

Bölüm 10

TEKİLLİK ELEMANLARI ve ETKİLEŞİM KATSAYILARI

10.1 İki-boyutlu noktasal tekillik elemanları

10.1.1 İki-boyutlu noktasal kaynak

10.1.2 İki-boyutlu noktasal duble

10.1.3 İki-boyutlu noktasal girdap

10.2 İki-boyutlu sabit şiddetli tekillik elemanları

10.2.1 Sabit şiddetli kaynak dağılımı

10.2.2 Sabit şiddetli duble dağılımı

10.2.3 Sabit şiddetli girdap dağılımı

10.3 İki-boyutlu lineer şiddetli tekillik elemanları

10.3.1 Lineer kaynak dağılımı

10.3.2 Lineer duble dağılımı

10.3.3 Lineer girdap dağılımı

10.3.4 Kuadratik duble dağılımı

10.4 Üç-boyutlu sabit şiddetli tekillik elemanları

10.4.1 Düzlemsel-dörtgen kaynak elemanı

10.4.2 Düzlemsel-dörtgen duble elemanı

10.4.3 Sabit duble panelin Girdap halkasına özdeşliği

10.4.4 Yakın/uzak alan formüllerinin karşılaştırması

10.4.5 Sabit şiddetli girdap çizgi parçası

10.4.6 Girdap halkası

10.4.7 Atnalı girdabı

10.5 Üç-boyutlu yüksek dereceden elemanlar

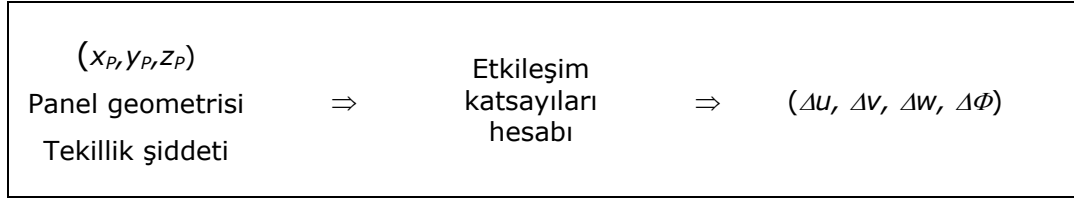
Kaynak dağılımının etkisi

Duble dağılımının etkisi

Bölüm 10

TEKİLLİK ELEMANLARI ve ETKİLEŞİM KATSAYILARI

Önceki bölümlerde gövde ve kanatlar etrafındaki potansiyel akım problemlerinin çözümünün basit çözümlerin dağılımlarından elde edilebileceği gösterilmiştir. Laplace denkleminin bu basit çözümlerinin şiddetleri katı cidarlar üzerinde sıfır normal hız şartı uygulanılarak bulunabilir. Bu sınır-değer probleminin nümerik çözümüne giden adımlar biçimsel olarak Bölüm 9.7 de anlatılmıştır. Genel olarak yöntemin karmaşıklığı arttıkça eleman etkileşimlerinin hesabı da daha zor olmaktadır. Bu bakımdan, bu bölümde, nümerik yöntemlerin esasını teşkil eden tipik nümerik elemanlardan bir kısmı tanıtılacaktır. Şekil 10.1 de bir elemanın etkileşim katsayısı hesabıyla ilgili bilgiler biçimsel olarak gösterilmiştir. Herhangi bir $P(x_P, y_P, z_P)$ noktasındaki indüklenmiş potansiyel ve hız artımlarını hesaplamak için eleman geometrisiyle ve tekillik şiddeti ile ilgili bilgilere ihtiyaç vardır.



Şekil 10.1

İfade basitliği açısından tekillik elemanlarıyla ilgili aşağıdaki bütün tanımlamalarda Δ sembolü gözardı edilecektir. Bununla birlikte, hız potansiyelinin ve hız bileşenlerinin değerlerinin artımsal değerler olduğu ve süperpozisyon ilkesine uygun olarak birbirleriyle toplanacağı unutulmamalıdır.

İzleyen bölümlerde çıkarımı nispeten kolay olan iki-boyutlu bazı elemanlar sunulacaktır. Daha sonra sunulacak olan üç-boyutlu elemanların karmaşıklıkları, tekillik şiddetindeki polinomik yaklaşımın derecesine bağlı olarak artmaktadır. Formüller panele bağlı eksen takımında verilecek olup, bu formüller genel bir koordinat sisteminde kullanılırken ilgili koordinat dönüşümlerinin (öteleme ve dönme biçiminde) yapılması gereklidir.

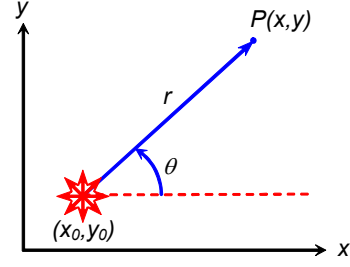
10.1 İki-boyutlu noktasal tekillik elemanları

Bu elemanlar muhtemelen en basit ve kullanımı en kolay olan elemanlardır. Bu bakımdan, yüksek dereceden elemanlar kullanıldığı zaman dahi, etki noktasının elemandan çok uzakta olduğu durumlarda uzak-bölge etkisinin tanımlanmasında noktasal elemanlar kullanılabilir.

İzleyen alt bölümlerde kaynak, duble ve girdap olmak üzere üç noktasal elemana ait formüller verilecektir.

10.1.1 İki-boyutlu noktasal kaynak

Şekil 10.2 de görüldüğü gibi (x_0, y_0) noktasında yer alan σ şiddetindeki bir noktasal kaynağın bir $P(x, y)$ noktasında yarattığı hız potansiyeli ve hız bileşenleri artımları sırasıyla



Şekil 10.2: Noktasal kaynağın etkisi

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (10.1)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (10.2)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (10.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Noktasal kaynağın kompleks potansiyel fonksiyonu ve kompleks eşlenik hız fonksiyonu sırasıyla

$$f(z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln z \quad w^*(z) = \frac{\sigma}{2\pi z}$$

şeklinde yazılabilir.

10.1.2 İki-boyutlu noktasal duble

Bölüm 3.7 de olduğu gibi (x_0, y_0) noktasında yer alan ve y doğrultusunda yönelmiş $[\bar{\mu} = (0, \mu)]$ bir dublenin $P(x, y)$ noktasında (Şekil 10.2) indüklediği hız potansiyeli ve hız bileşenleri sırasıyla

$$\Phi(x, y) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (10.4)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\mu}{\pi} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^2} \quad (10.5)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{-\mu}{2\pi} \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^2} \quad (10.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Temel tekillik elemanının Şekil 10.3 de gösterildiği gibi (x,y) koordinatlarına göre β açısı kadar döndürülmüş bir (x^*,y^*) koordinat sisteminde verilmesi halinde hız bileşenleri

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

şeklinde bir dönüşümle bulunabilir

10.1.3 İki-boyutlu noktasal girdap

(x_0, y_0) noktasında yer alan Γ şiddetindeki noktasal girdabı dikkate alalım. Bu girdabın $P(x,y)$ noktasında indüklediği hız potansiyeli ve hız bileşenleri Bölüm 3.9 daki sonuçların yardımıyla

$$\Phi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) \quad (10.8)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (10.9)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{-\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (10.10)$$

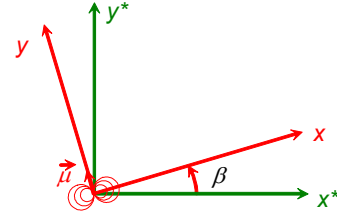
şeklinde yazılabilir.

Noktasal girdabın kompleks potansiyel fonksiyonu ve kompleks eşlenik hız fonksiyonu sırasıyla

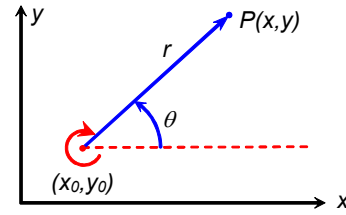
$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad w^*(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada belirtilen bütün noktasal tekillik elemanları Şekil 10.1 de gösterilen gerekleri sağlamaktadır. Yani, P noktasındaki hız ve potansiyel artımları geometriye (x, y, x_0, y_0) ve tekillik elemanının şiddetine bağlıdır.



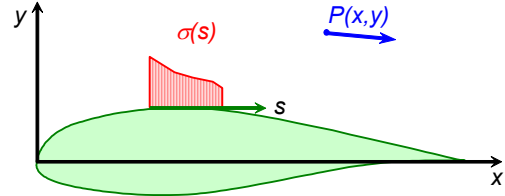
Şekil 10.3: Panel koordinatlarından genel koordinatlara dönüşüm



10.2 İki-boyutlu sabit şiddetli tekillik elemanları

Yukarıda izah edilen münferit kaynak, duble ve girdap tekillik elemanları sürekli bir yüzeyin temsilini sağlayamaz. Daha hassas bir temsil için bir sürekli yüzey panel adı verilen küçük elemanlara bölünür. Herbir panel ve bu panel üzerindeki tekillik dağılımı Şekil 10.4 de gösterildiği gibi polinomlarla temsil edilir. Bu bölümde paneller doğru parçaları şeklinde alınacak, tekillik şiddetleri için ise sadece sabit, lineer değişen ve kuadratik değişen dağılımlar kullanılacaktır.

Ancak bu bölümdeki yöntem daha-yüksek mertebeden paneller için de uygulanabilir.

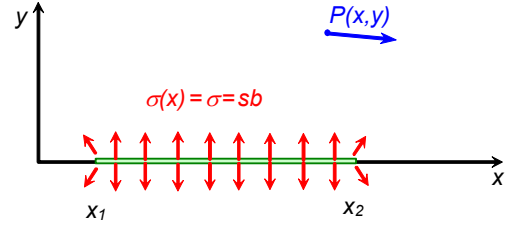


Şekil 10.4: Panel elemanları

Bu bölümde kaynak, duble ve girdap dağılımları için örnekler verilecek olup, basitlik açısından bağıntılar panele bağlı eksen takımında verilecektir. İncelenecek bir problemde sonuçların problemin genel eksen takımına dönüştürülmesi gerekecektir.

10.2.1 Sabit şiddetli kaynak dağılımı

Şekil 10.5 de görüldüğü gibi x eksenini boyunca $\sigma=sb$ şiddetindeki kaynak dağılımının bir P noktasındaki indüklemeleri noktasal kaynağın indüklemeleri için daha önce bulunmuş olan (10.1-3) bağıntılarından yararlanılarak aşağıdaki integrasyon formülleriyle elde edilir:



Şekil 10.5: Sabit şiddette kaynak dağılımı

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.11)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.12)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.13)$$

Yukarıdaki integraller sırasıyla

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{4\pi} \left[(x - x_1) \ln r_1^2 - (x - x_2) \ln r_2^2 - 2(x_2 - x_1) + 2y(\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (10.14)$$

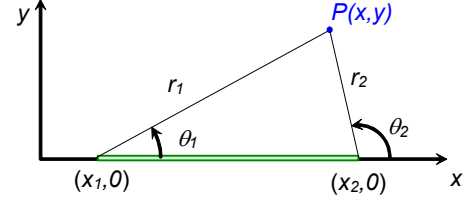
$$u(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sigma}{4\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (10.17)$$

$$v(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (10.18)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada x_1 ve x_2 panel uç noktalarının koordinatları, r_1 ve r_2 uç noktalarının P indüklemeye noktasına uzaklıkları, θ_1 ve θ_2 de uç noktalarını P noktasına birleştiren doğruların x eksenine yaptığı açılar olup:

$$\theta_k = \tan^{-1} \frac{y}{x - x_k}; \quad k = 1, 2 \quad (10.15)$$

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + y^2}; \quad k = 1, 2 \quad (10.16)$$



Şekil 10.6: İntegral parametreleri

dır.

Bu bağıntılar x ve y değişkenleri cinsinden açık olarak

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{4\pi} \left\{ (x - x_1) \ln \left[(x - x_1)^2 + y^2 \right] - (x - x_2) \ln \left[(x - x_2)^2 + y^2 \right] \right\} + 2y \left(\tan^{-1} \frac{y}{x - x_2} - \tan^{-1} \frac{y}{x - x_1} \right) \quad (10.19)$$

$$u(x, y) = \frac{\sigma}{4\pi} \ln \frac{(x - x_1)^2 + y^2}{(x - x_2)^2 + y^2} \quad (10.20)$$

$$v(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y}{x - x_2} - \tan^{-1} \frac{y}{x - x_1} \right) \quad (10.21)$$

şeklinde de yazılabilir.

Özel bir durum P noktasının panel üzerinde yer alması halidir. $y = \pm 0$ halinde indüklemeler

$$\Phi(x, \pm 0) = \frac{\sigma}{4\pi} \left[(x - x_1) \ln(x - x_1)^2 - (x - x_2) \ln(x - x_2)^2 \right] \quad (10.22)$$

$$u(x, \pm 0) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \frac{(x - x_1)}{(x - x_2)} \quad (10.23)$$

$$v(x, \pm 0) = \pm \frac{\sigma}{2} \quad (10.24)$$

olur. P noktasının panel orta noktasında olması halinde ise

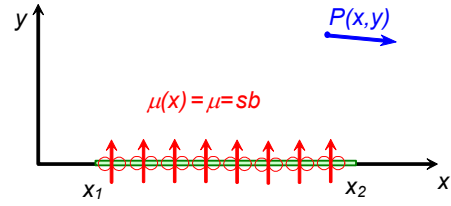
$$\Phi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \pm 0\right) = \frac{\sigma}{2\pi} (x_2 - x_1) \ln\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \quad (10.22)$$

dır. Ayrıca v hız bileşeni bütün panel üzerinde sabit iken, u hız bileşeni panel orta noktasında sıfır, panel uçlarında ise sonsuz büyüklüktedir.

v hız bileşeninin panel üzerindeki sabit değerinin panele üstten veya alttan yaklaşılmasına bağlı olarak farklı işaretli olduğu unutulmamalıdır.

10.2.2 Sabit şiddetli duble dağılımı

Şekil 10.7 de görüldüğü gibi x eksenini boyunca y doğrultusunda ve yönünde, $\mu = sb$ şiddetinde bir duble dağılımı bulunması halinde bir P noktasındaki indüklemeler duble indüklemeleri için daha önce bulunmuş olan (10.4-6) bağıntılarından yararlanılarak aşağıdaki integrasyon formülleriyle elde edilir:



Şekil 10.7: Sabit şiddette duble dağılımı

$$\Phi(x, y) = -\frac{\mu}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.25)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\mu}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)y}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} dx_0 \quad (10.26)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\mu}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_0)^2 - y^2}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} dx_0 \quad (10.27)$$

Görüldüğü gibi duble dağılımı için bulunan potansiyel fonksiyonu daha önce kaynak dağılımı için bulunan v hız bileşeniyle benzerdir. Buna göre (10.25) integralinin sonucu (10.18) bağıntısı yardımıyla

$$\Phi(x, y) = \frac{-\mu}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y}{x - x_2} - \tan^{-1} \frac{y}{x - x_1} \right) \quad (10.28)$$

olarak yazılabilir.

(10.28) bağıntısının aynı zamanda bir girdabın indüklediği potansiyel için verilmiş olan (10.8) bağıntısına da benzediği görülmektedir. Dolayısıyla duble dağılımının indüklediği potansiyel panel uç noktalarında yer alan zıt yönde ve $\Gamma = \mu$ şiddetindeki iki girdabın indüklediği potansiyelle özdeştir.



Şekil 10.8: Duble dağılımına özdeş girdap sistemi

Belirtilen bu özellik nedeniyle duble dağılımının indüklediği hız bileşenleri için verilen (10.26) ve (10.27) integrallerinin sonuçları noktasal girdabın indüklediği hız bileşenleri için verilen (10.9) ve (10.10) bağıntılarından hareketle

$$u(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{y}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} \right] \quad (10.29)$$

$$v(x, y) = \frac{-\Gamma}{2\pi} \left[\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2 + y^2} \right] \quad (10.30)$$

şeklinde yazılabilir.

P noktası panelin üzerinde olduğu taktirde ($y=\pm 0$, $x_2 < x < x_1$)

$$\Phi(x, \pm 0) = \mp \frac{\mu}{2} \quad (10.31)$$

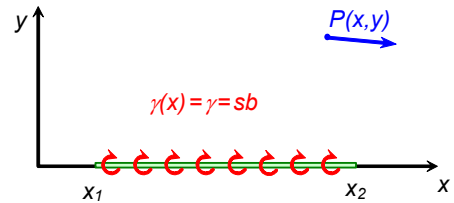
$$u(x, \pm 0) = \mp \frac{d\mu(x)}{dx} = 0 \quad (10.32)$$

$$v(x, \pm 0) = \frac{-\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right] \quad (10.33)$$

olur. Panel uç noktalarında v hız bileşeni sonsuzdur.

10.2.3 Sabit şiddetli girdap dağılımı

Şekil 10.9 de görüldüğü gibi x eksenini boyunca saat ibreleri yönünde $\gamma = sb$ şiddetinde bir girdap dağılımı bulunması halinde bir P noktasındaki indüklemeler noktasal girdapla noktasal kaynak arasındaki benzerlikten yararlanılarak kolaylıkla hesaplanabilir.



Şekil 10.9: Sabit şiddette girdap dağılımı

Noktasal girdap için daha önce bulunmuş olan (10.8-10) bağıntılarından yararlanılarak aşağıdaki integrasyon formülleriyle elde edilir:

$$\Phi(x, y) = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x-x_0} \right) dx_0 \quad (10.34)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.35)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\gamma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.36)$$

Bu integraller hesaplanarak

$$\Phi(x, y) = \frac{-\gamma}{2\pi} \left[(x - x_1)\theta_1 - (x - x_2)\theta_2 + \frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right] \quad (10.37)$$

$$u(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (10.39)$$

$$v(x, y) = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (10.40)$$

elde edilebilir.

Elemanın kendi üzerindeki indüklemeleri için

$$\Phi(x, \pm\theta) = \mp \frac{\gamma}{2} (x - x_2) \quad (10.41)$$

$$u(x, \pm\theta) = \mp \frac{\gamma}{2} \quad (10.38)$$

$$v(x, \pm\theta) = \frac{\gamma}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (10.39)$$

Çoğu zaman panel orta noktasındaki indükleme ile ilgilenilir ki bu noktada $r_1=r_2$ olup v hız bileşeninin değeri sıfırdır.

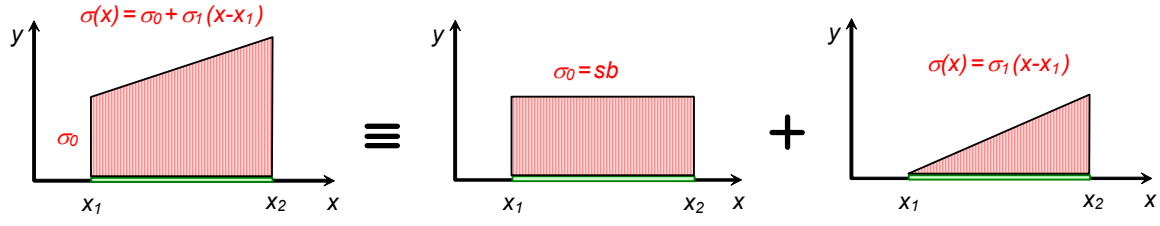
10.3 İki-boyutlu lineer şiddetli tekil elemanları

Bir yüzey üzerindeki tekil dağılımının paneller üzerinde sabit şiddette tekil dağılımlarıyla temsil edilmesi halinde panel uç noktalarında tekil şiddetleri süresiz olmaktadır. Bunu gidermek için panel boyunca lineer değişen tekil dağılımları önerilebilir. Tekilliğin sürekli olmasını sağlamak için komşu iki panel üzerindeki tekil şiddetlerinin bu iki panelin birleşme noktasında eşit olması şartı koşulur.

10.3.1 Lineer kaynak dağılımı

Şekil 10.10 'da görüldüğü gibi x eksenı boyunca ($x_1 < x < x_2$) aralığında şiddeti $\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1(x - x_1)$ şeklinde değişen bir kaynak dağılımını dikkate alalım. Bu kaynak dağılımını σ_0 sabit şiddetinde bir kaynak dağılımı ile $\sigma(x) = \sigma_1(x - x_1)$ şeklinde lineer olarak değişen şiddetteki bir kaynak dağılımının süperpozisyonu şeklinde düşünmek mümkündür.

Bu iki kaynak dağılımı için ayrı ayrı elde edilecek sonuçlar süperpoze edilerek istenen lineer dağılımlara ait sonuçlar bulunabilir.



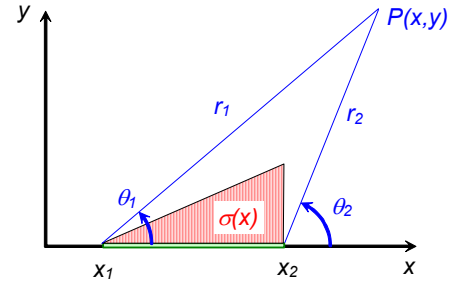
Şekil 10.10: Lineer kaynak dağılımının süperpozisyonu

Sabit kaynak dağılımı için sonuçlar daha önce bulunmuştu. Şiddeti $\sigma(x) = \sigma_1(x-x_1)$ şeklinde değişen kaynak dağılımı için panel boyunca integral alınarak

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} x_0 \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.44)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.45)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 y}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.46)$$



Şekil 10.11: Lineer kaynak dağılımında parametreler

bağıntıları yazılabilir. Bu bağıntılar integre edilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma_1}{4\pi} \left[\frac{x^2 - x_1^2 - y^2}{2} \ln r_1^2 - \frac{x^2 - x_2^2 - y^2}{2} \ln r_2^2 + 2xy(\theta_2 - \theta_1) - x(x_2 - x_1) \right] \quad (10.47)$$

$$u(x, y) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[x \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + (x_1 - x_2) + y(\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (10.48)$$

$$v(x, y) = \frac{\sigma_1}{4\pi} \left[y \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + 2x(\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (10.49)$$

Buradaki r_1 , r_2 , θ_1 , θ_2 büyüklüklerinin değerleri daha önce (10.15-16) bağıntılarıyla verilmiştir.

P noktası panel üzerinde olduğu takdirde ($y = \pm 0$, $x_2 < x < x_2$) bu bağıntılar

$$\Phi(x, \pm 0) = \frac{\sigma_1}{4\pi} \left[(x^2 - x_1^2) \ln r_1 - (x^2 - x_2^2) \ln r_2 - x(x_2 - x_1) \right] \quad (10.53)$$

$$u(x, \pm 0) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left[x \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + (x_1 - x_2) \right] \quad (10.54)$$

$$v(x, \pm 0) = \pm \frac{\sigma_l}{2} x \quad (10.55)$$

şekline ve P noktası panel orta noktasında olduğu taktirde de

$$\Phi(x, \pm 0) = \frac{\sigma_l}{4\pi} (x_2^2 - x_1^2) \left(\ln \frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{l}{2} \right) \quad (10.53a)$$

$$u(x, \pm 0) = \frac{\sigma_l}{2\pi} (x_1 - x_2) \quad (10.54a)$$

$$v(x, \pm 0) = \pm \frac{\sigma_l}{2} (x_1 - x_2) \quad (10.55a)$$

şekline gelir.

10.3.2 Linear duble dağılımı

Şekil 10.12 'de görüldüğü gibi x eksenini boyunca ($x_1 < x < x_2$) aralığında şiddeti $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1(x - x_1)$ şeklinde değişen bir duble dağılımını dikkate alalım. Duble eksenleri y doğrultusunda olsun [$\mu = (0, \mu)$]

Sabit duble dağılımı için etkileşim sonuçları daha önce verilmiş olduğundan burada da sadece lineer duble dağılımının etkisinin incelenmesi yeterli olacaktır.

Şiddeti $\mu(x) = \mu_1 x$ şeklinde değişen duble dağılımının bir $P(x, y)$ noktasındaki indüklemeleri

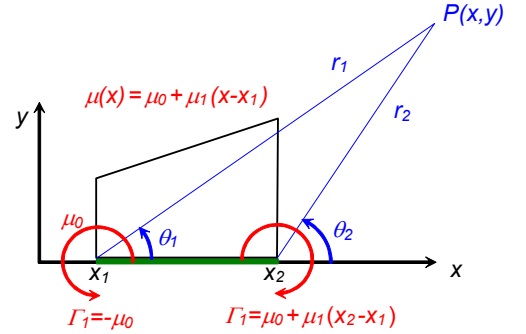
$$\Phi(x, y) = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (10.56)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0 (x - x_0) y}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} dx_0 \quad (10.57)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\mu_1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{[(x - x_0)^2 - y^2] x_0}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} dx_0 \quad (10.58)$$

integralleriyle hesaplanabilir.

Potansiyel fonksiyonu için yazılan integral lineer kaynak dağılımına ait v hız bileşeni için daha önce yazılan (10.46) integralinin benzeri olup bunun için (10.49) bağıntısı ile bulunan sonuçtan yararlanılarak



Şekil 10.12: Linear duble dağılımı

$$\Phi(x, y) = \frac{-\mu_1}{4\pi} \left[y \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + 2x(\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (10.59)$$

elde edilir.

Bu son bağıntıyı $(x_2\theta_2 - x_1\theta_1)$ terimini bir defa ekleyerek ve bir defa da çıkartarak

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{-\mu_1}{2\pi} \left[\frac{y}{2} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + x(\theta_2 - \theta_1) \right] = \frac{\mu_1}{2\pi} \left[\frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + x(\theta_1 - \theta_2) \right] \\ &= \frac{\mu_1}{2\pi} \left[\frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + x(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_2 x_2 - \theta_1 x_1) - (\theta_2 x_2 - \theta_1 x_1) \right] \\ &= \frac{\mu_1}{2\pi} \left[\frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + (x - x_1)\theta_1 - (x - x_2)\theta_2 + \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 \right] \\ &= \frac{\mu_1}{2\pi} \left[\frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + (x - x_1)\theta_1 - (x - x_2)\theta_2 \right] + \frac{\mu_1}{2\pi} [\theta_1 x_1 - \theta_2 x_2] \end{aligned} \quad (10.60)$$

şeklinde düzenlemek mümkündür. Bu eşitliğin sağındaki ilk terim daha önce sabit girdap dağılımı için bulunan

$$\Phi(x, y) = \frac{-\gamma}{2\pi} \left[(x - x_1)\theta_1 - (x - x_1)\theta_2 + \frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right] \quad (10.37)$$

bağıntısına benzemektedir. Yani belirtilen terim $\Gamma = -\mu_1$ şiddetindeki bir sabit girdap dağılımının indüklemesine eşit bir indükleme yapmaktadır. Şayet bu terim

$$\Phi^{**}(x, y) = \frac{\mu_1}{2\pi} \left[(x - x_1)\theta_1 - (x - x_1)\theta_2 + \frac{y}{2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right] \quad (10.38a)$$

şeklinde belirtilirse lineer duble dağılımının indüklemesi de

$$\Phi(x, y) = \Phi^{**}(x, y) + \frac{\mu_1}{2\pi} [\theta_1 x_1 - \theta_2 x_2] \quad (10.61)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca bu son eşitlikte parantez içinde yer alan son iki terim de daha önce münferit girdap için verilmiş olan

$$\Phi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (10.8)$$

bağıntısına benzer olup, $(x_1, 0)$ noktasında yer alan $\Gamma = \mu_1 x_1$ şiddetindeki ve $(x_2, 0)$ noktasında yer alan $\Gamma = \mu_1 x_2$ şiddetindeki münferit girdapların indükledikleri potansiyellere eşdeğerdir.

Şimdi, lineer duble dağılımının indüklediği hız bileşenlerini bulmak için (10.59) bağıntısından türev almak yerine, bu bağıntının eşdeğeri olan (10.61) bağıntısının türevlerini almak veya daha kolay bir yol olarak bu bağıntıyı kısmen veren (10.37) bağıntısının ve (10.8) bağıntısının daha önce alınmış türevlerinden yararlanmak uygun olur.

Buna göre (10.37) ve (10.8) bağıntılarının x 'e göre türevlerini veren (10.39) ve (10.9) bağıntıları yardımıyla lineer duble dağılımının indüklediği u hız bileşeni için,

$$u(x, y) = -\frac{\mu_1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) - \frac{\mu_1 x_1}{2\pi} \frac{y}{r_1^2} + \frac{\mu_1 x_2}{2\pi} \frac{y}{r_2^2}$$

ve bağıntılarının y 'ye göre türevlerini veren (10.40) ve (10.10) bağıntıları yardımıyla lineer duble dağılımının indüklediği v hız bileşeni için,

$$v(x, y) = -\frac{\mu_1}{4\pi} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{\mu_1 x_1}{2\pi} \frac{x - x_1}{r_1^2} - \frac{\mu_1 x_2}{2\pi} \frac{x - x_2}{r_2^2}$$

veya bu bağıntılar düzenlenerek

$$u(x, y) = \frac{\mu_1}{2\pi} \left[\left(\frac{x_2}{r_2^2} - \frac{x_1}{r_1^2} \right) y - (\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (10.62)$$

$$v(x, y) = \frac{\mu_1}{4\pi} \left[-\ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{2x_1(x - x_1)}{r_1^2} - \frac{2x_2(x - x_2)}{r_2^2} \right] \quad (10.63)$$

elde edilir.

P noktası panel üzerinde olduğu takdirde ($y = \pm 0$, $x_2 < x < x_1$) indüklenme bağıntıları

$$\Phi(x, \pm 0) = \mp \frac{\mu_1}{2} x \quad (10.64)$$

$$u(x, \pm 0) = \mp \frac{\mu_1}{2} \quad (10.65)$$

$$v(x, \pm 0) = \frac{\mu_1}{4\pi} \left[-\ln \frac{r_2^2}{r_1^2} + \frac{2x_1(x - x_1)}{r_1^2} - \frac{2x_2(x - x_2)}{r_2^2} \right] \quad (10.66)$$

şekline ve P noktası panel orta noktasında olduğu takdirde de

$$\Phi(x_M, \pm 0) = \mp \frac{\mu_1}{2} x \quad (10.64)$$

$$u(x_M, \pm 0) = \mp \frac{\mu_1}{2} \quad (10.65)$$

$$v(x_M, \pm 0) = -\frac{\mu_1}{\pi} \left[\frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \right] \quad (10.66a)$$

şekline gelir. Görüldüğü gibi panel uçlarında dikey hızda tekillik mevcuttur.

Duble dağılımı şiddetinin $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1(x-x_1)$ şeklindeki genel hali için daha önce abit duble dağılımı için bulunan integral değerleriyle bu bölümde özel lineer dağılım için bulunan integral sonuçlarının süperpoze edilmesi gerekir.

10.3.3 Lineer girdap dağılımı

10.4 Üç-boyutlu sabit şiddetli tekillik elemanları

Üç-boyutlu halde, iki boyutlu halde olduğu gibi ayrıklaştırma işlemleri iki kısımdadır: Geometrinin ayrıklaştırılması, tekillik dağılımının ayrıklaştırılması.

Şayet geometri ve tekillik şiddetleri polinomlarla ifade edilirse, birinci-dereceden bir yaklaşım halinde yüzey için düzlemsel-dörtgen (quadrilateral) paneller tanımlanır. İkinci- veya üçüncü dereceden yaklaşımlar halinde ise yüzeye parabolik veya üçüncü-dereceden polinomik eğriler uydurulur. Benzeri biçimde tekillik şiddetlerinin dağılımı sabit-şiddette (birinci-dereceden yaklaşım), lineer değişen (ikinci-derece), veya parabolik (üçüncü-derece) fonksiyonlarla ifade edilir.

En basit ve temel üç-boyutlu eleman, düzlemsel-dörtgen geometri ve sabit-şiddette tekillik dağılımı şeklindedir. İzleyen kısımda bu tip sabit-şiddette elemanlar tanımlanarak gerekli formülleri verilecektir.

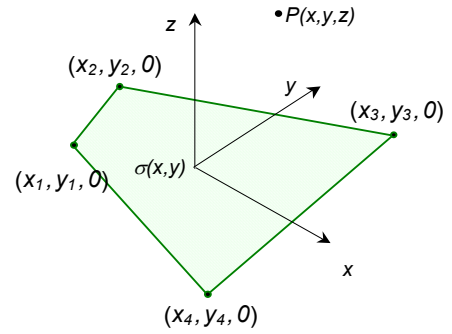
Buradaki çıkarımlar da yine panele bağlı bir lokal koordinat sisteminde yapılmaktadır. Herhangi bir geometri için çözülecek problemde cisme bağlı genel koordinat sistemine ayrıca geçmek gereklidir.

10.4.1 Düzlemsel-dörtgen kaynak elemanı

Şekil 10.14 de gösterildiği gibi dört doğru ile sınırlandırılmış bir düzlemsel-dörtgen eleman üzerinde birim alan başına σ sabit şiddetinde bir kaynak dağılımını dikkate alalım. Bu elemanın bir P noktasında indüklediği potansiyel hız bileşenleri

$$\Phi(x, y, z) = \frac{-\sigma}{4\pi} \iint_S \frac{dS}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} \quad (10.87)$$

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (10.88)$$



Şekil 10.14: Düzlemsel dörtgen kaynak elemanı

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki integralin hesaplanması çok uzun işlemler gerektirmekte olup, Hess ve Smith^{10.1} tarafından elde edilen indüklenmiş potansiyel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{-\sigma}{4\pi} \left[\frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (y-y_1)(x_2-x_1)}{d_{12}} \ln \frac{r_1+r_2+d_{12}}{r_1+r_2-d_{12}} + \frac{(x-x_2)(y_3-y_2) - (y-y_2)(x_3-x_2)}{d_{23}} \ln \frac{r_2+r_3+d_{23}}{r_2+r_3-d_{23}} + \frac{(x-x_3)(y_4-y_3) - (y-y_3)(x_4-x_3)}{d_{34}} \ln \frac{r_3+r_4+d_{34}}{r_3+r_4-d_{34}} + \frac{(x-x_4)(y_1-y_4) - (y-y_4)(x_1-x_4)}{d_{41}} \ln \frac{r_4+r_1+d_{41}}{r_4+r_1-d_{41}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + |z| \left[\tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2} \right) \right. \\
& + \tan^{-1} \left(\frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_2} \right) \\
& + \tan^{-1} \left(\frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4} \right) \\
& \left. + \tan^{-1} \left(\frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1} \right) \right] \quad (10.89)
\end{aligned}$$

Burada

$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (10.90a)$$

$$d_{23} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (10.90b)$$

$$d_{34} = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \quad (10.90c)$$

$$d_{41} = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} \quad (10.90d)$$

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (10.91a)$$

$$m_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \quad (10.91b)$$

$$m_{34} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \quad (10.91c)$$

$$m_{41} = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} \quad (10.91d)$$

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (10.92)$$

$$e_k = (x - x_k)^2 + z^2, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (10.93)$$

$$h_k = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (10.94)$$

Hess ve Smith tarafından hesaplanan hız bileşenleri de aşağıdadır:

$$u = \frac{\sigma}{4\pi} \left[\frac{y_2 - y_1}{d_{12}} \ln \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} + \frac{y_3 - y_2}{d_{23}} \ln \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right]$$

$$+ \frac{y_4 - y_3}{d_{34}} \ln \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} + \frac{y_4 - y_1}{d_{41}} \ln \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \quad (10.95)$$

$$v = \frac{\sigma}{4\pi} \left[\frac{x_1 - x_2}{d_{12}} \ln \frac{r_1 + r_2 - d_{12}}{r_1 + r_2 + d_{12}} + \frac{x_2 - x_3}{d_{23}} \ln \frac{r_2 + r_3 - d_{23}}{r_2 + r_3 + d_{23}} \right. \\ \left. + \frac{x_3 - x_4}{d_{34}} \ln \frac{r_3 + r_4 - d_{34}}{r_3 + r_4 + d_{34}} + \frac{x_1 - x_4}{d_{41}} \ln \frac{r_4 + r_1 - d_{41}}{r_4 + r_1 + d_{41}} \right] \quad (10.96)$$

$$w = \frac{\sigma}{4\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_1 - h_1}{zr_1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}e_2 - h_2}{zr_2} \right) \right. \\ + \tan^{-1} \left(\frac{m_{23}e_2 - h_2}{zr_2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{23}e_3 - h_3}{zr_3} \right) \\ + \tan^{-1} \left(\frac{m_{34}e_3 - h_3}{zr_3} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{34}e_4 - h_4}{zr_4} \right) \\ \left. + \tan^{-1} \left(\frac{m_{41}e_4 - h_4}{zr_4} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{m_{41}e_1 - h_1}{zr_1} \right) \right] \quad (10.97)$$

Hızın u ve v bileşenleri her yerde tanımlıdır. Ancak dörtgenin kenarlarında sonsuz olur. Elemanın kendi üzerindeki etkisi sentroid üzerinde değerlendirilir ki bu noktada u ve v hız bileşenleri sıfıra yaklaşır. $z \rightarrow 0$ için eleman içinde dik hız bileşenindeki ani değişim Bölüm 4.4 dekinin benzeridir:

$$w(z = 0^\pm) = \pm \frac{\sigma}{2} \quad (10.98)$$

P noktası elemanın dışında olursa:

$$w(z = 0^\pm) = 0 \quad (10.99)$$

alınır.

UZAK BÖLGE:

P kontrol noktası $(x_0, y_0, 0)$ eleman merkezinden uzak olduğunda hesaplama verimini arttırmak bakımından dörtgensel elemanın etkisi bir tek noktasal kaynak kullanılarak temsil edilebilir. Uzaklık tanımı her ne kadar kullanıcı tarafından yapılıyorsa da genellikle ortalama panel çapının 3-5 katını üzerindeki uzaklıklar büyük sayılır. Bölüm 3.4 de verilen bilgiler çerçevesinde A alanına sahip dörtgensel elemanın etkisi bir noktasal kaynakla

$$\Phi(x, y, z) = \frac{-\sigma A}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}} \quad (10.100)$$

$$u(x, y, z) = \frac{\sigma A (x - x_0)}{4\pi [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (10.101)$$

$$v(x, y, z) = \frac{\sigma A (y - y_0)}{4\pi [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (10.102)$$

$$w(x, y, z) = \frac{\sigma A (z - z_0)}{4\pi [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (10.103)$$

şeklinde tanımlanır.

Sabit kaynak dağılımlı düzlemsel-dörtgen bir elemanın etkisinin hesabı için bir program Ek D de 11 nolu program olarak verilmiştir.

10.4.2 Düzlemsel-dörtgen duble elemanı

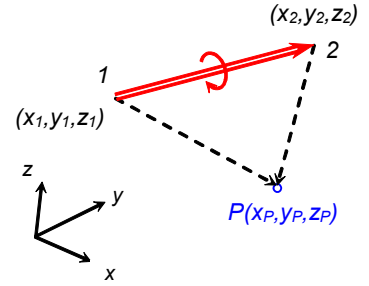
10.4.5 Sabit-şiddetli girdap çizgi parçası

Taşıyıcı akımlara ait ilk çözümler taşıyıcı yüzey denklemlerinin (Bölüm 4.5) girdap dağılımı çözümlerine dayanmaktadır. Bu gibi bir problemin üç-boyutlu çözümü, kanadı ve izi modelleyen sabit-şiddetli girdap-çizgi parçaları kullanarak gerçekleştirilebilir. Γ şiddetindeki bir girdap parçasının indüklediği hızlar Bölüm 2.11-2.12 de (2.68b) denklemi ile

$$\Delta \vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (10.114)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Şayet girdap parçası Şekil 10.23 de gösterildiği gibi 1 ve 2 noktaları arasında yer alırsa herhangi bir P noktasındaki indüklenmiş hız (2.72) denklemi vasıtasıyla

$$\Delta \vec{V}_{1-2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \quad (10.115)$$



Şekil 10.23

şeklinde hesaplanır. 1, 2 ve P noktalarının koordinatlarının verildiği bir kartezyen koordinat sisteminde hızın hesaplanması aşağıdaki adımlarla gerçekleştirilir:

1- $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ vektörel çarpımının ve mutlak değerinin hesaplanması:

$$\vec{r}_1 = x_{P1}\vec{i} + y_{P1}\vec{j} + z_{P1}\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = x_{P2}\vec{i} + y_{P2}\vec{j} + z_{P2}\vec{k}$$

$$x_{P1} = x_P - x_1, \quad y_{P1} = y_P - y_1, \quad z_{P1} = z_P - z_1$$

$$x_{P2} = x_P - x_2, \quad y_{P2} = y_P - y_2, \quad z_{P2} = z_P - z_2$$

olmak üzere vektörel çarpım

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{P1} & y_{P1} & z_{P1} \\ x_{P2} & y_{P2} & z_{P2} \end{vmatrix} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada

$$\begin{aligned} x_v &= y_{P1}z_{P2} - z_{P1}y_{P2} \\ y_v &= z_{P1}x_{P2} - x_{P1}z_{P2} \\ z_v &= x_{P1}y_{P2} - y_{P1}x_{P2} \end{aligned}$$

dir.

mutlak değer de

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \Delta_v = \sqrt{(x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2}$$

2- r_1 ve r_2 uzaklıkları,

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1| &= \Delta_1 = \sqrt{(x_{P1})^2 + (y_{P1})^2 + (z_{P1})^2} \\ |\vec{r}_2| &= \Delta_2 = \sqrt{(x_{P2})^2 + (y_{P2})^2 + (z_{P2})^2} \end{aligned}$$

3- Skaler çarpımların hesaplanması

$$\vec{r}_0 = x_{12} \vec{i} + y_{12} \vec{j} + z_{12} \vec{k}, \quad x_{12} = x_2 - x_1, \quad y_{12} = y_2 - y_1, \quad z_{12} = z_2 - z_1$$

$$s = \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = s_{01} - s_{02}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} s_{01} &= \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} = \frac{x_{12}x_{P1} + y_{12}y_{P1} + z_{12}z_{P1}}{\Delta_1} \\ s_{02} &= \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{x_{12}x_{P2} + y_{12}y_{P2} + z_{12}z_{P2}}{\Delta_2} \end{aligned}$$

4- Böylece indüklenmiş hız vektörü $\Delta \vec{V}_{12} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$

olmak üzere

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x_v s}{(\Delta_v)^2}, \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{y_v s}{(\Delta_v)^2}, \quad w = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{z_v s}{(\Delta_v)^2},$$

elde edilir.

UYARI: P noktası girdap çizgisinin üzerinde ise teklik söz konusu olup bu durumun kontrol edilmesi ve girdap çizgisinin çok yakınında özel bir uygulama yapılması gerekmektedir. Sayısal hesaplamada bu yakınlık ε yarıçaplı bir bölge ile tayin edilir. Yani

$$r_1 < \varepsilon, \quad r_2 < \varepsilon, \quad |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| < \varepsilon$$

olması durumlarına bakılır. Bu durum gerçekleşiyorsa üç hız bileşeni için de

$$u = v = w = 0$$

alınır. Ya da, şayet katı cisim dönmesi kabulüyle veya daha gelişmiş girdap çekirdeği modelleriyle (bkz: Ref 10.3 de Bölüm 2.5.1) u , v ve w 'nin değerleri hesaplanmaya çalışılabilir.