Ek 10-1

$$\boxed{\Phi = \frac{\sigma}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} \ln\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}\, dx_0}$$

INTEGRALİ ve TÜREVLERİ

Bu integral $\boxed{x - x_0 = \bar{x}\,; \quad -dx_0 = d\bar{x}}$ değişken dönüşümü uygulanarak

$$\Phi = -\frac{\sigma}{2\pi}\int_{x-x_1}^{x-x_2} \frac{1}{2}\ln\left(\bar{x}^2 + y^2\right)d\bar{x} = \frac{\sigma}{4\pi}\int_{x-x_2}^{x-x_1} \ln\left(\bar{x}^2 + y^2\right)d\bar{x}$$

şekline getirilebilir. Bu integralin değeri ise integral tablolarından aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi}\left[\bar{x}\ln\left(\bar{x}^2 + y^2\right) - 2\bar{x} + 2y\tan^{-1}\left(\frac{\bar{x}}{y}\right)\right]_{x-x_2}^{x-x_1}$$

Tekrar $\boxed{\bar{x} = x - x_0}$ konularak

$$\Phi = \frac{\sigma}{4\pi}\left\{(x-x_0)\ln\left[(x-x_0) + y^2\right] - 2(x-x_0) + 2y\tan^{-1}\left(\frac{x-x_0}{y}\right)\right\}_{x-x_2}^{x-x_1}$$

ve sınır değerleri kullanılarak

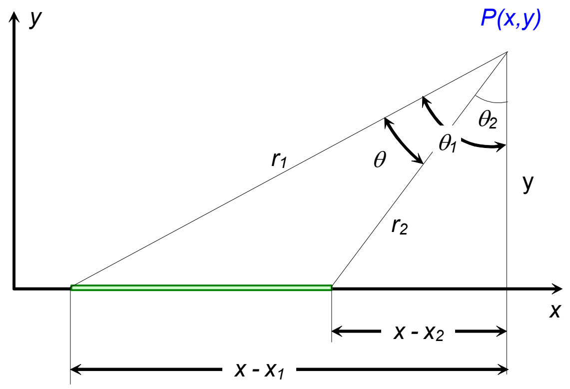
$$\boxed{\begin{aligned}\Phi = \frac{\sigma}{4\pi}\Big\{&(x-x_1)\ln\left[(x-x_1) + y^2\right] - (x-x_2)\ln\left[(x-x_2) + y^2\right] \\ &- 2(x_2 - x_1) + 2y\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-x_1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-x_2}{y}\right)\right]\Big\}\end{aligned}}$$

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde belirtilen bazı büyüklükler kullanılarak daha kısa bir şekilde ifade edilebilir. Bu şekle göre

$$\boxed{r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} \qquad \boxed{r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}}$$

$$\boxed{\theta_1 = \tan^{-1}\frac{y}{x-x_1}} \qquad \boxed{\theta_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x-x_2}}$$

J. Katz, A. Plotkin, Low Speed Aerodynamics



Ayrıca (θ_1-θ_2) açı farkı şekle göre *P* noktasıyla panel uç noktalarının oluşturduğu üçgenin *P* köşesindeki iç açıya eşit olup bu açı da daha kısa bir biçimde ifade edilebilir.

$$\tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\dfrac{x-x_1}{y} - \dfrac{x-x_2}{y}}{1 + \dfrac{x-x_1}{y}\dfrac{x-x_2}{y}} = \frac{(x_2 - x_1)y}{(x-x_1)(x-x_2) + y^2} =$$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left[\frac{(x_2 - x_1)y}{(x-x_1)(x-x_2) + y^2}\right]}$$

Böylece integral ifadesi sonuçta

$$\boxed{\Phi(x,y) = \frac{\sigma}{4\pi}\left[(x-x_1)\ln r_1^2 - (x-x_2)\ln r_2^2 - 2(x_2 - x_1) + 2y\theta\right]}$$

şekline gelir.

Bu ifadenin türevlerinin de

$$\boxed{u(x,y) = \frac{\sigma}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sigma}{4\pi}\ln\frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

$$\boxed{v(x,y) = \frac{\sigma}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1)}$$

şeklinde olacağını göstermek mümkündür.