanılabilir.

Bu durumda herbir panel üzerindeki sabit şiddetli kaynak ve girdap dağılımlarının herhangi bir i inci kontrol noktasında indükledikleri normal hızlar toplamı, serbest akımın aynı kontrol noktasında etkittiği normal hıza ters işaretli eşitlenerek

$$\boxed{\sum_{j=1}^N A_{ij} \sigma_j + \sum_{j=1}^N B_{ij} \gamma = R_i; \quad (i = 1, 2, \dots, N)} \quad (11.32)$$

denklem sistemi elde edilir. Panel kontrol noktalarındaki teğetsel hızlar için de

$$V_{ti} = V_{\infty ti} + \sum_{j=1}^N B_{ij} \sigma_j + \sum_{j=1}^N A_{ij} \gamma \quad (11.33)$$

yazılabilir.

(11.32) denklem sisteminde bilinmeyen sayısı denklem sayısından bir fazla olup, yine Kutta şartı yardımıyla ilave bir denklem bu kez

$$\sum_{j=1}^N (B_{1j} + B_{Nj}) \sigma_j + \sum_{j=1}^N (A_{1j} + A_{Nj}) \gamma = -(V_{\infty 1} + V_{\infty N}) \quad (11.34)$$

şeklinde elde edilecektir.

11.3.2 Sabit duble dağılımı kullanan panel yöntemi

İki-boyutlu cismin yüzeyi boyunca sadece duble dağılımı kullanılması halinde akım alanının bir P noktasındaki potansiyel fonksiyonunun değeri için yazılan (3.17) denklemi

$$\Phi(P) = \Phi_{\infty}(P) + \frac{I}{2\pi} \int_{S_B} \left[-\mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] \cdot dS \quad (11.35)$$

ve doğrusal paneller boyunca sabit şiddette duble dağılımı alınması halinde

$$\Phi(P) = \Phi_{\infty}(P) + \sum_{j=1}^N \frac{I}{2\pi} \int_{S_B} \left[-\mu \cdot \frac{\partial (\ln r)}{\partial n} \right] \cdot dS \quad (11.36)$$

şekline gelir. P noktasının herhangi bir panelin kontrol noktası olması halinde

$$\Phi_i = \Phi_{\infty i} + \sum_{j=1}^N \Phi_{ij} \mu_j \quad (11.37)$$

yazmak mümkündür. Burada Φ_{ij}' büyüklüğü j 'inci panel üzerindeki sabit birim şiddetli duble dağılımının i 'inci panelin kontrol noktasında indüklediği potansiyel fonksiyonunu belirtmektedir.

$$\bar{\Phi}_{ij} = -\frac{I}{2\pi} \int_{S_j} \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} \cdot dS \quad (11.38)$$

Bu durumda i 'inci panelin kontrol noktasındaki hız vektörü, cisme bağlı eksen takımında

$$\vec{V}_i = \nabla\Phi_i = \nabla\Phi_{\infty i} + \sum_{j=1}^N \nabla\bar{\Phi}_{ij} \mu_j \quad (11.39)$$

ve i 'inci panelin normal ve teğeti doğrultusundaki hız bileşenleri de

$$V_{ni} = \vec{n}_i \cdot \vec{V}_i = \vec{n}_i \cdot \nabla\Phi_{\infty i} + \sum_{j=1}^N \vec{n}_i \cdot \nabla\bar{\Phi}_{ij} \mu_j \quad (11.40a)$$

$$V_{ti} = \vec{t}_i \cdot \vec{V}_i = \vec{t}_i \cdot \nabla\Phi_{\infty i} + \sum_{j=1}^N \vec{t}_i \cdot \nabla\bar{\Phi}_{ij} \mu_j \quad (11.40b)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeleri daha kısa bir biçimde yazmak mümkündür:

$$V_{ni} = R_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \mu_j \quad (11.41a)$$

$$V_{ti} = Q_i + \sum_{j=1}^N B_{ij} \mu_j \quad (11.41b)$$

Burada

$$A_{ij} = -\vec{n}_i \cdot \frac{I}{2\pi} \int_{S_j} \nabla \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} \cdot dS \quad (11.42a)$$

$$B_{ij} = -\vec{t}_i \cdot \frac{I}{2\pi} \int_{S_j} \nabla \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} \cdot dS \quad (11.42b)$$

$$R_i = \vec{n}_i \cdot \nabla\Phi_{\infty i} \quad (11.42c)$$

$$Q_i = \vec{t}_i \cdot \nabla\Phi_{\infty i} \quad (11.42d)$$

dir. Burada A_{ij} ve B_{ij} sırasıyla, j 'inci panel üzerindeki birim şiddetli duble dağılımının i 'inci panel kontrol noktasında normal ve teğet doğrultularında indüklediği hız bileşenlerini belirtmekte olup, R_i ve Q_i ise serbest akım hızının i 'inci panel normal ve teğet doğrultularındaki bileşenlerini ifade etmektedir.

(11.42a) ve (11.42b) integrallerinin cisme bağlı eksen takımında doğrudan hesaplanması güç olup bu bakımdan j paneli üzerindeki birim şiddetli duble dağılımının i kontrol noktasında indüklediği hız bileşenleri önce bu panele bağlı eksen takımında hesaplanacak, elde edilen sonuçlar daha sonra cisme bağlı eksen takımına ve ardından da i paneline bağlı eksen takımına aktarılarak A_{ij} ve B_{ij} katsayıları elde edilecektir.

Doğrusal panel üzerindeki duble dağılımının, bu panele bağlı eksen takımında bir noktada indüklediği bileşke hızlar için daha önce

$$u(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{y}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} \right] \quad (10.29)$$

$$v(x, y) = \frac{-\Gamma}{2\pi} \left[\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2 + y^2} \right] \quad (10.30)$$

bağıntıları verilmiş, indüklenme noktasının aynı panel üzerinde olması halinde bu hız bileşenlerinin

$$u(x, \pm 0) = \mp \frac{d\mu(x)}{dx} = 0 \quad (10.32)$$

$$v(x, \pm 0) = \frac{-\mu}{2\pi} \left[\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right] \quad (10.33)$$

olacağı belirtilmiştir. Kontrol noktalarının panel orta noktaları olması halinde son bağıntılar

$$u_{ii} = 0 \quad (10.32)$$

$$v_{ii} = \frac{-2\mu}{\pi \Delta s_i} \quad (10.33)$$

olur. Burada Δs_i büyüklüğü i inci panelin uzunluğunu belirtmektedir.

Neumann tipi sınır şartı her bir panel kontrol noktasında uygulanarak (11.41a) eşitliğinden

$$V_{ni} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} \mu_j = -R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11.43)$$

denklem sistemi elde edilir.

Bir panel üzerindeki sabit duble dağılımının indüklemesinin panel uç noktalarında yer alan, duble şiddetiyle aynı şiddetteki bir girdap çiftinin indüklemesiyle aynı olduğu daha önce gösterilmiştir. Buna göre bir kanat profili etrafındaki potansiyel akım problemi yukarıda izah edilen sabit duble dağılımı yöntemiyle incelendiğinde firar kenarındaki eşdeğer girdap şiddeti

$$\Gamma = \mu_l - \mu_N$$

olacaktır. Girdap şiddetinin sıfırdan farklı olması firar kenarının üst ve alt tarafları arasında bir hız farkı olması anlamına gelir. Oysa Kutta şartı gereğince bir hız farkı olmaması gerekir. Bu bakımdan firar kenarından geriye uzanan ilave bir panel alınarak,



μ_w bu panel üzerindeki sabit duble şiddeti olmak üzere firar kenarındaki eşdeğer girdap şiddeti için

$$\Gamma = \mu_I - \mu_N + \mu_w = 0 \quad (11.44)$$

bağıntısı yazılarak Kutta şartı sağlanır. Böylece (11.43) denklem sistemi (11.44) denklemiyle birlikte çözülür.

Kontrol noktasındaki teğetsel hızlar için yazılan (11.41b) bağıntısı da bu durumda, ilave panelin etkisini de içerecek

$$V_{ii} = Q_i + \sum_{j=1}^{N+1} B_{ij} \mu_j \quad (11.45)$$

şekline gelir.

11.3.3 Sabit girdap dağılımı kullanan panel yöntemi

Doğrusal paneller boyunca sabit girdap dağılımı kullanılması halinde herhangi bir panel kontrol noktasındaki normal ve teğetsel hız bileşenleri için

$$V_{ni} = R_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \gamma_j \quad (11.46a)$$

$$V_{ii} = Q_i + \sum_{j=1}^N B_{ij} \gamma_j \quad (11.46b)$$

şeklinde birer bağıntı yazmak mümkündür. Buradaki R_i ve Q_i büyüklükleri serbest akım hızının i 'inci panel kontrol noktasındaki normal ve teğetsel bileşenleri iken, A_{ij} ve B_{ij} katsayıları j 'inci panel üzerindeki birim sabit şiddetli girdap dağılımının i 'inci panel kontrol noktasında indüklediği normal ve teğetsel hız bileşenleridir. A_{ij} ve B_{ij} katsayıları daha önceki yöntemlerde olduğu gibi yine, j 'inci panele bağlı eksen takımında hesaplanan indüklenmiş hızların önce cisme bağlı eksen takımına, daha sonra da i 'inci panel eksen takımına aktarılması suretiyle elde edilecektir.

Bir panel üzerindeki sabit girdap dağılımının herhangi bir $P(x,y)$ noktasında indüklediği hız bileşenleri için daha önce verilen (10.39) ve (10.40) bağıntıları yardımıyla

$$u_{ij} = \frac{\gamma_j}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (10.39)$$

$$v_{ij} = \frac{\gamma_j}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (10.40)$$

yazılabilir. İndükleme noktasının aynı panelin orta noktası olması halinde

$$u_{ii} = \mp \frac{\gamma}{2} \quad (10.38)$$

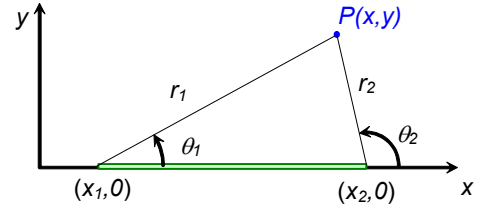
$$v_{ii} = 0 \quad (10.39)$$

elde edilir.

Bu bağıntılarda

$$\theta_k = \tan^{-1} \frac{y}{x - x_k}; \quad k = 1, 2 \quad (10.15)$$

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + y^2}; \quad k = 1, 2 \quad (10.16)$$



(10.39) bağıntısından görüldüğü gibi bir panel üzerindeki girdap dağılımının bu panelin orta noktasında indüklediği normal hız bileşeni sıfır olmaktadır. Dolayısıyla sabit girdap dağılımı kullanan bir panel yönteminde Neumann tipi sınır şartı kullanılması halinde elde edilecek

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \gamma_j = -R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11.47)$$

denklem sisteminin katsayılar matrisinin bütün diyagonal elemanları sıfır olacaktır. Bu durum bu yöntemin önemli bir zaafıdır.

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & \dots & A_{2N} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \dots & A_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \dots \\ \gamma_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \\ R_N \end{Bmatrix} \quad (11.48)$$

Yöntemin zaafının giderilmesi için önerilen yöntemlerden birisi sınır şartının bir başka biçimde uygulanmasıyla elde edilmektedir. Şöyle ki; yüzey sınır şartını cismin içerisindeki bölgede potansiyel fonksiyonunun sabit olması şeklinde yorumlamak mümkündür. Bu durumda iç bölgede potansiyel fonksiyonunun türevleri, yani hız bileşenleri sıfır olur. Böylece sınır şartı panel kontrol noktalarında yüzeyin iç tarafında teğetsel hız bileşenlerinin sıfır olması şeklinde uygulanabilir:

$$V_{ii}^- = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11.49)$$

Bu yöntemde de firar kenarına komşu iki panel üzerindeki girdap dağılımlarının firar kenarının üst ve alt yüzleri arasında bir hız farkı yaratmaması için (Kutta şartı) bu paneller üzerindeki girdap şiddetleri toplamı sıfır olmalıdır.

$$\gamma_1 + \gamma_N = 0 \quad (11.50)$$

Ancak bu denklemin ilavesiyle denklem sistemindeki denklem sayısı bilinmeyen sayısından bir fazla olur. Bu durumda denklemlerden herhangi birisi çıkartılır.