

BÖLÜM 5

İNCE PROFİLLER İÇİN SAYISAL UYGULAMALAR

5.1 Giriş

5.2 İnce profil teorisi

5.2.1 Analitik çözümler

5.2.2 Kamburluk eğrisine polinom şeklinde eğri uydurulması

5.2.3 Fourier integrallerinin sayısal hesabı

5.3 Kümelenmiş-girdaplar yöntemi

5.3.1 Kümelenmiş-girdap elemanı

5.3.2 Kümelenmiş tekillikler yönteminin herhangi bir kamburluk eğrisine uygulanması

BÖLÜM 5

İNCE PROFİLLER İÇİN SAYISAL UYGULAMALAR

5.1 Giriş

Taşıma kuvvetinin bir kanat profilinin daha ziyade hücum açısı ve kamburluğu ile ilgili olduğu bilinir. Bu fikirden hareketle geliştirilen ince profil yaklaşımında kanat profilinin kalınlığı ihmal edilerek sadece kamburluk eğrisi dikkate alınır.

Klasik ince profil teorisinde kamburluk eğrisi yerine bir girdap yüzeyi alınarak kanat profilinin taşıma ve yunuslama karakteristikleriyle yük dağılımı ve diğer aerodinamik performans özellikleri incelenir.

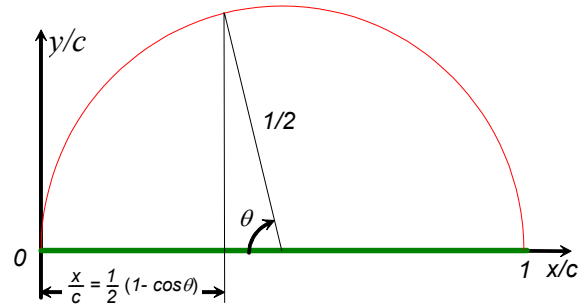
Kamburluk eğrisinin performansını bir girdap yüzeyi yerine kamburluk eğrisi boyunca uygun seçilmiş noktalarda kümelenmiş girdaplar olarak da incelemek mümkündür.

Bu bölümde ince profil teorisinin ayrıntılarına girilmeksizin uygulamalar için gerekli formüller özetlenecek sayısal bir uygulamasının nasıl yapılabileceği izah edilecektir. Ayrıca kümelenmiş girdaplar yöntemi izah edilerek nümerik uygulamasının nasıl yapılabileceği gösterilecektir.

5.2 İnce profil teorisi

Kamburluk eğrisi $y=y(x)$ şeklinde verilen bir ince profil üzerindeki girdap dağılımı

$$\bar{x} = \frac{x}{c} = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta) \quad (5.1)$$



olmak üzere bir Fourier serisi ile

Şekil 5.1: İnce profil teorisi için açısal koordinat sistemi

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right] \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlandığı takdirde Fourier katsayılarının

$$A_0 = \alpha - \frac{l}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} d\theta$$

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \cos(k\theta) d\theta \quad (5.3)$$

Profilin aerodinamik performans büyüklüklerinin de yine Fourier katsayıları cinsinden aşağıdaki formüllerle hesaplanacağı bilinmektedir.

Taşıma katsayısı

$$C_L = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (5.4a)$$

x noktası etrafında yunuslama katsayısı

$$C_{M_x} = C_L \left(-\frac{l}{4} + \bar{x} \right) - \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \quad (5.4b)$$

$$\text{Basınç merkezinin konumu} \quad \frac{x_{cp}}{c} = \frac{l}{4} + \frac{\pi(A_1 - A_2)}{4C_L} \quad (5.4c)$$

$$\text{Aerodinamik merkezin konumu} \quad \frac{x_{ac}}{c} = \frac{l}{4} \quad (5.4d)$$

$$\text{Aerodinamik merkez etrafında yunuslama} \quad C_{Mac} = -\frac{\pi}{4}(A_1 - A_2) \quad (5.4e)$$

Kolaylıkla farkedebileceği gibi, bu hesapların yapılabilmesi için önce, içerisinde profil kamburluk eğrisinin eğiminin yer aldığı (5.3) integrallerinden Fourier katsayılarının hesaplanması gerekmektedir.

Herhangi bir kanat profilinin kamburluk eğrisi analitik olarak bilindiğinde bu integraller analitik yolla hesaplanmaya çalışılabilir.

Kamburluk eğrisinin çeşitli noktadaki koordinatları bilindiğinde bu noktalara örneğin en küçük kareler yöntemiyle polinom şeklinde bir eğri uydurularak yine analitik yolla integral alınabilir. Veya integraller noktalar arasında kalan bölgelerde parça parça nümerik olarak hesaplanabilir.

5.2.1 Analitik çözümler

İnce profilin kamburluk eğrisi N inci dereceden bir polinomla

$$\bar{y} = c_0 + c_1\bar{x} + c_2\bar{x}^2 + \dots + c_N\bar{x}^N \quad (5.5)$$

şeklinde verildiği takdirde girdap dağılımı için verilen (5.2) Fourier serisinde sadece N adet terim alınarak (5.3) integrallerinin analitik olarak çözülmesi mümkündür.

Uygulamada genel olarak beşinci dereceye kadar polinomların kamburluk eğrilerini temsil için yeterli olduğu söylenebilir. *Beşinci dereceye* kadar yaklaşımlar için kamburluk eğrisini temsil eden polinomun türevi

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = c_1 + 2c_2\bar{x} + 3c_3\bar{x}^2 + 4c_4\bar{x}^3 + 5c_5\bar{x}^4 \quad (5.6)$$

olup x in dördüncü dereceye kadar üsleri için açılmal koordinatla

$$c_1\bar{x}^0 = c_1 \quad (5.7a)$$

$$2c_2\bar{x} = \frac{2c_2}{2}(1 - \cos \theta) \quad (5.7b)$$

$$3c_3\bar{x}^2 = \frac{3c_3}{8}(3 - 4 \cos \theta + \cos 2\theta) \quad (5.7c)$$

$$4c_4\bar{x}^3 = \frac{4c_4}{32}(10 - 15 \cos \theta + 6 \cos 2\theta - \cos 3\theta) \quad (5.7d)$$

$$5c_5\bar{x}^4 = \frac{5c_5}{128}(35 - 56 \cos \theta + 28 \cos 2\theta - 8 \cos 3\theta + \cos 4\theta) \quad (5.7e)$$

yazılarak türev ifadesi kosinüs fonksiyonlarına göre düzenlenirse

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = b_0 + b_1 \cos \theta + b_2 \cos 2\theta + b_3 \cos 3\theta + b_4 \cos 4\theta \quad (5.8)$$

bulunur. Burada

$$b_0 = c_1 + c_2 + \frac{9}{8}c_3 + \frac{5}{4}c_4 + \frac{175}{128}c_5 \quad (5.9a)$$

$$b_1 = -\left(c_2 + \frac{3}{2}c_3 + \frac{15}{8}c_4 + \frac{35}{16}c_5\right) \quad (5.9b)$$

$$b_2 = \frac{3}{8}c_3 + \frac{3}{4}c_4 + \frac{35}{32}c_5 \quad (5.9c)$$

$$b_3 = \frac{1}{8}c_4 - \frac{5}{16}c_5 \quad (5.9d)$$

$$b_4 = \frac{5}{128}c_5 \quad (5.9e)$$

dır. Böylece Fourier katsayıları için

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} d\theta \quad \rightarrow \quad A_0 = \alpha - b_0 \quad (5.10a)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \cos n\theta d\theta \quad \rightarrow \quad A_n = b_n, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (5.10b)$$

elde edilir. Aerodinamik büyüklükler için de

$$\text{Taşıma katsayısı} \quad C_L = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad \rightarrow \quad C_L = 2\pi \left(\alpha + b_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (5.11a)$$

$$\text{Sıfır taşıma hücum açısı} \quad \alpha_0 = -\left(b_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad (5.11b)$$

$$\text{Aerodinamik merkez etrafındaki yunuslama katsayısı} \quad C_{M_{ac}} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \quad (5.11c)$$

$$\text{x/c noktası etrafındaki yunuslama katsayısı} \quad C_{M_x} = C_{M_{ac}} - C_L \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{4} \right) \quad (5.11d)$$

elde edilir.

Örnek: Düz levha

Düz levha kamburluğu olmayan profilleri yani simetrik ince profilleri temsil etmekte olup

$$d\bar{y} / d\bar{x} = 0 \quad \text{olduğundan} \quad A_0 = \alpha, \quad A_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ve böylece

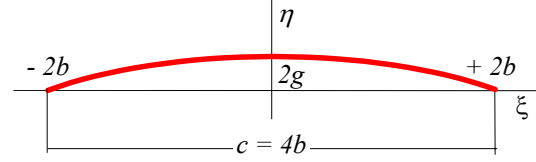
$$C_L = 2\pi\alpha, \quad \alpha_0 = 0, \quad C_{M_{ac}} = 0, \quad C_{M_x} = -2\pi\alpha(\bar{x} - 0.25)$$

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

elde edilir.

Örnek: Yay profili

Bir dairenin konform dönüşümü yoluyla daire yayı şeklinde bir profil elde edilebileceği bilinir. Dairesel yay şeklindeki kamburluk eğrisinin tam (exact) denklemi veter orta noktasına bağlı bir koordinat sisteminde



Şekil 5.2 Yay profili

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\left(\frac{b^2 - g^2}{g}\right)\eta - 4b^2 = 0$$

olarak elde edilir. Veter boyu ile bir boyutsuzlaştırma yapılarak

$$\left(\frac{\xi}{4b}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{4b}\right)^2 + \frac{2}{4b}\left(\frac{b^2 - g^2}{g}\right)\frac{\eta}{4b} - \frac{4b^2}{(4b)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \frac{1}{2b}\left(\frac{b^2 - g^2}{g}\right)\bar{\eta} - \frac{1}{4} = 0$$

veya $g/b = G$ olmak üzere

$$\bar{\eta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - G^2}{G}\right)\bar{\eta} - \frac{1}{4} + \bar{\xi}^2 = 0$$

elde edilir. Bu ifade η için çözülerek

$$\bar{\eta} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1 - G^2}{G}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4^2}\left(\frac{1 - G^2}{G}\right)^2 + \frac{1}{4} - \bar{\xi}^2} = \frac{-1 + G^2 + \sqrt{1 + 2G^2 - 16G^2\bar{\xi}^2 + G^4}}{4G}$$

elde edilir. Yay profilinin ordinatları pozitif işaretli olduğundan karekök ifadesinin önündeki işaretlerden pozitif olanı seçilmiştir. Buradaki G büyüklüğü profilin γ_c kamburluk oranına

$$G = 2\gamma_c$$

şeklinde bağlı olan bir parametre olup kamburluk genellikle çok küçük ($\gamma_c \ll 1$) olduğundan G de küçüktür ($G \ll 1$). Ayrıca

$$-\frac{1}{2} \leq \bar{\xi} \leq \frac{1}{2}$$

olup karekök ifadesi bir Binom serisine açılabilir. Serinin sadece kareli terimlere kadar olanı alınarak

$$\sqrt{1 + 2G^2 - 16G^2\bar{\xi}^2 + G^4} = \left[1 + (2G^2 - 16G^2\bar{\xi}^2 + G^4)\right]^{1/2} \approx 1 + G^2 - 8G^2\bar{\xi}^2$$

ve böylece

$$\bar{\eta} = \frac{-I + G^2 + I + G^2 - 8G^2\bar{\xi}^2}{4G} = G \frac{I - 4\bar{\xi}^2}{2}$$

Veya kamburluk oranı cinsinden $\bar{\eta} = \gamma_c (I - 4\bar{\xi}^2)$

elde edilir. Bu ifade $\bar{\eta} = \bar{y}$, $\bar{\xi} = \bar{x} - \frac{I}{2}$

yazılarak hücum kenarına bağlı bir eksen takımına aktarılırsa

$$\bar{y} = 4\gamma_c (\bar{x} - \bar{x}^2)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi sonuç olarak elde edilen kamburluk eğrisi

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 4\gamma_c, \quad c_2 = -4\gamma_c$$

olmak üzere parabolik bir eğridir. Bu katsayılar (5.9) bağıntılarında kullanılırsa

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 4\gamma_c, \quad b_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Bunlar (5.10) bağıntılarında kullanılarak

$$A_0 = \alpha, \quad A_1 = 4\gamma_c, \quad A_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

ve bunlar da (5.11) bağıntılarında kullanılarak

$$C_L = 2\pi(\alpha + 2\gamma_c), \quad \alpha_0 = -2\gamma_c, \quad C_{M_{ac}} = -\pi\gamma_c$$

bulunur. Elde edilen sonuçların konform dönüşümle elde edilen yaklaşık sonuçlarla aynı olduğu görülebilir.

5.2.2 Kamburluk eğrisi noktalarına polinom şeklinde eğri uydurulması

Yukarıdaki uygulamalar ve NACA'nın bazı profilleri için verilen özel kamburluk eğrileri dışında kamburluk eğrisinin analitik bir ifadesi genellikle verilmez. Ancak kamburluk eğrisinin bilinen noktaları için en küçük kareler yöntemini uygulayarak polinom şeklinde bir eğri bulmak mümkündür.

Kamburluk eğrisi üzerinde M adet nokta

$$\bar{x}_k, \bar{y}_k, \quad (k = 1, 2, \dots, M); \quad \bar{x} = \frac{x}{c}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c} \quad (5.12)$$

şeklinde verilmiş olsun. N 'inci dereceden bir polinom için verilen (5.5) bağıntısı kısaca

$$\bar{y} = \sum_{j=0}^N c_j \bar{x}^j \quad (5.13)$$

şeklinde yazılarak, kamburluk eğrisi üzerindeki noktaların ordinatları ile bu polinom üzerinde aynı absislerde yer alan noktaların ordinatları arasındaki farkların kareleri toplamı için

$$T = \sum_{k=1}^M \left(\bar{y}_k - \sum_{j=0}^N c_j \bar{x}_k^j \right)^2 \quad (5.14)$$

yazılabilir. Bu toplamın minimum olması için koşullar

$$\frac{\partial T}{\partial c_i} = 2 \sum_{k=1}^M \left(\bar{y}_k - \sum_{j=0}^N c_j \bar{x}_k^j \right) \bar{x}_k^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.15)$$

şeklinde olup gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^N c_j \bar{x}_k^j \bar{x}_k^i = \sum_{k=1}^M \bar{y}_k \bar{x}_k^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{j=0}^N \left(\sum_{k=1}^M \bar{x}_k^j \bar{x}_k^i \right) c_j = \sum_{k=1}^M \bar{y}_k \bar{x}_k^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{j=0}^N D_{ij} c_j = F_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.16a)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^M \bar{x}_k^j \bar{x}_k^i, \quad F_i = \sum_{k=1}^M \bar{y}_k \bar{x}_k^i \quad (5.16b)$$

NOT:

İnce profil teorisi çerçevesinde kamburluk eğrisine uydurulan polinomun hücum ve firar kenarından geçmesi şartları uygulanmak istenirse

$$\bar{x} = 0 \quad \text{da} \quad \bar{y} = 0 \quad \rightarrow \quad c_0 = 0$$

$$\bar{x} = 1 \quad \text{de} \quad \bar{y} = 0 \quad \rightarrow \quad c_N = -(c_1 + c_2 + \dots + c_{N-1})$$

olur. Bu durumda denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{N-1} D_{ij} c_j + D_{iN} c_N = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

veya

$$\sum_{j=1}^{N-1} (D_{ij} - D_{iN}) c_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

şekline gelir. Bu durumda c_0 ve c_N parametrelerine göre alınan türevlerden kaynaklanan birinci ve sonuncu denklemlere ihtiyaç kalmaz.

Tablo 5.1 de NACA 63₃-218 profili için Excel tablosunda yapılan bir uygulamanın sonuçları görülmektedir.

Tablo 5.1: NACA 63₃-218 profili için uygulamalar

	x - üst	y - üst	x - alt	y - alt	x - C	y - C	y-PolyN
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.00382	0.01449	0.00618	-0.01349	0.00500	0.00050	0.00020
3	0.00617	0.01778	0.00883	-0.01638	0.00750	0.00070	0.00031
4	0.01096	0.02319	0.01404	-0.02105	0.01250	0.00107	0.00051
5	0.02319	0.03285	0.02681	-0.02913	0.02500	0.00186	0.00101
6	0.04796	0.04673	0.05204	-0.04041	0.05000	0.00316	0.00197
7	0.07288	0.05728	0.07712	-0.04880	0.07500	0.00424	0.00290
8	0.09788	0.06581	0.10212	-0.05547	0.10000	0.00517	0.00379
9	0.14801	0.07895	0.15199	-0.06549	0.15000	0.00673	0.00544
10	0.19822	0.08842	0.20178	-0.07250	0.20000	0.00796	0.00692
11	0.24850	0.09494	0.25150	-0.07704	0.25000	0.00895	0.00821
12	0.29880	0.09884	0.30120	-0.07940	0.30000	0.00972	0.00932
13	0.34911	0.10030	0.35089	-0.07970	0.35000	0.01030	0.01022
14	0.39943	0.09916	0.40057	-0.07774	0.40000	0.01071	0.01092
15	0.44973	0.09577	0.45027	-0.07387	0.45000	0.01095	0.01139
16	0.50000	0.09045	0.50000	-0.06839	0.50000	0.01103	0.01165
17	0.55023	0.08351	0.54977	-0.06161	0.55000	0.01095	0.01167
18	0.60042	0.07526	0.59958	-0.05384	0.60000	0.01071	0.01145
19	0.65055	0.06597	0.64945	-0.04537	0.65000	0.01030	0.01098
20	0.70062	0.05594	0.69938	-0.03650	0.70000	0.00972	0.01025
21	0.75064	0.04544	0.74936	-0.02754	0.75000	0.00895	0.00926
22	0.80059	0.03486	0.79941	-0.01894	0.80000	0.00796	0.00799
23	0.85049	0.02459	0.84951	-0.01113	0.85000	0.00673	0.00644
24	0.90034	0.01501	0.89966	-0.00467	0.90000	0.00517	0.00459
25	0.95016	0.00664	0.94984	-0.00032	0.95000	0.00316	0.00245
26	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000

N = 3 Polinomun derecesi (en fazla 5 alınız)

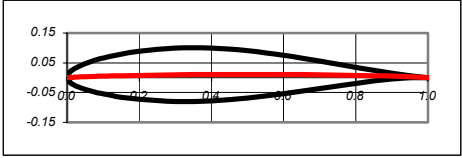
Index = 2

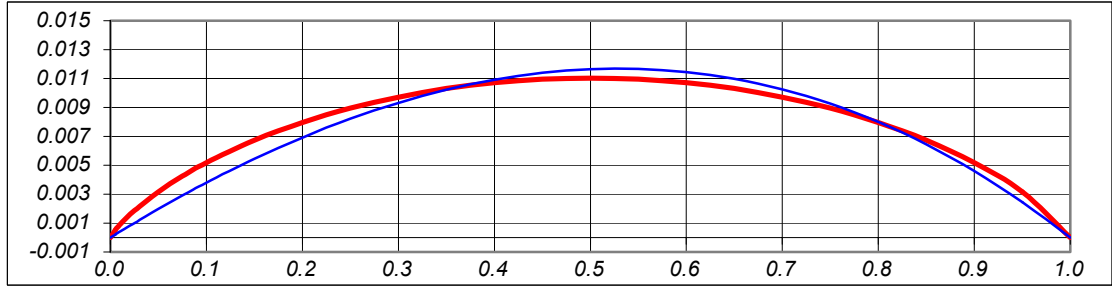
Not
 Uç şartlarının uygulanması için Index = 1 alınız
 Uç şartlarının uygulanmaması için Index = 0 alınız

a(0) = 0.000000
a(1) = 0.041020
a(2) = -0.029871
a(3) = -0.011149
a(4) = -0.0702506

A₀ - α = -0.001394
A₁ = 0.046594
A₂ = -0.004181

α₀ (°) = -1.255
C_{mAC} = -0.0399





5.2.3 Fourier integrallerinin sayısal hesabı

Kanat profilinin kamburluk eğrisi üzerinde verilen noktaların ince profil teorisi çerçevesindeki açıl konumları

$$\theta_i = \cos^{-1}(1 - 2\bar{x}_{w_i}) \quad (5.17)$$

şeklinde hesaplanır.

Fourier katsayıları için

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_w}{dx} d\theta \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_w}{dx} \cos(n\theta) d\theta$$

şeklinde verilen integral bağıntıları

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_w}{dx} \cos(n\theta) d\theta \quad (5.18)$$

olmak üzere

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} I_0 \quad A_n = \frac{2}{\pi} I_n \quad (5.19)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki integraller veter boyunca alınan çeşitli noktalar arasında parça parça hesaplanabilir.

$$I_n = \int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \cos(n\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{M-1} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \cos(n\theta) d\theta \quad (5.20)$$

Lineer integrasyonla

$$I_n = \sum_{k=1}^{M-1} \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)_k [\cos(n\theta)]_k (\Delta\theta)_k \quad (5.21)$$

Burada

$$\left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right)_k = \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$[\cos(n\theta)]_k = \frac{\cos(n\theta_k) + \cos(n\theta_{k+1})}{2} \quad (5.22)$$

$$(\Delta\theta)_k = \theta_{k+1} - \theta_k$$

Fourier katsayıları bu şekilde elde edildikten sonra aerodinamik büyüklükler yine polinomik yaklaşımda kullanılan bağıntılarla hesaplanacaktır.

5.3 Kümelenmiş-girdaplar yöntemi:

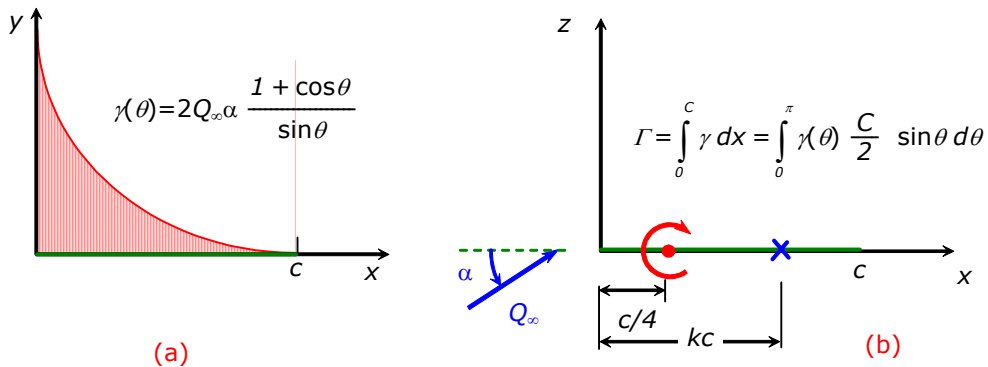
İnce profiller için sayısal bir çözüm tekniği de kümelenmiş girdaplar tekniğidir. Bu teknikte kamburluk yüzeyi küçük doğrusal elemanlara (panel) bölünür. Her bir panelin etkisi bir kümelenmiş girdapla temsil edilir. Yine her bir panel üzerinde seçilen bir kontrol noktasında yüzey sınır şartı uygulanarak bir denklem elde edilir. Böylece panel sayısına denklemden oluşan bir lineer denklem takımı oluşturularak bu denklem takımının çözümüyle girdap şiddetleri elde edilir. Profilin performans büyüklükleri veter boyunca integrallerle elde edilir.

5.3.1 Kümelenmiş-girdap elemanı:

İnce profil teorisinden düz levha için elde edilen sonuçlara dayanarak basit bir taşıyıcı eleman geliştirmek mümkündür. İnce profilin girdap dağılımı için verilen (5.2) bağıntısının, düz levha için A_0 hariç bütün Fourier katsayıları sıfır olacağından

$$\gamma(\theta) = 2Q_\infty \alpha \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad (5.23)$$

şeklini alacağı bilinir. Bu dağılım Şekil 5.3a da biçimsel olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.3: Taşıyıcı düz levha boyunca girdap dağılımı ve kümelenmiş girdap

Bu girdap dağılımı, sadece uzak noktalardaki etkisi dikkate alınır, şiddeti girdap dağılımının

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx \quad (5.23)$$

toplam şiddetine eşit olan bir tek girdap ile temsil edilebilir. Levhaya etkiyen taşıma kuvveti girdap şiddetine

$$L = \rho Q_\infty \Gamma \quad (5.23)$$

şeklinde bağlı olup, taşıma kuvveti düz levha için çeyrek-veter noktasında yer alan basınç merkezinde etkidiği için konsantre edilmiş girdabın da bu noktada yer alması gerekir.

Şayet taşıyıcı düz levha bir tek yoğunlaştırılmış girdap ile değiştirilecekse bu girdabın bilinmeyen Γ şiddetinin bulunması için gerekli denklemi verecek olan yüzey sınır koşulunun da bir tek noktada uygulanması yeterli olacaktır. Bu noktanın çözüm için en uygun nokta olması gereklidir.

Sınır koşulunun uygulanacağı noktanın hücum kenarından uzaklığını (Şekil 5.3b) levha boyu c olmak üzere kc ile belirtelim. Bu durumda yüzey üzerindeki sıfır normal hız sınır koşulu

$$\frac{-\Gamma}{2\pi(kc - \frac{1}{4}c)} + Q_\infty \alpha = 0 \quad (5.24)$$

şeklinde bir denklem verecektir. Öte yandan ince profil teorisinden düz levha etrafındaki sirkülasyon için Kutta şartı uygulanarak

$$\Gamma = \pi c V_\infty \alpha \quad (5.25)$$

bulunmuş olup, kümelenendirilmiş girdap modeli ile ince profil sonuçları benzeştirilmek istenirse, bu büyüklük önceki denklemde kullanılarak

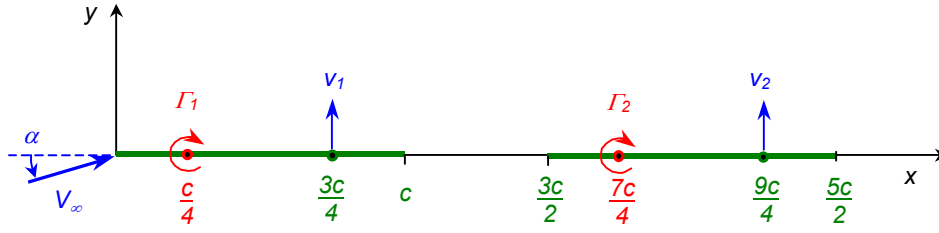
$$V_\infty \alpha + \frac{-\pi c V_\infty \alpha}{2\pi(kc - \frac{1}{4}c)} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{k = \frac{3}{4}} \quad (5.26)$$

elde edilir. Buna göre düz levha problemi için ayrık girdap yöntemi uygulanırken yüzey sınır koşulunun üç-çeyrek noktasında uygulanmasının uygun olacağı görülmektedir.

Bu incelemede dikkat edilirse yüzey üzerindeki sınır koşulunun uygulanacağı uygun noktanın bulunması sırasındaki işlemlerde kullanılan sirkülasyon büyüklüğü ince profil teorisinden bulunmuş olup sirkülasyonun değeri de Kutta şartı uygulanarak elde edilmiştir. Yani açıkça ifade edilmemiş olmasa da yukarıda bulunan sonuç Kutta şartının sağlandığı koşullarda elde edilmiştir. Bu husus önemli olup, ayrık girdap yönteminin bazı uygulamalarda başarılı sonuçlar vermesinin nedenidir.

Örnek: Ardarda (tandem) profiller

Basit ayrık girdap modelinin faydalı bir uygulaması ardarda yer alan düz levhaların oluşturduğu bir kanat profili sisteminin taşımalarının incelenmesidir. Şekil 5.4 de gösterilen iki profil etrafındaki sirkülasyonlar sırasıyla Γ_1 ve Γ_2 olsun.



Şekil 5.4 Tandem profiller için ayrıık girdap yöntemi

Profiller etrafındaki sirkülasyonlar problemin bilinmeyenleri olup bunların bulunması için profillerin kontrol noktalarında uygulanması gereken sınır koşulları yine yüzeye dik hız bileşenlerinin sıfır olmasıdır:

$$v_1 = v_2 = 0$$

Kontrol noktalarındaki dikey hız bileşenleri, üniform akımın yüzeye dik bileşeni ile girdapların indüklemelerinin toplamı şeklindedir:

$$v_1 = V_\infty \alpha - \frac{\Gamma_1}{2\pi \left(\frac{3}{4}c - \frac{c}{4} \right)} + \frac{\Gamma_2}{2\pi \left(\frac{7c}{4} - \frac{3c}{4} \right)} = 0 \quad (5.27a)$$

$$v_2 = V_\infty \alpha - \frac{\Gamma_1}{2\pi \left(\frac{9c}{4} - \frac{c}{4} \right)} - \frac{\Gamma_2}{2\pi \left(\frac{9c}{4} - \frac{7c}{4} \right)} = 0 \quad (5.27b)$$

Bu denklemler çözümlenerek

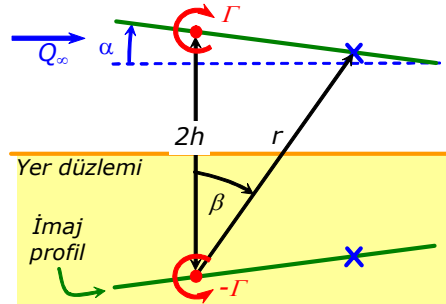
$$\Gamma_1 = \frac{4}{3} \pi c V_\infty \alpha \quad \Gamma_2 = \frac{2}{3} \pi c V_\infty \alpha \quad (5.28)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi öndeki profil arkadaki profilin yarattığı yukarı sapma nedeniyle daha yüksek taşımaya sahip iken öndeki profilin yarattığı aşağı sapma nedeniyle arkadaki profilin taşınması daha küçük olmaktadır. Bu etki profiller birbirine yaklaştırdıkça daha artmakta, uzaklaştıkça ise azalmaktadır.

Bu sonucun önemi tandem profillerin etkileşimi hakkında ilk bilginin çok az bir çaba ile elde edilebilmesidir.

Örnek: Yer etkisi

Ayrıık girdap yönteminin basit bir diğer örnek uygulaması da yere yakın bir kanat profili üzerindeki yer etkisinin incelenmesidir. Bu kanat profilinin etrafındaki akımda yer yüzeyi bir akım çizgisi olacağından, böyle doğrusal bir akım çizgisinin oluşturulabilmesi için profilin yere göre simetrik konumlu bir imajı alınır. İnce profil yaklaşımıyla kanat profili yerine bir düz levhanın alınması halinde de Şekil 5.5 de gösterildiği gibi düz levhanın yere göre imajı alınacaktır.



Şekil 5.5: Yer etkisi için kümelenmiş-girdap modeli

Yine profiller yerine çeyrek veter noktalarında bulunan birer ayrıık girdap alınırsa, kanat profili yerine alınan girdabın profilin kontrol noktasında indüklediği dikey hız

$$-\frac{\Gamma}{2\pi(c/2)} \quad (5.29)$$

iken, imaj profil üzerinde, diğer girdaptan $2h$ uzaklıkta yer alan ve aynı şiddette fakat zıt yönde olan girdabın aynı kontrol noktasında indüklediği normal hız bileşeni

$$\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin(\beta - \alpha) \quad (5.30)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki r büyüklüğü imaj girdabın kontrol noktasına uzaklığıdır. Elde edilen normal hızlar serbest akımın kontrol noktasında normal doğrultudaki bileşeni ile toplanıp sıfır normal hız sınır koşulu uygulanarak

$$\frac{-\Gamma}{2\pi(c/2)} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin(\beta - \alpha) + Q_\infty \alpha = 0 \quad (5.31)$$

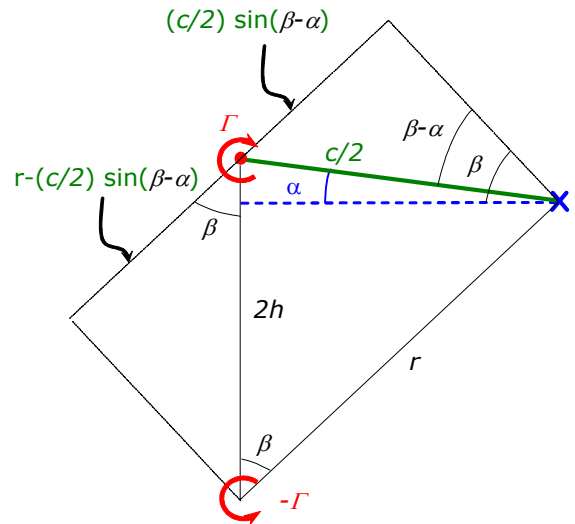
elde edilir. Bu bağıntıdan sirkülasyonun değeri çekilerek

$$\Gamma_h = \frac{\Gamma_{h=\infty}}{1 - \frac{c}{2r} \sin(\beta - \alpha)}, \quad \Gamma_{h=\infty} = Q_\infty \alpha \pi c \quad (5.32)$$

bulunur. Burada Γ_h büyüklüğü profilin yerden h yükseklikte olması halinde, $\Gamma_{h=\infty}$ ise profilin yerden sonsuz uzaklıkta olması (izole profil) halindeki sirkülasyonu belirtmektedir. İzole profil için (düz levha halinde) sirkülasyonun değerinin daha önce hesaplandığı hatırlanmalıdır.

Bu son bağıntının yaklaşık bir ifadesini bulmak için yandaki şekle göre

$$\begin{aligned} 1 - \frac{c}{2r} \sin(\beta - \alpha) &= \frac{r - \frac{c}{2} \sin(\beta - \alpha)}{r} \\ &= \frac{2h \cos \beta}{r} \\ &= \frac{2h [2h - (c/2) \sin \alpha]}{r^2} \\ &= \frac{2h [2h - (c/2) \sin \alpha]}{[2h - (c/2) \sin \alpha]^2 + [(c/2) \cos \alpha]^2} \\ &= \frac{4h^2 - hc \sin \alpha}{4h^2 - 2hc \sin \alpha + (c^2/4)} \end{aligned}$$



Şekil 5.6

yanılarak hücum açısının yeterince küçük olduğu varsayılırsa

$$1 - \frac{c}{2r} \sin(\beta - \alpha) \approx \frac{4h^2}{4h^2 + (c^2/4)}$$

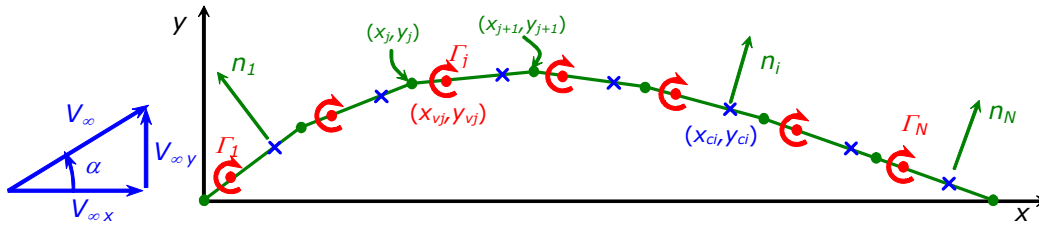
ve sonuç olarak da

$$\Gamma_h \approx \frac{4h^2 + (c^2/4)}{4h^2} \Gamma_{h=\infty} = \left[1 + \frac{c^2}{16h^2} \right] \Gamma_{h=\infty} \quad (5.33)$$

elde edilir. Bu bağıntı açıkça göstermektedir ki profil yere yaklaştırıldıkça taşıma kuvveti yer etkisiyle artmaktadır.

5.3.2 Kümelenmiş tekillikler yönteminin herhangi bir kamburluk eğrisine uygulanması

Ayrık girdap yönteminde kamburluk eğrisi şekilde gösterildiği gibi N adet doğrusal panele ayrılarak, her bir panelin üzerinde girdap dağılımına eşdeğer kümelenmiş bir girdabın çeyrek-uzunluk noktasında yer aldığı kabul edilmektedir. Ayrıca her bir panelin üç-çeyrek uzunluk noktası da kontrol noktası olarak seçilerek bu noktalarda sıfır normal hız sınır koşulu uygulanmaktadır.



Şekil 5.7 : Kamburluk eğrisi üzerinde paneller, girdaplar ve kontrol noktaları

Herhangi bir panelin kontrol noktasındaki hız vektörü \mathbf{V} ve panelin normal vektörü de \mathbf{n} olmak üzere sınır koşulu

$$\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (5.34)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki hız vektörü serbest akımın katkısıyla (\mathbf{V}_∞) paneller üzerindeki girdapların indüklemeleri (\mathbf{v}_{ij}) toplamına eşittir:

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^N \vec{v}_{ij} \quad (5.35)$$

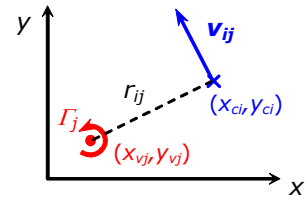
Serbest akım koşulları genellikle problemin bilineni olup, bu durumda göre sınır koşulunun

$$\sum_{j=1}^N \vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_i = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i \quad (5.36)$$

şeklinde düzenlenmesi uygun olur.

Herhangi bir j 'inci panelin (x_{vj}, y_{vj}) noktasında yer alan Γ_j şiddetinde ve saat ibrelerine zıt yöndeki bir girdabın i 'inci panelin (x_{ci}, y_{ci}) kontrol noktasındaki indüklemesi için

$$\vec{v}_{ij} = \frac{\Gamma_j}{2\pi r_{ij}^2} \left[-(y_{ci} - y_{vj}) \vec{i} + (x_{ci} - x_{vj}) \vec{j} \right] \quad (5.37)$$



Şekil 5.8

yazılabilir. Burada

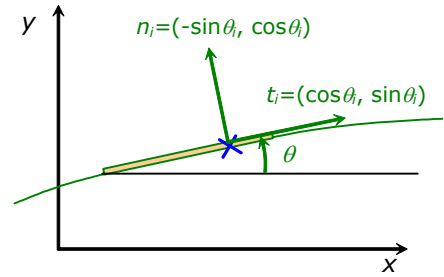
$$r_{ij}^2 = (x_{ci} - x_{vj})^2 + (y_{ci} - y_{vj})^2 \quad (5.38)$$

dir. i 'inci panelin normal doğrultusu panel eğim açısına bağlı olarak

$$\vec{n}_i = -\sin\theta_i \vec{i} + \cos\theta_i \vec{j} \quad (5.39)$$

şeklinde ifade edilerek indüklenmiş hızların normal doğrultudaki bileşenleri için

$$\vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_i = \frac{\Gamma_j}{2\pi r_{ij}^2} \left[(y_{ci} - y_{vj}) \sin\theta_i + (x_{ci} - x_{vj}) \cos\theta_i \right] \quad (5.40)$$



Şekil 5.9

elde edilir. Bu bağıntıda Γ_j girdap şiddeti henüz bilinmemektedir. Ancak diğer bütün büyüklükler sadece profil kamburluk eğrisinin geometrisine bağlıdır. Bu bakımdan bağıntıyı kısaca

$$\vec{v}_{ij} \cdot \vec{n}_i = a_{ij} \cdot \Gamma_j \quad (5.41)$$

şeklinde belirtmek uygun olur. Buradaki

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi r_{ij}^2} \left[(y_{ci} - y_{vj}) \sin\theta_i + (x_{ci} - x_{vj}) \cos\theta_i \right] \quad (5.42)$$

büyüklüğü *etkileşim katsayısı* olarak adlandırılır. Böylece sıfır normal hız sınır koşulu bilinmeyen $(\Gamma_j, j=1,2,\dots,N)$ girdap şiddetleri cinsinden

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot \Gamma_j = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i \quad (5.43)$$

şeklinde lineer bir denkleme dönüşür. Serbest akım hız vektörü de hücum açısı cinsinden

$$\vec{V}_\infty = V_\infty \cos\alpha \vec{i} + V_\infty \sin\alpha \vec{j} \quad (5.44)$$

şeklinde ifade edilerek denklemin sağ tarafındaki terim

$$R_i = -\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_i = V_\infty (\cos\alpha \sin\theta_i - \sin\alpha \cos\theta_i) \quad (5.45)$$

olarak hesaplanabilir.

(5.43) denklemi bütün kontrol noktalarında bir kez yazılarak bilinmeyen ($\Gamma_j, j=1,2,\dots,N$) girdap şiddetleri için

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot \Gamma_j = R_i, \quad (i=1,2,3,\dots,N) \quad (5.46)$$

lineer denklem takımı elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda da

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \cdots \\ \Gamma_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \cdots \\ R_N \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki kare matris genel olarak etkileşim katsayıları matrisi (veya katsayılar matrisi) olarak, soldaki sütun matrisi bilinmeyenler vektörü (veya bilinmeyenler matrisi) olarak ve sağ taraftaki sütun matrisi de sağ taraf vektörü (veya sağ taraf matrisi) olarak adlandırılır.

Taşıyıcı ince profil problemini çözümlenmek üzere geliştirilen bir bilgisayar programı içerisinde bu denklem sistemini katsayılar matrisinin ve sağ taraf vektörünün bileşenlerini elde etmek için genel olarak aşağıdaki benzer bir döngü oluşturulabilir:

```

DO i=1,N
  DO j=1,N
    Δx = xCi - xVj
    Δy = yCi - yVj
    rij2 = (Δx)2 + (Δy)2
    aij =  $\frac{1}{2\pi r_{ij}^2} [\Delta y \cdot \sin \theta_i + \Delta x \cdot \cos \theta_i]$ 
  ENDDO
Ri = V∞ (cos α sin θi - sin α cos θi)
ENDDO

```

Burada görüldüğü gibi dış döngü ile kontrol noktalarının indisi değiştirilirken, iç döngü ile girdap elemanlarının indisi değiştirilmektedir.

(27) denklem sistemi herhangi standart bir yöntemle çözülebilir.

İnce profile etkiyen basınçlar ve yükler her bir j paneli için Kutta-Joukowski teoremi uygulanarak hesaplanabilir. Böylece her bir panele etkiyen taşıma için ve basınç farkı için

$$\Delta L_j = \rho V_\infty \Gamma_j \quad (5.48a)$$

$$\Delta p_j = \rho V_\infty \frac{\Gamma_j}{\Delta c} \quad (5.48b)$$

elde edilir. Burada Δc panel uzunluğudur. Basınç farkını dinamik basınçla boyutsuzlaştırmak mümkündür:

$$\Delta C_{p_j} = \frac{\Delta p_j}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{2\Gamma_j}{V_\infty \Delta c} \quad (5.48c)$$

Birim açıklık başına düz levhaya etkiyen toplam taşıma ve hücum kenarı etrafındaki yunuslama momenti, her bir panel üzerindeki etkiler toplanarak

$$L = \sum_{j=1}^N \Delta L_j = \rho V_\infty \sum_{j=1}^N \Gamma_j \quad (5.49a)$$

$$M_0 = \sum_{j=1}^N \Delta L_j (x_{v_j} \cos \alpha) = \rho V_\infty \cos \alpha \sum_{j=1}^N \Gamma_j x_{v_j} \quad (5.49b)$$

ve boyutsuz katsayılar da

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c} = \frac{2}{V_\infty c} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \quad (5.50a)$$

$$C_{m_0} = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c^2} = \frac{2 \cos \alpha}{V_\infty c^2} \sum_{j=1}^N \Gamma_j x_{v_j} \quad (5.50b)$$

bağıntılarıyla elde edilebilir.

NOT Sıkıştırılmaz potansiyel akımdaki aerodinamik katsayılar serbest akım hızından ve cismin büyüklüğünden bağımsız olup yukarıdaki bütün bağıntıların boyutsuzlaştırılması mümkündür. Buna göre

$$\begin{aligned} ca_{ij} = \bar{a}_{ij} &= c \frac{I}{2\pi r_{ij}^2} \left[(y_{C_i} - y_{V_j}) \sin \theta_i + (x_{C_i} - x_{V_j}) \cos \theta_i \right] \\ &= \frac{I}{2\pi (r_{ij}^2 / c^2)} \left[\left(\frac{y_{C_i}}{c} - \frac{y_{V_j}}{c} \right) \sin \theta_i + \left(\frac{x_{C_i}}{c} - \frac{x_{V_j}}{c} \right) \cos \theta_i \right] \end{aligned}$$

$$\bar{a}_{ij} = \frac{I}{2\pi \bar{r}_{ij}^2} \left[(\bar{y}_{C_i} - \bar{y}_{V_j}) \sin \theta_i + (\bar{x}_{C_i} - \bar{x}_{V_j}) \cos \theta_i \right] \quad (5.51a)$$

$$\bar{r}_{ij}^2 = (\bar{x}_{C_i} - \bar{x}_{V_j})^2 + (\bar{y}_{C_i} - \bar{y}_{V_j})^2 \quad (5.51b)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{c}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c} \quad (5.51c)$$

$$\frac{\Gamma_j}{c V_\infty} = \bar{\Gamma}_j \quad (5.51d)$$

$$\frac{R_i}{V_\infty} = \bar{R}_i = \cos \alpha \sin \theta_i - \sin \alpha \cos \theta_i \quad (5.51e)$$

yazılarak (5.46) denklem sistemi boyutsuz halde

$$\sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} \cdot \bar{\Gamma}_j = \bar{R}_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (5.52)$$

şekline getirilebilir. Bu durumda aerodinamik katsayılar da

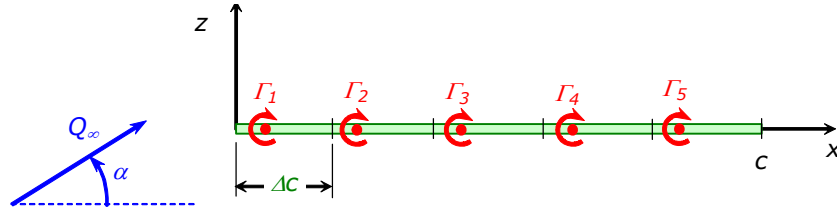
$$\Delta C_{p_j} = \frac{2\bar{\Gamma}_j}{\Delta \bar{c}}, \quad \Delta \bar{c} = \frac{\Delta c}{c} \quad (5.53a)$$

$$C_l = 2 \sum_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j \quad (5.53b)$$

$$C_{m_0} = 2 \cos \alpha \sum_{j=1}^N \bar{\Gamma}_j \bar{x}_{v_j} \quad (5.53c)$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 1: Düz levha problemi



Şekil 5.10

Yöntem bir düz levha için eşit uzunlukta 5 adet panel ($\Delta c = c/5$) kullanılarak uygulanırsa, bütün paneller yatay olduğundan yukarıda verilen bağıntılar

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0, & \sin \theta_i &= 0, & \cos \theta_i &= 1 \\ \Delta \bar{x} &= \bar{x}_{C_i} - \bar{x}_{V_j}, & \Delta \bar{y} &= 0, & \bar{r}_{ij}^2 &= (\Delta \bar{x})^2 \\ \bar{a}_{ij} &= \frac{\Delta \bar{x}}{2\pi \bar{r}_{ij}^2}, & \bar{R}_i &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

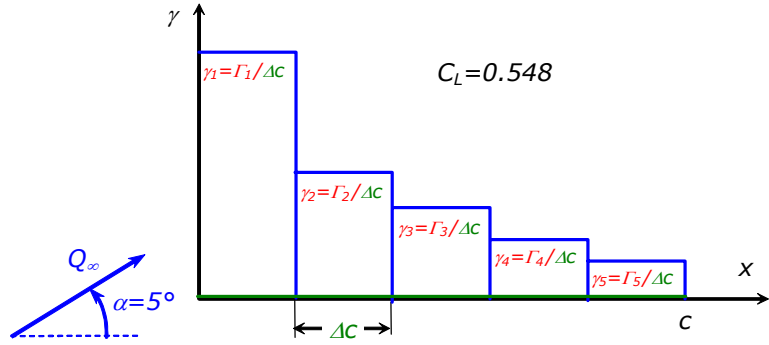
şeklini alır ve denklem sistemi için de

$$\frac{1}{\pi \Delta \bar{c}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 \\ -1/3 & -1 & 1 & 1/3 & 1/5 \\ -1/5 & -1/3 & -1 & 1 & 1/3 \\ -1/7 & -1/5 & -1/3 & -1 & 1 \\ -1/9 & -1/7 & -1/5 & -1/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \bar{\Gamma}_2 \\ \bar{\Gamma}_3 \\ \bar{\Gamma}_4 \\ \bar{\Gamma}_5 \end{pmatrix} = -\sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Denklem sisteminin katsayılar matrisi diyagonal baskın (diyagonal elemanları diğer elemanlara göre mutlak değerce büyük) olup çözüm standart yöntemlerden herhangi biriyle gerçekleştirilerek

$$\begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \bar{\Gamma}_2 \\ \bar{\Gamma}_3 \\ \bar{\Gamma}_4 \\ \bar{\Gamma}_5 \end{pmatrix} = \pi \Delta \bar{c} \sin \alpha \begin{pmatrix} 2.46092 \\ 1.09374 \\ 0.70314 \\ 0.46876 \\ 0.27344 \end{pmatrix}$$

elde edilebilir. Çözüm sonucu şekilde biçimsel olarak gösterilmiştir.



Örnek 2: Parabolik kamburluklu ince profil

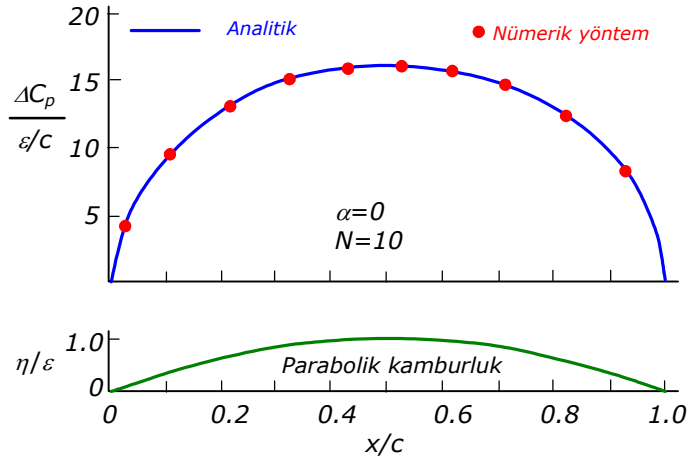
Bölüm 5.2.1 de gösterildiği gibi

$$\eta(x) = 4\varepsilon \frac{x}{c} \left[1 - \frac{x}{c} \right]$$

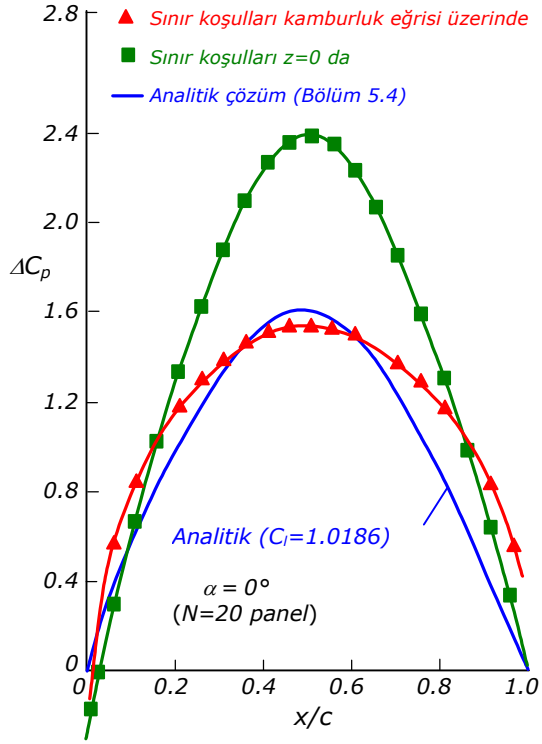
şeklinde parabolik kamburluğa sahip bir ince profili dikkate alalım. Şekil 5.11 de gösterildiği gibi ε kamburluk parametresinin küçük değerleri ($\varepsilon < 0.05$) için nümerik sonuçlar analitik sonuçlara yakındır.

Ancak kamburluk parametresi $\varepsilon < 0.1$ değerine arttırıldığında küçük-bozuntular yaklaşımının sınır koşulları üzerindeki etkisi daha belirgin olmaktadır (Şekil 5.12). Nümerik çözümler için girdapların kamburluk eğrisi üzerinde yer aldığı ve sınır şartının da bu eğri üzerinde sağlandığı, buna karşılık analitik çözümlerde girdapların ve sınır koşullarının x ekseninde yer aldığı belirtilmelidir.

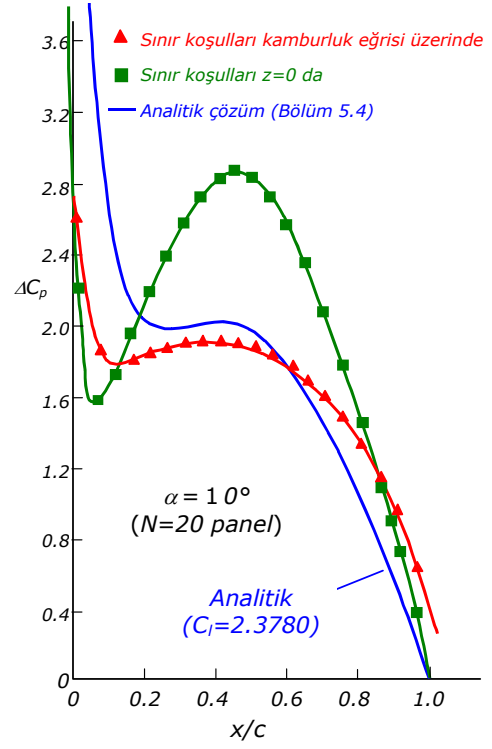
Hücum açısının etkisi nispeten büyük bir hücum açısıyla ($\alpha = 10^\circ$) Şekil 5.13 de gösterilmiştir. Hücum kenarındaki düşük basınçların analitik çözümde abartılı bulunduğu dikkati çekmektedir.



Şekil 5.11: Parabolik kamburluklu ince profil için sıfır hücum açısında veter boyunca basınç farkları dağılımı



Şekil 5.12: Küçük-bozuntu sınır koşulunun parabolik kamburluklu profilin basınç farkları üzerindeki etkisi ($\alpha=0^\circ$)



Şekil 5.13: Küçük-bozuntu sınır koşulunun parabolik kamburluklu profilin basınç farkları üzerindeki etkisi ($\alpha=10^\circ$)