

BÖLÜM 2

VİSKOZ OLMAYAN SIKIŞTIRILAMAZ AKIMIN ESASLARI

- 2.1 Açısal hız, Vortisite ve Sirkülasyon
- 2.2 Vortisitenin Değişme Hızı
- 2.3 Sirkülasyonun Değişme Hızı – Kelvin Teoremi
- 2.4 İrrotasyonel Akım – Hız Potansiyeli
- 2.5 Cidar Üzerindeki ve Sonsuzdaki Sınır Şartları
- 2.6 Basınç İçin Bernoulli Denklemi
- 2.7 Basit ve Çok Bağlı Bölgeler
- 2.8 Çözümün Tekliği
- 2.9 Girdap büyüklükleri
- 2.10 İki-boyutlu girdap
- 2.11 Biot-Savart kanunu
- 2.12 Doğrusal girdabın bir parçasının indüklemesi
- 2.13 Akım fonksiyonu

BÖLÜM 2

VİSKOZ OLMAYAN SIKIŞTIRILAMAZ AKIMIN ESASLARI

Bölüm 1 'de Reynolds sayısının yüksek olduğu akımlarda viskozite etkilerinin ince bir sınır tabaka ve iz bölgesi içerisinde kaldığı görülmüştür. Bu nedenle, ilk yaklaşımda akımın viskoz olmadığı kabul edilen sınır tabaka ve iz dışındaki bölgesi ile ilgilenmekle yetinilebilir. Bu tipten akımları yöneten denklemleri ve bunların çözümü için gerekli araçları geliştirmeden önce akım içerisindeki rotasyonun ve bunun viskozite ile ilişkisinin anlaşılmasında yarar vardır.

Bu bölümün amacı düşük-hız aerodinamiğindeki matematiksel problemin (diferansiyel denklem ve sınır şartları) tanımlanmasıdır.

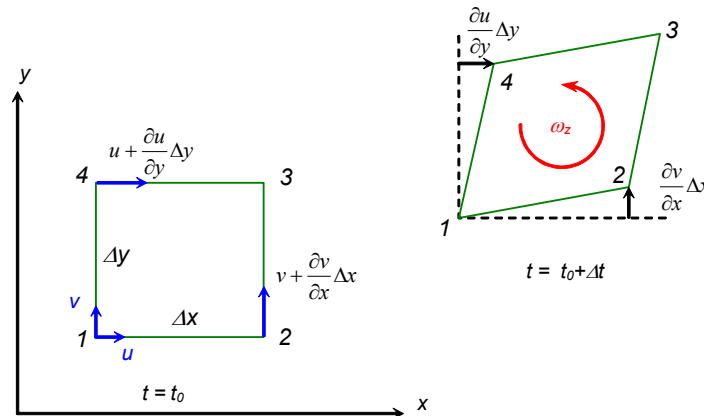
2.1 Açısal hız, Vortisite ve Sirkülasyon:

Bir akışkan elemanın keyfi hareketi

- *öteleme*,
- *dönme* (rotasyon) ve
- *şekil değiştirme* (deformasyon)

bileşenlerinden oluşmaktadır.

Hareket eden bir akışkan elemanın dönme hareketini göstermek için Şekil 2.1 'deki kontrol hacmini göz önüne alalım. Bu şekilde, kolaylık olması bakımından $z=0$ düzleminde sonsuz küçük dikdörtgensel bir akışkan elemanı ele alınmıştır. Akışkan elemanın $t=t_0$ anında, x ve y eksenleri doğrultusundaki kenar uzunlukları sırasıyla Δx ve Δy olup 1 numaralı köşesi (u, v) hızı ile hareket etmektedir. Akışkan içerisinde hızların konum ile değişmesi nedeniyle (örneğin 4 numaralı köşenin hızı $(u + \frac{\partial u}{\partial y})\Delta y$ olacaktır) akışkan elemanı hareket sırasında herhangi bir $t=t_0 + \Delta t$ anında Şekil 2.1 in sağ üst köşesinde görüldüğü gibi şekil değiştirebilir.



Şekil 2.1: Dikdörtgensel akışkan elemanın şekil değiştirmesi

Açısal hız:

Akışkan elemanının bu şekil değiştirme sırasındaki açısal hızının z eksenine etrafındaki bileşeni ω_z olup pozitif yönü sağ el kuralına göre saat ibrelerine zıt yöndedir.

ω_z açısal hızı akışkan elemanının 1-2 ve 1-4 kenarlarının **anlık açısal hızlarının aritmetik ortalaması** olarak hesaplanabilir. İki uç noktasının lineer hızları arasındaki farkın kenar uzunluklarına bölünmesi suretiyle 1-2, ve 1-4 kenarlarının anlık açısal hızları sırasıyla

$$\frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x\right) - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad -\frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) - u}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

olarak elde edilir. Böylece bu düzlemdeki açısal hız için

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

bulunur. Akışkan elemanının açısal hızının *diğer* iki bileşeni de benzeri şekilde elde edilebilir. Böylece bileşke **açısal hız**, vektörel biçimde

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V}} \quad (2.1)$$

olur.

Vortisite

$$\text{Vortisite} \text{ açısal hızın iki katı olarak tanımlanır: } \boxed{\vec{\zeta} = 2 \vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}} \quad (2.2)$$

Vortisitenin kartezyen koordinatlarda bileşenleri

$$\boxed{\zeta_x = 2\omega_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \zeta_y = 2\omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \zeta_z = 2\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}$$

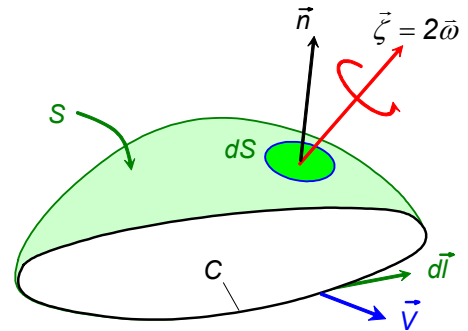
Sirkülasyon

Şekil 2.2 de gösterilen, C kapalı eğrisiyle sınırlanmış S açık yüzeyi üzerindeki vortisite "**Stokes teoremi**" kullanılarak C eğrisi boyunca çizgisel integrale dönüştürülebilir:

$$\iint_S \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \nabla \times \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifade sirkülasyon olarak adlandırılır

$$\boxed{\Gamma \equiv \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}} \quad (2.3)$$

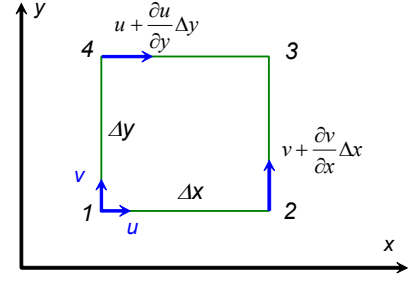


Şekil 2.2

Sirkülasyon için yazılan bu bağıntı şekildedeki dikdörtgensel akışkan elemanı için uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma &\equiv \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = u \Delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - v \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = \iint_S \zeta_z dS\end{aligned}$$

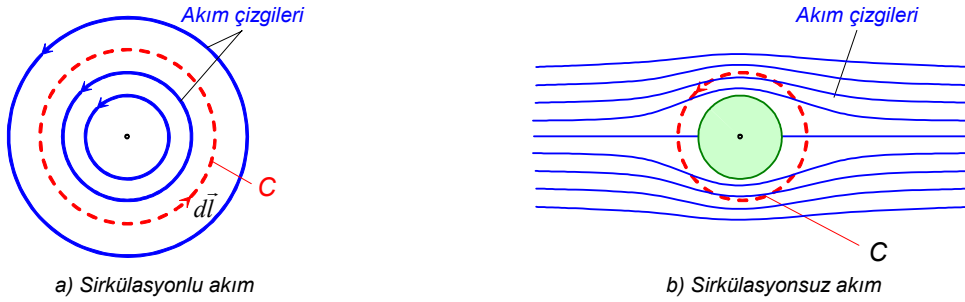
elde edilir.



Sirkülasyon kavramını göstermek için aşağıda iki örnek verilmiştir. Her iki halde de C eğrisi birer daire çemberi olarak alınmış ve kesik çizgilerle gösterilmiştir.

Şekil 2.3a da akım çizgileri eşmerkezli daire çemberi şeklindedir. İntegrasyon yolu için için seçilen dairesel C eğrisi üzerinde \mathbf{q} ve $d\mathbf{l}$ büyüklüklerinin her ikisi de pozitif (saat ibrelerine ters yönde) olup pozitif bir sirkülasyon bulunduğu açıktır.

Şekil 2.3b deki akım alanı dairesel silindiri geçen bir üniform paralel akımın yarattığı simetrik akımdır. Bu halde simetriden dolayı sirkülasyonun sıfır olduğu açıktır.



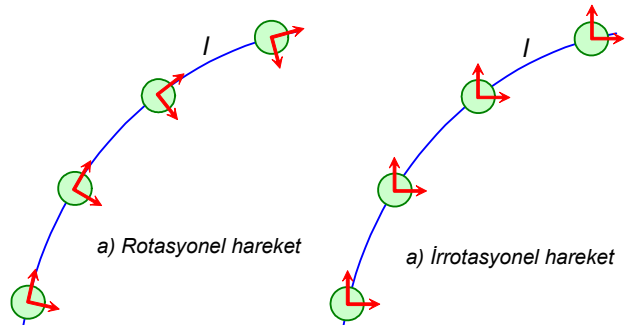
Şekil 2.3

Rotasyonel ve irrotasyonel hareket

Bir akışkanın rotasyonlu veya rotasyonsuz hareketini göstermek için Şekil 2.4 deki gibi eğrisel bir yörünge boyunca hareket eden bir kontrol hacmini göz önüne alalım.

Şekil 2.4a da viskoz kuvvetlerin çok büyük olduğunu ve akışkanın yörüngeyi izlerken katı cisim gibi döneceğini kabul edelim. Bu halde $\nabla \times \vec{q} \neq 0$ olup akım rotasyonel kabul edilir.

Şekil 2.4b de ise kayma gerilmeleri ihmal edilebilir mertebelerde olup, akışkan zerreleri komşu akışkan zerrelerinin kayma gerilmelerinin etkisiyle döndürülemeyecektir. Bu halde de $\nabla \times \vec{q} = 0$ olup akım irrotasyonel kabul edilir.



Şekil 2.4

2.2 Vortisitenin Değişme Hızı:

Bir akışkan elemanın vortisitesinin değişme hızına ilişkin bir denklem elde edebilmek için *sıkıştırılmaz* haldeki Navier-Stokes denklemini kartezyen koordinatlarda ele alalım:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{f} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.30)$$

Buradaki taşınımsal (konvektif) ivme terimi

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\zeta} \quad (2.5)$$

vektör eşitliği kullanılarak yeniden düzenlenebilir. Böylece,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\zeta} = \vec{f} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

şekline gelen Navier-Stokes denkleminin her iki tarafındaki terimlerin rotasyoneli alınarak

$$\begin{cases} \nabla \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} \\ \nabla \times \left[\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) \right] = 0 \\ \nabla \times (\nabla^2 \vec{V}) = \nabla^2 (\nabla \times \vec{V}) = \nabla^2 \vec{\zeta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{\zeta}) = \nabla \times \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (2.6)$$

Vortisitenin değişim hızını içeren bu denklemi daha da basitleştirmek için

$$\nabla \times (\vec{V} \times \vec{\zeta}) = \vec{V} (\nabla \cdot \vec{\zeta}) - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta} + (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{\zeta} (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2.7)$$

vektör eşitliği kullanılarak

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta} - \vec{V} (\nabla \cdot \vec{\zeta}) + \vec{\zeta} (\nabla \cdot \vec{V}) = (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} + \nabla \times \vec{f} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}$$

elde edilir. Diğer taraftan

Bir vektörün rotasyonelinin diverjansı sıfır olup,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \nabla \cdot \vec{\zeta} = 0$$

Sıkıştırılmaz halde süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Bünye kuvvetleri konservatif (irrotasyonel) kabul edilerek

$$\nabla \times \vec{f} = 0$$

denklem $\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\zeta} = (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}$ veya $\frac{D \vec{\zeta}}{Dt} = (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (2.8)$

şekline gelir. Bu denkleme *vortisite transport denklemi* adı verilir. Vortisite transport denklemi:

Viskoz olmayan sıkıştırılmaz akımlar için

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} = (\vec{\zeta} \cdot \nabla)\vec{V} \quad (2.9)$$

İki-boyutlu akımda vortisite akım düzlemine dik olup

$$[(\vec{\zeta} \cdot \nabla)\vec{V}] = 0$$

İki-boyutlu, viskoz, sıkıştırılmaz akım için

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (2.10)$$

İki-boyutlu, viskoz olmayan, sıkıştırılmaz akım halinde ise

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} = 0 \quad (2.11)$$

şekline gelir. Bu halde her bir akışkan elemanın vortisitesi sabit kalır.

Vortisite transport denklemi Navier-Stokes denkleminde oldukça benzerdir. Reynolds sayısının çok yüksek değerlerinde, katı cidar üzerinde üretilen vortisitenin akıma dikey doğrultudaki difüzyonuna kıyasla akım doğrultusunda daha büyük bir hızla taşındığı ve bu nedenle de sınır tabaka ve bunun devamı olan iz içerisinde kaldığı görülür. Akım alanının bunlar dışında kalan bölgeleri ise rotasyonsuz ve viskozitesiz kabul edilir.

Vortisite Transport Denklemi için Boyut Analizi:

Yukarıdaki gözlemler bir boyut analiziyle de gösterilebilir. Nitekim *İki-boyutlu, viskoz, sıkıştırılmaz* akım için yukarıda bulunan (2.10) denkleminde

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} = \frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\zeta} = \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (2.10)$$

denkleminde

$$x = L \cdot x^*$$

$$y = L \cdot y^*$$

$$u = V \cdot u^*$$

$$v = V \cdot v^*$$

$$t = \frac{V}{L} \cdot t^*$$

$$\left. \begin{array}{l} u = V \cdot u^* \\ v = V \cdot v^* \end{array} \right\} \rightarrow \vec{V} = V \cdot \vec{V}^*$$

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V}{L} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = \frac{V}{L} \zeta_z^*$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{e}_j = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \vec{e}_j = \frac{1}{L} \nabla^*$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^{*2}} = \frac{1}{L^2} \nabla^{*2}$$

boyutsuz büyüklükleri kullanılarak

$$\frac{D\zeta_z}{Dt} = \frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\zeta_z = \nu \nabla^2 \zeta_z \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \zeta_z^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*)\zeta_z^* = \frac{\nu}{VL} \nabla^{*2} \zeta_z^*$$

veya materyal türev cinsinden

$$\frac{D\zeta_z^*}{Dt^*} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \zeta_z^* \quad (2.10a)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{D\zeta_z^*}{Dt^*} = \frac{\partial \zeta_z^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \zeta_z^* \quad \text{Vortisite artış hızı}$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \nabla^{*2} \zeta_z^* \quad \text{Vortisite üretim hızı}$$

olup (2.10a) denklemini vortisite artış hızının katı cidarlar civarındaki vortisite üretim hızına eşit olduğunu göstermektedir.

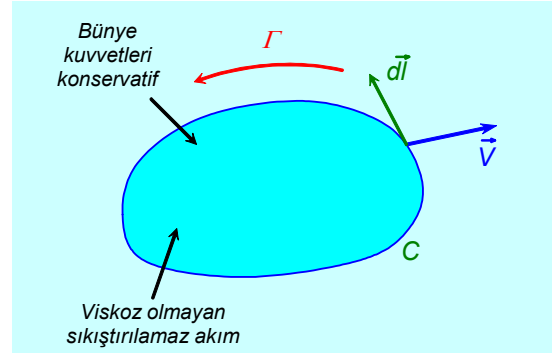
Yüksek Reynolds sayılı akımlar için vortisite üretimi küçük olup sınır tabaka dışında ihmal edilebilir.

2.3 Sirkülasyonun Değişme Hızı – Kelvin Teoremi:

Şekildeki gibi,

- *Bünye kuvvetlerinin konservatif* olduğu
- *sıkıştırılmaz, viskoz olmayan* bir akışkanda
- daima aynı akışkan partiküllerinden geçen bir akışkan eğrisini göz önüne alalım.

Bu C eğrisi etrafındaki sirkülasyonun zamanla değişimi



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad \rightarrow \quad \oint_C \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{V} \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{l}) \quad (2.13)$$

C bir akışkan eğrisi olduğundan

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{a}$$

$$\frac{D}{Dt} d\vec{l} = d\vec{V}$$

⇒ ↓

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{V}$$

\vec{V} sadece konumun ve zamanın fonksiyonu olup

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{V} = \oint_C d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Downarrow$$

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_c \vec{a} \cdot d\vec{l} = 0} \quad (2.14)$$

Sıkıştırılamaz halde Euler denkleminde

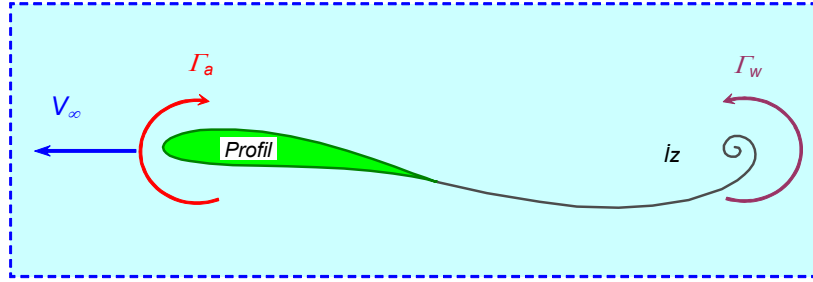
$$\boxed{\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{q} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho}} \rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho}} \Rightarrow \Downarrow$$

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{l} - \oint_c \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) d\vec{l} = 0} \quad (2.15)$$

bulunur. Buna göre bir akışkan eğrisinin sirkülasyonu sabit kalmaktadır. Bu sonuç açısal momentumun korunumu prensibinin bir başka formu olup, **Kelvin teoremi** olarak bilinir.

Kelvin teoremi aynı akışkan elemanlarını içeren kapalı bir eğri etrafındaki sirkülasyonun zamanla değişiminin sıfır olduğunu belirtmektedir

Örneğin, Şekil 2.5 deki kanat profili $t=0$ anında hareketsiz olsun ve $t>0$ anında aniden ileri doğru sabit bir hızla hareket etsin.



Şekil 2.5

Profil akışkan içerisinde hareket ettikçe etrafında bir Γ_a sirkülasyonu ve profil izinde de bir Γ_w sirkülasyonu oluşacaktır. Kelvin teoremine göre profil ve izini içine alan bir çizgi etrafındaki toplam sirkülasyon zamanla değişmeyecek sabit kalacaktır:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{\Gamma_a + \Gamma_w}{\Delta t} = 0$$

Bu da ancak, başlangıç girdabının sirkülasyonunun profil sirkülasyonuna eşit ama zıt yönde olmasıyla mümkündür.

$$\boxed{\Gamma_a = -\Gamma_w}$$

2.4 İrrotasyonel Akım – Hız Potansiyeli:

*Yüksek Reynolds sayıları*ndaki akımlarda

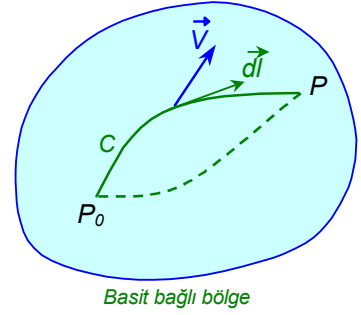
- viskozite etkisinin sınır tabaka ve iz bölgesi içerisinde kaldığı ve bu bölge içerisinde viskozite etkilerinin ihmal edilemeyeceği,
- Sınır tabaka ve iz dışında kalan bölgelerde ise akımın irrotasyonel ve sürtünmesiz kabul edilebileceği

görülmüştü. Şekildeki gibi basit bağlı bir bölgede bir C eğrisi boyunca

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_C (u dx + v dy + w dz) \quad (2.17)$$

integralini göz önüne alalım. Şayet bölge içindeki akım irrotasyonel ise

$$(u dx + v dy + w dz) \quad (2.18)$$



büyüklüğü, integrasyonun C yolundan bağımsız olup $P(x,y,z)$ konumuna bağlı olan bir ϕ potansiyel fonksiyonunun tam diferansiyelidir (bkz. *Kreyszig E., Advanced engineering mathematics, Wiley, sayfa 741*)

$$\Phi(x, y, z) = \int_{P_0}^P (u dx + v dy + w dz)$$

Burada P_0 keyfi bir referans noktası olup ϕ *büyüklüğü hız potansiyeli* olarak adlandırılır.

Hız vektörü potansiyel fonksiyonunun gradyantına eşittir:

$$\vec{V} = \nabla\Phi \quad (2.19)$$

Kartezyen koordinatlarda

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (2.20)$$

Sıkıştırılmaz halde

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

\Rightarrow

\Downarrow

olup

$$\nabla(\nabla\Phi) = 0$$

Laplace denklemi

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (2.21)$$

elde edilir. İrrotasyonel, sıkıştırılmaz akımlar için süreklilik denkleminin bir formu olan Laplace denklemi *lineer bir diferansiyel denklemdir*.

Bu halde akışkanın viskozitesi ihmal edildiğinden bir katı-akışkan cidarındaki "*kaymama*" *sınır şartı koşulmaz*. Sınır şartı olarak *sadece yüzeye dik hız bileşeninin sıfır* olması yeterlidir.

Bu sınır şartının daha genel bir formu "*akışkan ile yüzey arasındaki izafi hızın katı yüzeye dik bileşenin sıfır olması*" şeklinde belirtilebilir. Buna göre

$$\vec{n} \cdot (\vec{V} - \vec{V}_B) = 0 \quad (2.22)$$

\vec{V}	akışkan hızı
\vec{V}_B	katı cidar hızı
\vec{n}	katı cidarın normal vektörü

Bu son ifade, akış probleminin matematiksel formülasyonu için daha uygun bir biçimdir.

Böylece: İrrotasyonel, viskozitesiz ve sıkıştırılmaz bir akım için *hız alanının* hız potansiyeli için yazılmış Laplace denkleminin çözümünden elde edilebileceği görülmektedir.

Bu arada, hızları basınçlara bağlayan Euler denkleminde henüz yararlanılmadığını belirtmekte yarar vardır. Akım problemi için hız alanı bir defa çözümlendikten sonra aerodinamik kuvvet ve momentlerin elde edilebilmesi için cisim yüzeyi boyunca basınç dağılımının elde edilmesi gerekmektedir.

2.5 Cidar Üzerindeki ve Sonsuzdaki Sınır Şartları:

Hız potansiyeli için yazılan *Laplace denklemini*:

- *viskoz olmayan,*
- *sıkıştırılmaz,*
- *irrotasyonel*

bir akımı yöneten ve *hız için yazılmış* olan

- *eliptik türde*
- *kısmi türevli*

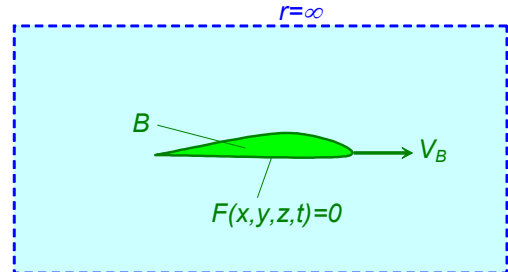
bir *diferansiyel denklemdir*. Bu denklem bir sınır değer problemini ifade eder. Aerodinamik problemler için sınır şartlarının bütün katı cidarlar üzerinde ve sonsuzda belirtilmesi gerekir.

Katı-akışkan ara-yüzünde sınır şartının bir şekli yukarıda verilmiştir. Bu sınır şartının uygulamalarda faydalı bulunan bir diğer şekli aşağıdaki gibi bulunabilir:

Şekildeki gibi katı bir yüzeyi kartezyen koordinatlarda

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (2.23)$$

bağıntısıyla ifade edelim. Yüzey üzerindeki akışkan partikülleri yüzeyin hızına eşit bir \vec{V}_B hızıyla hareket edecektir. Yani $F=0$ kalacaktır. Buna göre F fonksiyonunun yüzeydeki taneciklerin hareketini takiben alınmış türevi sıfır olacaktır:



$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_B F = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V}_B \cdot \nabla F = 0} \quad (2.24)$$

(2.22) Sınır şartı

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{V} - \vec{V}_B) = 0} \quad \Downarrow$$

Yüzey normali

$$\vec{n} \equiv \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (2.25) \Rightarrow \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\vec{V} \cdot \nabla F \equiv \vec{V}_B \cdot \nabla F \quad (2.26) \Rightarrow \Downarrow$$

Böylece

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla F = \frac{DF}{Dt} = 0} \quad (2.27)$$

Sonsuzdaki sınır şartı: Başlangıçta hareketsiz olan bir akışkan içerisinde hareket eden bir cismin yarattığı \vec{V} bozuntu hızı sonsuzda (cismin katı cidarından çok uzaklarda) sifira gider.

Buna göre, yere bağlı eksen takımında durgun akışkan içerisinde

$$\boxed{\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{V} = 0} \quad (2.28)$$

2.6 Basınç İçin Bernoulli Denklemi:

Euler denklemi

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho}}$$

sıkıştırılmaz halde

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad \text{olup}$$

ayrıca

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\zeta}$$

vektör eşitliği kullanılarak

$$\boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \vec{\zeta} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = \vec{f} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)} \quad (2.29)$$

şekline getirilebilir. *İrrotasyonel* akım için

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = 0$$

Hızın zamana göre türevi

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \Phi)}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.30)$$

olup, \vec{f} konservatif ise E potansiyel olmak üzere

$$\vec{f} = -\nabla E \quad (2.31)$$

yazılabilir. (Şayet \vec{f} kuvveti yer çekimi ise $E = -gz$ olacaktır.) Böylece Viskozitesiz, sıkıştırılmaz, irrotasyonel akımlar için Euler denklemi

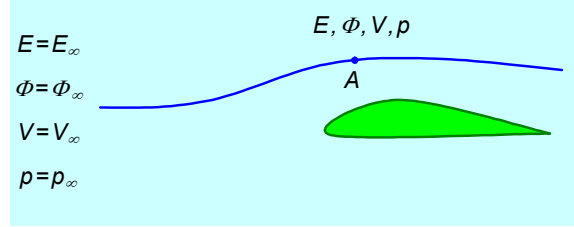
$$\boxed{\nabla \left(E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0} \quad (2.32)$$

şeklini alır. Bu denklem, parantez içindeki terim sadece zamanın bir fonksiyonu olmak kaydıyla doğrudur. Böylece

$$\boxed{E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = C(t)} \quad \text{"Bernoulli Denklemi"} \quad (2.33)$$

elde edilir.

Bernoulli denkleminin daha faydalı bir şekli, denklemin sol tarafındaki terimleri akışkan içerisindeki farklı iki noktada, örneğin keyfi bir nokta ile sonsuzdaki bir referans noktada yazarak elde edilir:



$$\boxed{\left(E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = \left(E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{\infty}} \quad (2.34)$$

Örneğin $E_{\infty}=0$, $\Phi_{\infty}=Sb$ ve $V_{\infty}=0$ olarak seçilirse A noktasında basınç

$$\boxed{\frac{p_{\infty} - p}{\rho} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + E + \frac{V^2}{2}} \quad (2.35)$$

bağıntısıyla hesaplanabilir.

NOT: Şayet akım

- *daimi* ($\partial\Phi/\partial t=0$),
- *sıkıştırılamaz* ($\rho=sb$)
- fakat *rotasyonel*

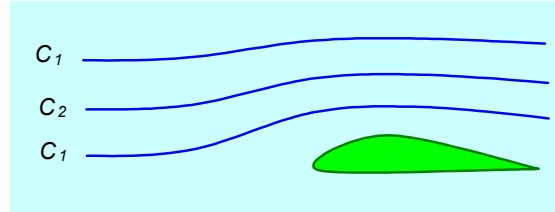
ise (2.34) Bernoulli denklemi

- *zamana göre türev* terimi *sıfır* olmak
- *sağda sabit* akım çizgisinden akım çizgisine *değişmek*

kaydıyla yine geçerlidir. Nitekim bu şartlarda (2.29) Euler denklemini yeniden düzenlenirse

$$\nabla \left(E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = \vec{V} \times \vec{\zeta}$$

şekline gelir ki, bu denklemin bir akım çizgisi üzerinde izdüşümünü almak için her iki tarafı akım çizgisinin **dl** teğet vektörü ile çarpılırsa, $\vec{V} \times \vec{\zeta}$ çarpımı $d\vec{l}$ teğet vektörüne dik olup bunların çarpımı akım çizgisi boyunca sıfırdır. Bunun sonucu olarak Bernoulli denklemini aynı akım çizgisi üzerindeki iki nokta arasında kullanılabilir.



$$\boxed{E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C_s}$$

2.7 Basit ve Çok Bağlı Bölgeler:

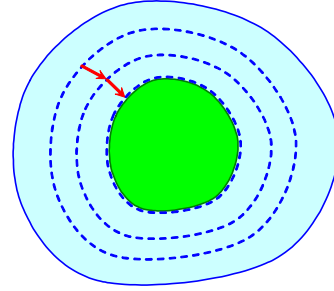
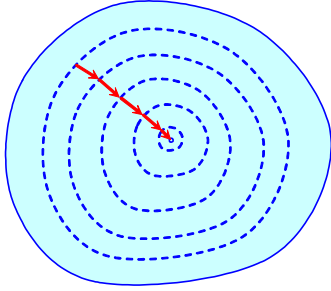
İki-boyutlu kanat profili, üç-boyutlu kanat veya gövde gibi farklı geometriler etrafındaki akım bölgeleri matematiksel anlamda birbirinden farklı olup, hız potansiyeli de farklı özellikler gösterir. Bu bölgeler arasındaki farkı göstermek için bazı temel tanımları bilmek gereklidir.

Bir bölge içindeki kapalı bir eğri daraltılarak neticede

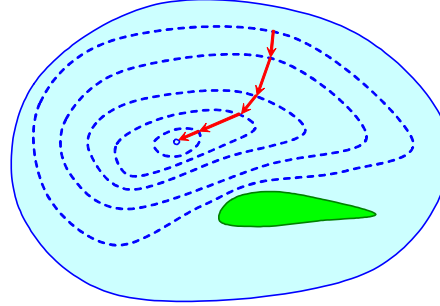
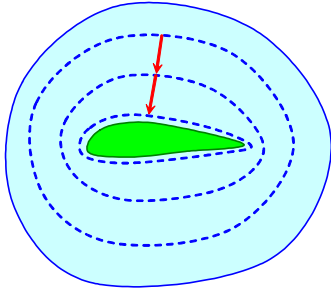
bir noktaya indirgenebilir

veya

bu mümkün olmayabilir.

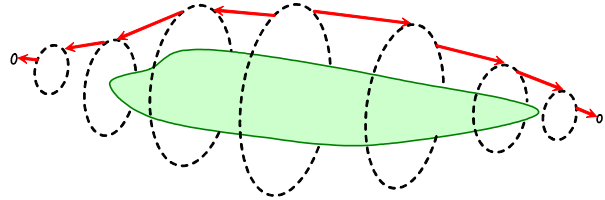


Örneğin, bir kanat profilini çevreleyen kapalı bir eğri indirgenemezken, profili çevrelemeyen bir eğri indirgenebilir.



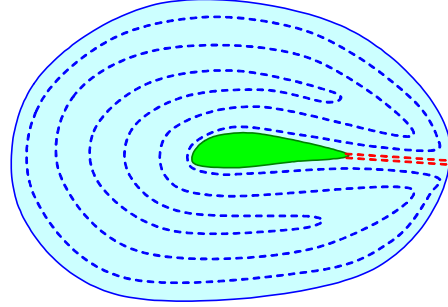
Basit-bağlı bölge, içerisindeki bütün kapalı eğriler bir noktaya indirgenebilen bölgedir.

Bir uçak gövdesinde olduğu gibi sonlu, üç-boyutlu bir cisim etrafındaki bölge basit-bağlıdır. Zira cismi çevreleyen herhangi bir eğri cisim civarından uzaklaştırılıp bir noktaya indirgenebilir.



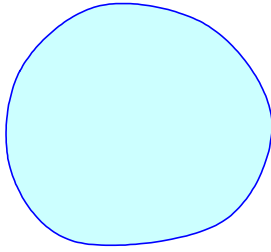
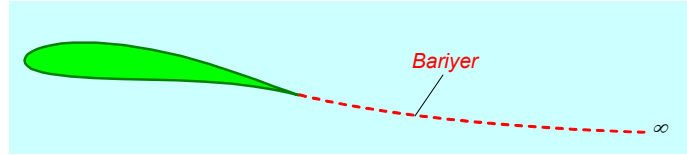
Bariyer, bir bölge içerisine sokulan ama modifiye edilmiş bölgenin bir parçası olmayan bir eğridir.

Bir bölgeye sokulan bir bariyer *çok bağlı* olan bu bölgeyi *basit bağlı* hale getirir.

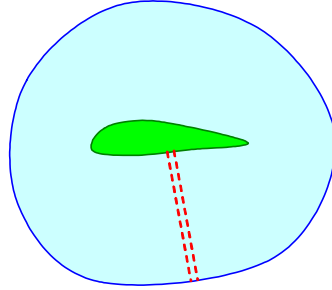


Bir bölgenin bağlılık derecesi, bu bölgeyi basit bağlı hale getirmek için gereken bariyer sayısına bağlı olup, bariyer sayısı n ise bağlılık derecesi $n+1$ olarak belirtilir.

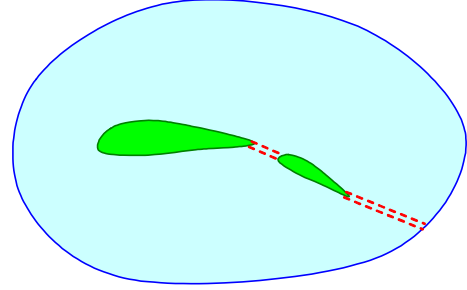
Şekildeki kanat profili etrafındaki çok-bağlı bölge firar kenarından geriye sonsuza giden bir bariyer çizilerek basit-bağlı hale getirilebilir (Bölgedeki kapalı eğriler artık profili çevrelememektedir). Bu durumda $n=1$ olup orijinal bölge çifte-bağlıdır.



Basit bağlı bölge



Çifte-bağlı (bir-defa bağlı) bölge



İki-defa bağlı bölge

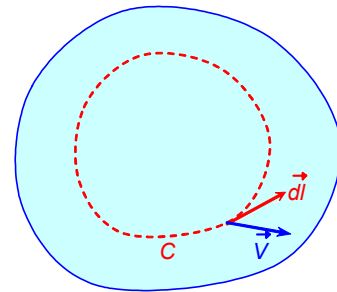
Basit ve çok bağlı bölgelerin farkı

Basit bağlı bir bölgedeki *irrotasyonel* hareket halinde herhangi bir kapalı eğri etrafındaki sirkülasyon için

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint \nabla\Phi \cdot d\vec{l} = \oint d\Phi \quad (2.36)$$

yazılabilir. Bölge içerisinde vortisite sıfır olup

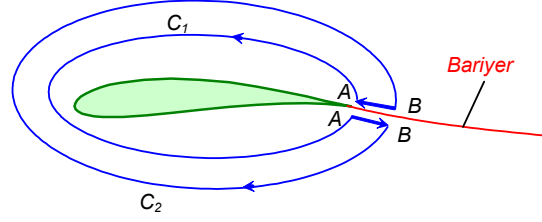
$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{\zeta} \cdot \vec{n} \, dS \quad (2.4)$$



denklemine göre sirkülasyon sıfırdır. Ayrıca, $d\Phi$ nin herhangi bir eğri etrafındaki integrali sıfır olduğundan hız potansiyeli tek-değerlidir (bkz *Bölüm 2.4*).

Şekil 2.7 deki kanat profili etrafında görülen çifte bağlı bölgedeki irrotasyonel akım halinde:

Profili çevrelemeyen herhangi bir kapalı eğri boyunca, yukarıda basit bağlı bölge için bulunan sonuç uygulanarak sirkülasyon değeri sıfır bulunur.



Şekil 2.7

Şekildeki gibi bir bariyer çizerek profili çevreleyen C_1 ve C_2 eğrileri ile bariyerin iki yanından oluşan bir eğriyi göz önüne alalım. Bariyeri içermeyen bölge basit bağlı olduğundan, eğri etrafındaki sirkülasyon sıfırdır. Buna göre

$$\oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$$

Bariyerin her iki yanında alınan integraller daimi akım halinde birbirini götürür. İlk terim C_1 etrafındaki sirkülasyon, ikinci terim eksi işaretli C_2 etrafındaki sirkülasyondur.

$$\int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$$

C_1 ve C_2 eğrileri (ve profili çevreleyen herhangi başka eğriler) etrafındaki sirkülasyon aynı olup sıfırdan farklıdır.

$$\boxed{\oint_{C_1} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_2} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \Gamma}$$

Bu bağıntıya göre profil etrafında sıfırdan farklı bir sirkülasyon varsa hız potansiyeli tek değerli değildir.

2.8 Çözümün Tekliği:

Bir kanat profili veya kanadın hareketiyle oluşan akım için *hız alanının bulunması* şeklindeki fiziksel problem, hız potansiyeli için tanımlanan *Laplace denkleminin* cisim üzerindeki ve sonsuzdaki hızlar için tanımlanan *uygun sınır şartlarıyla çözümlenmesi* biçiminde bir matematiksel probleme dönüştürülmüştür.

Yere bağlı eksen takımında matematiksel problem şeklinde olup

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

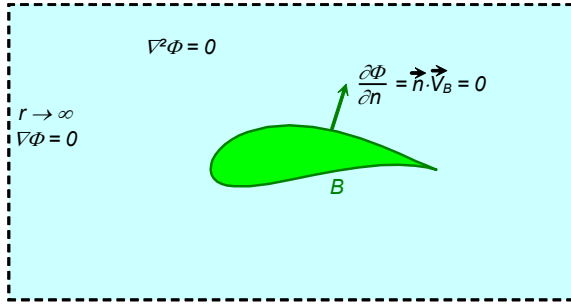
(2.37a)

Sınır şartları

$$\text{Cisim üzerinde} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{V}_B \quad (2.37b)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ için} \quad \nabla \Phi = 0 \quad (2.37c)$$

şekindedir



Katı cidar üzerindeki sınır şartı potansiyel fonksiyonunun türevi cinsinden olduğundan ve akım alanı cismin dışındaki bölgede bulunduğundan bu problem "*Neumann dış akım problemi*" olarak bilinir.

Bu problemin çözümünün tek olup olmadığı sorusunun cevabının *basit bağlı* ve *çok bağlı* problemler için farklı olduğu görülecektir.

Önce şekildeki gibi üç-boyutlu bir cisim etrafındaki basit bağlı bölgeyi göz önüne alalım.

Sonuçlar bir kanat için genelleştirilirken, akım alanının her yerde irrotasyonel olmadığından (iz bölgeleri) dikkatli olunmalıdır.

Aynı basit bağlı bölge için Φ_1 ve Φ_2 gibi iki farklı çözümü olduğunu kabul edelim. İki çözüm arasındaki

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_D$$

farkı Laplace denklemini ve sınır şartlarını sağlar.

Φ Büyüklüğü Laplace denkleminin bir çözümü olmak üzere tanımlanan bir $(\Phi \cdot \nabla \Phi)$ fonksiyonuna diverjans teoremi uygulanarak

$$\rightarrow \iiint_R \nabla(\Phi \cdot \nabla \Phi) dV = \iint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (2.38)$$

Burada R akışkan bölgesini, S de bunun sınır yüzeyini belirtmektedir.

Bu bağıntı B cismi ile bunu çevreleyen keyfi bir Σ yüzeyi arasındaki bölgede Φ_D fonksiyonuna uygulanırsa,

$$\iiint_R \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = \iint_B \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS + \iint_\Sigma \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS \quad (2.39)$$

Σ yüzeyinin sonsuzda olduğu kabul edilirse bunun üzerindeki integralin değeri sıfır olur.

$$B \text{ katı yüzeyi üzerinde sınır şartı gereği } \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = 0 \text{ olup geriye } \iiint_R \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = 0 \quad (2.40)$$

kalır. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için integrandı sıfır olmalıdır.

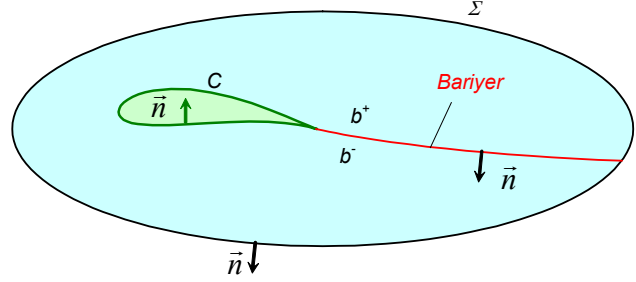
Bu durumda $\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_D$ farkı da ancak bir sabit olabilir. Buna göre:

Basit bağlı bir bölge içindeki Neumann dış akım problemi bir sabit dahilinde tek-çözümlüdür.

Şimdi de Şekil 2.8 de görülen *kanat* profili etrafındaki çifte-bağlı bölgeyi dikkate alalım. Yine çözümler Φ_1 ve Φ_2 ve

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_D$$

olsun. C ve Σ eğrilerini bir bariyerle birleştirelim ve bariyerin iki yanını şekilde görüldüğü gibi b^- ve b^+ şeklinde adlandıralım. \vec{n} vektörü b^- den dışarı doğru seçilmiştir.



Şekil 2.8

C profili ile bunu çevreleyen Σ eğrisi arasında kalan R bölgesinde yine $(\Phi \cdot \nabla \Phi)$ fonksiyonuna Green teoremini uygulayalım:

$$\iiint_{\sigma} \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = \iint_C \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS + \iint_{\Sigma} \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS + \iint_{b^-} \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS - \iint_{b^+} \Phi_D \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} dS \quad (2.41)$$

C üzerindeki integral $\partial \Phi_D / \partial n = 0$ şeklindeki yüzey sınır şartından dolayı sıfırdır.

Şayet Σ yüzeyi sonsuza götürülürse bunun üzerindeki integral de sıfır olur.

Φ_D fonksiyonun b^- ve b^+ üzerindeki değerlerine sırasıyla Φ_D^- ve Φ_D^+ diyelim. Böylece

$$\iiint_{\sigma} \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = \iint_{b^-} \Phi_D^- \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS - \iint_{b^+} \Phi_D^+ \frac{\partial \Phi_D^+}{\partial n} dS \quad (2.42)$$

Φ_D nin bariyere dik doğrultudaki türevi sürekli olup

↓

$$\left(\frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} \right)_{bariyer} = \left(\frac{\partial \Phi_D^+}{\partial n} \right)_{bariyer} \Rightarrow \iiint_{\sigma} \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = \iint_{bariyer} (\Phi_D^- - \Phi_D^+) \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS \quad (2.43)$$

$$\Phi_1 \text{ ve } \Phi_2 \text{ büyüklükleriyle } \iiint_{\sigma} \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = \iint_{bariyer} (\Phi_1^- - \Phi_1^+ + \Phi_2^+ - \Phi_2^-) \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS \quad (2.44)$$

1 ve 2 akımlarına ait sirkülasyonlar

$$\Gamma_1 = \Phi_1^+ - \Phi_1^-$$

olarak tanımlanırsa,

$$\Gamma_2 = \Phi_2^+ - \Phi_2^-$$

bunlar sabit olup sonuçta

$$\boxed{\iiint_{\sigma} \nabla(\Phi_D \cdot \nabla \Phi_D) dV = (\Gamma_2 - \Gamma_1) \iint_{bariyer} \frac{\partial \Phi_D^-}{\partial n} dS} \quad (2.45)$$

elde edilir.

Genel olarak bariyer boyunca integralin sıfır olması gerekmediğinden, Neumann dış akım problemi ancak $\Gamma_1 = \Gamma_2$ olduğunda (sirkülasyon problemin bir parçası olarak belirlendiğinde) bir sabit dahilinde tek çözüm verir. Bu sonuç çok-bağlı bölgeler için de benzeri biçimde genelleştirilebilir. Sirkülasyonun değeri pür matematiksel ortamda belirlenemez. Ancak, ileride görülecek bir takım fiziksel çıkarımlarla belirlenecektir.

2.9 Girdap büyüklükleri

Hız vektörüyle ilişkili olarak tanımlanan

- akım çizgisi
- akım tüpü
- akım yüzeyi

gibi çeşitli kavramların benzerleri

vortisite vektörü için de tanımlanabilir:

- girdap çizgisi
- girdap tüpü
- girdap yüzeyi

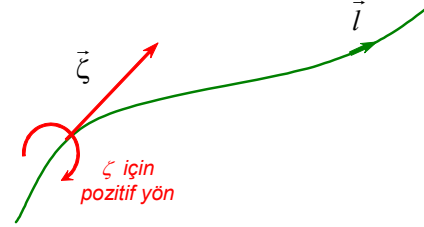
Bu tanımlar taşıyıcı akımların modellenmesinde faydalı olacaktır.

Vortisite vektörüne teğet alan çizgileri *girdap çizgileri* olarak adlandırılır.

$$\vec{\zeta} \times d\vec{l} = 0 \quad (2.46)$$

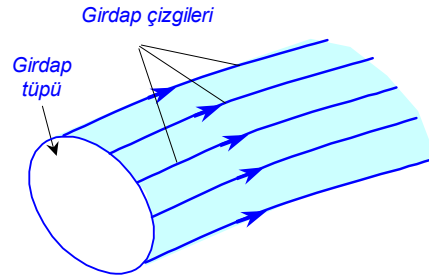
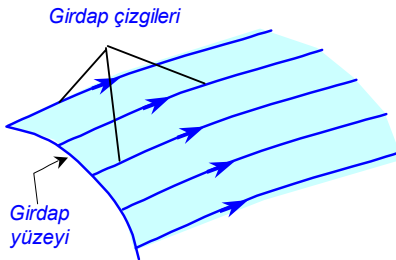
Kartezyen koordinatlarda

$$\frac{dx}{\zeta_x} = \frac{dy}{\zeta_y} = \frac{dz}{\zeta_z} \quad (2.47)$$



Şekil 2.9

Uzayda açık bir eğri üzerinden geçen kapalı bir eğri üzerinden geçen girdap çizgileri bir girdap yüzeyi, bir girdap tüpü oluşturur.



Bir *girdap filamanı* sonsuz küçük kesit alanlı bir girdap tüpü olarak tanımlanır.

Bir vektörün rotasyonelinin diverjansı sıfır olduğundan $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$

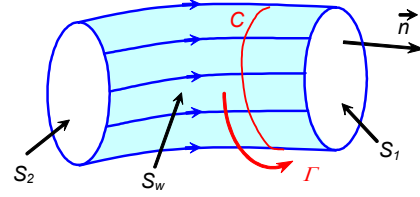
Vortisitenin diverjansı özdeş olarak sıfırdır: $\nabla \cdot \vec{\zeta} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \quad (2.48)$

Herhangi bir anda bir S yüzeyi ile çevrilmiş R bölgesinde vortisite vektörü için diverjans teoremi

$$\iint_S \vec{\zeta} \cdot \vec{n} dS = \iiint_R (\nabla \cdot \vec{\zeta}) dV = 0 \quad (2.49)$$

Şekil 2.10 daki gibi bir girdap tüpünün S_w duvarı ve S_1 ve S_2 yüzeleriyle çevrilen bölge içinde bu denklem uygulanırsa, S_w üzerinde girdaplılık vektörü yüzeye paralel olduğundan *bunun* katkısı olmayıp

$$\iint_S \vec{\zeta} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{\zeta} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{\zeta} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (2.50)$$



Şekil 2.10

\mathbf{n} büyüklüğü şekilde gösterildiği gibi dışa doğru yönelmiş normal vektördür. Şayet n_v girdaplılık yönünde pozitif olarak belirtilirse

$$\iint_{S_1} \vec{\zeta} \cdot \vec{n}_v dS = \iint_{S_2} \vec{\zeta} \cdot \vec{n}_v dS = sb \quad (2.51)$$

Bu bağıntıdaki sabit büyüklük tüpün bütün dik-kesit yüzeyleri için aynıdır.

Tüpü çevreleyen ve duvarı üzerinde yer alan kapalı bir eğri C olsun. C etrafındaki sirkülasyon,

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\zeta} \cdot \vec{n}_v dS = sb \quad (2.52)$$

olup büyüklüğü girdap tüpü boyunca sabittir.

Bu bağıntılarındaki sonuçlar *girdaplılığın uzaysal korunumunu* göstermekte olup, pür kinematik bir sonuçtur.

Bu son denklem bir girdap filamanına uygulanır ve n_v normal vortisite vektörüne paralel seçilirse

$$\Gamma_C = \zeta dS = sb \quad (2.53)$$

Buna göre:

Bir girdap filamentinin herhangi bir kesitindeki girdaplılık dik-kesit alanıyla ters orantılıdır.

Bunun sonucu olarak da bir girdap filamentinin akışkan içerisinde sona eremeyeceği görülmektedir. Zira kesit alanının sıfıra gitmesi için girdaplılığın sonsuz olması gerekir. Ancak bu limit durum modelleme amaçları için yararlı olup, bir girdap filamentini sabit bir sirkülasyon, sıfır dik-kesit alanı ve sonsuz girdaplılık şiddeti ile yoğunlaştırılmış girdaplılık şiddetine sahip bir girdap filamentini tanımlamak uygun olur.

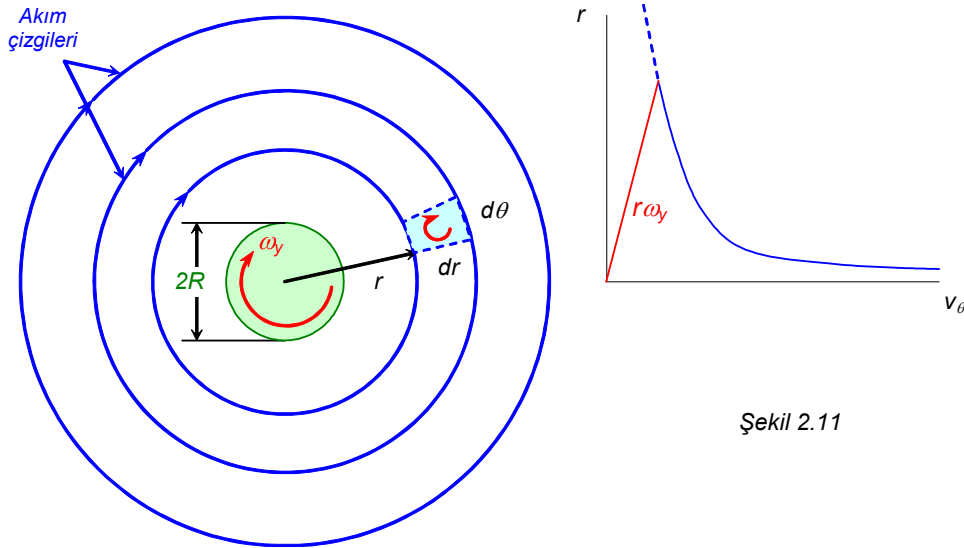
Buradakine benzer sonuçlara dayanarak, Alman bilim adamı Hermann von Helmholtz (1821-1894) viskoz olmayan akımlar için girdap teoremlerini geliştirmiştir. Bunları şu şekilde özetlemek mümkündür:

1. Bir girdap filamentinin şiddeti eksenini boyunca değişmez.

2. Bir girdap filamenti akışkan içinde başlamaz veya bitmez (kapalı bir eğri teşkil etmeli veya sonsuza gitmelidir).
3. Bir girdap tüpü oluşturan akışkan girdap tüpü oluşturmaya devam eder ve girdap tüpünün şiddeti, girdap tüpü hareket ettiğinde değişmez (dolayısıyla, girdap çizgisi, girdap tüpü, girdap yüzeyi vb gibi girdap elemanları zaman içinde girdap elemanı olarak kalacaktır).

İlk teorem (2.53) denkleminde dayanmakta, ikinci teorem bunu izlemektedir. Üçüncü teorem aslında Helmholtz'un üçüncü ve dördüncü teoremlerinin bir birleşimi olup, viskoz olmayan akım kabulünün bir sonucudur.

2.10 İki-boyutlu girdap



Şekil 2.11

Şekilde gösterildiği gibi eşmerkezli dairesel akım çizgilerine sahip bir akım alanını ele alalım. Bu akıma iki-boyutlu girdap adı verilmektedir.

Silindirik koordinat sisteminde süreklilik denklemini

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_r}{r} = 0$$

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$$

⇒ ↓

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

(2.54)

↓

$$v_\theta = v_\theta(r)$$

(2.55)

Silindirik koordinat sisteminde N/S denkleminin r bileşeni

$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ f_r &= 0 \\ \partial v_\theta / \partial \theta &= 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow \Downarrow

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

(2.56)

\Downarrow

v_θ sadece r nin fonksiyonu olup

$$p = p(r)$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

Silindirik koordinat sisteminde N/S denkleminin θ bileşeni

$$\rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$

$$v_r = 0$$

\Rightarrow \Downarrow

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x}$$

Materyal türev

\Downarrow

\Downarrow

\Leftarrow

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = 0, \quad v_x = 0$$

\Downarrow

\Leftarrow

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} = 0$$

$$f_\theta = 0 \Rightarrow$$

\Downarrow

$$0 = \mu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right)$$

\Downarrow

$$\nabla^2 v_\theta = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}$$

Hız bileşeninin Laplasiyeni

\Downarrow

\Downarrow

\Leftarrow

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad v_x = 0$$

\Downarrow

\Leftarrow

$$\nabla^2 v_\theta = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r}$$

$$0 = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}$$

(2.57)

$$v_\theta = v_\theta(r)$$

\Rightarrow \Downarrow

$$0 = \frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)$$

(2.58)

\Downarrow

Bir kez integre edilerek

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = C_1$$

↓

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\theta) = C_1$$

↓

$$v_\theta = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}$$

(2.59)

Sınır şartlarından

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -R^2 \omega_y / r$$

(2.60a)

(2.60b)

$$v_\theta = -\frac{R^2 \omega_y}{r}$$

(2.61)

düzenlenerek

Bir kez daha integre edilerek

Sirkülasyon

Saat ibreleri yönünde pozitif

$$\Gamma = - \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta$$

$$v_\theta = -\frac{R^2 \omega_y}{r}$$

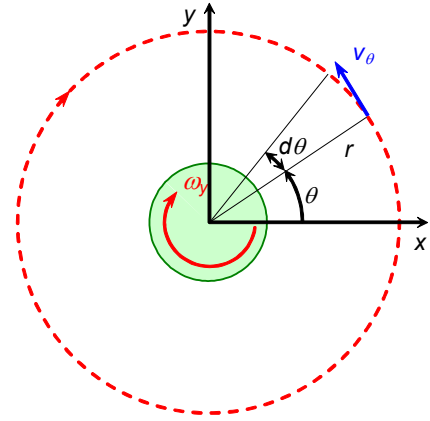
$$\Gamma = -R^2 \omega_y \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R^2 \omega_y$$

$$R^2 \omega_y = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$v_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

(2.62)

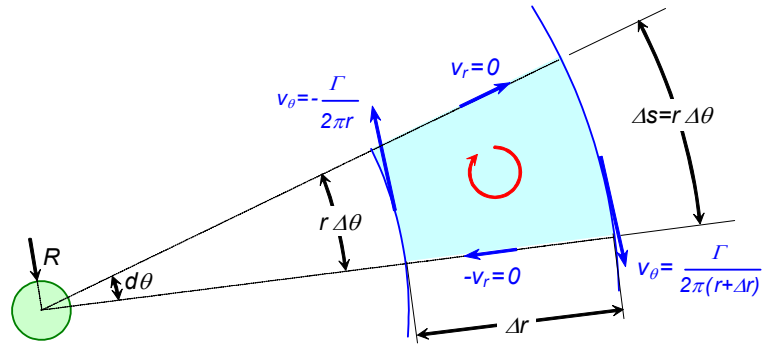
(2.63)



Vortisite

Girdap akımında görüldüğü gibi merkezini içine sonsuz küçük bir elemanı hesaplırsanız

şekilde girdap almayan akışkan vortisite



$$\Delta \vec{\zeta} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta \vec{\zeta} = 0 \cdot \Delta r + \frac{\Gamma}{2\pi(r+\Delta r)} \cdot (r+\Delta r) \Delta \theta - 0 \cdot \Delta r - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cdot r \Delta \theta \Rightarrow \Delta \vec{\zeta} = 0$$

Akım, çekirdek bölgesi hariç irrotasyoneldir.

R → 0 için bu hareket *noktasal potansiyel girdap* olarak adlandırılır

2.11 Biot-Savart kanunu

Sıkıştırılamaz bir akım alanında bir **vortisite dağılımı** bulunduğunu varsayalım. Bu vortisite dağılımının etkisiyle oluşan hız alanını hesaplamaya çalışalım.

Hız alanını bir **B** vektör alanının rotasyoneli olarak
$$\vec{V} = \nabla \times \vec{B} \quad (2.64)$$

şeklinde tanımlamak mümkündür. **B** vektörünü
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.65)$$

olacak biçimde seçelim. Böylece vortisite
$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla \times \vec{B} = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

olur. Sağdaki ilk terimin sıfır olduğu dikkate alınarak **B** vektörü için

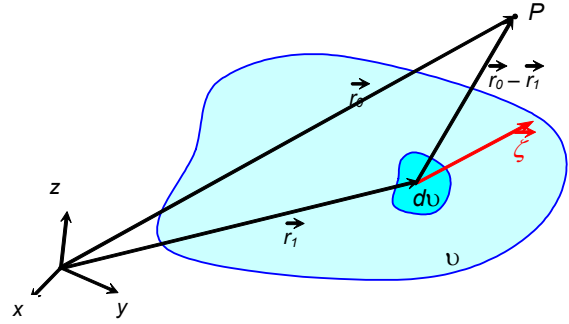
$$\vec{\zeta} = -\nabla^2 \vec{B} \quad \text{Poisson denklemi} \quad (2.66)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü Green teoremi yardımıyla,

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{\vec{\zeta}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} dv$$

olarak elde edilir (Bkz: *Karamcheti K., Principles of ideal fluid aerodynamics, 1980, p:533*).

Burada **B** büyüklüğü Şekil 2.12 de gösterilen P noktasında hesaplanmış olup, vortisitenin v kontrol hacmi içerisindeki integrasyonunun bir sonucudur.



Şekil 2.12

Hız alanı da **B** vektörünün rotasyoneli olarak

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \iiint_v \nabla \times \frac{\vec{\zeta}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} dv \quad (2.67)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi Şekil 2.13 deki gibi bir vortisite filamentinin sonsuz küçük bir parçasını dikkate alalım. Burada

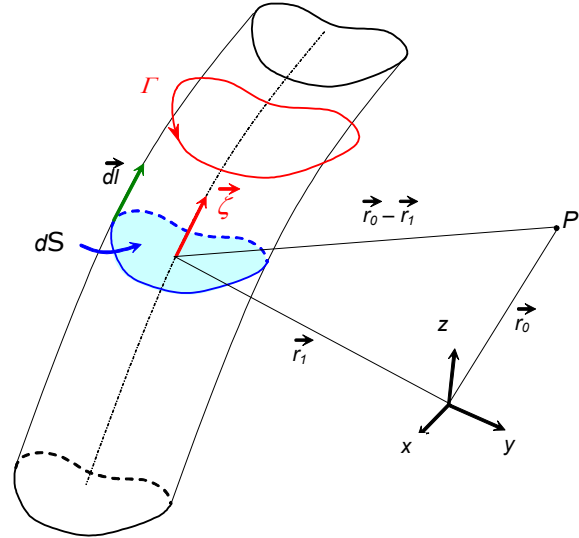
$$d\vec{l} = \frac{\vec{\zeta}}{\zeta} dl, \quad \Gamma = \zeta dS, \quad dv = dS \cdot dl$$

olup,

$$\vec{\zeta} = \zeta \frac{d\vec{l}}{dl} = \frac{\Gamma}{dS} \frac{d\vec{l}}{dl} = \Gamma \frac{d\vec{l}}{dv}$$

veya

$$\vec{\zeta} dv = \Gamma d\vec{l}$$



Şekil 2.13

yazılabilir. Böylece

$$\nabla \times \frac{\vec{\zeta}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|} d\upsilon = \nabla \times \Gamma \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|}$$

veya \mathbf{r}_l ve $d\mathbf{l}$ yi sabit tutarak rotasyonel alınırsa

$$\nabla \times \Gamma \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|} = \Gamma \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|^3}$$

ve (2.67) de kullanılarak **Biot-Savart kanunu**

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \iiint_v \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|^3} \quad (2.68)$$

veya diferansiyel biçimde

$$d\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|^3} \quad (2.68a)$$

elde edilir.

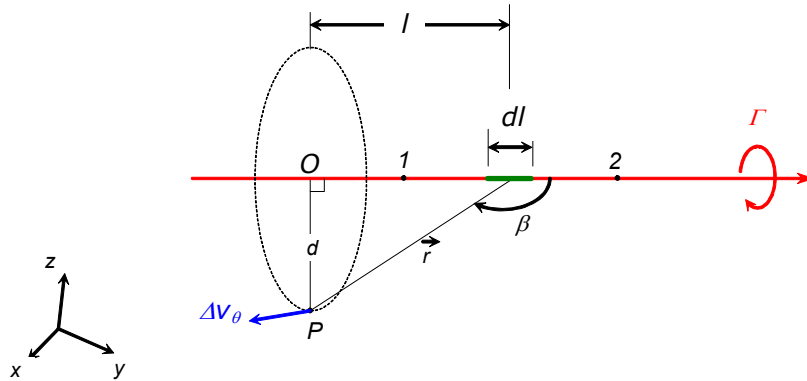
Benzeri işlemlerle vortisitinin hacimsel dağılımı için

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \iiint_v \frac{\vec{\zeta} \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_l|^3} d\upsilon \quad (2.67a)$$

elde edilebilir.

2.12 Doğrusal girdabın bir parçasının indüklemesi

Γ şiddetindeki bir doğrusal girdabın Şekil 2.14 de görüldüğü gibi 1 ve 2 ile belirtilen iki noktası arasındaki parçasının bir P noktasında indüklediği hızı hesaplamaya çalışalım.



Bu girdabın dl uzunluğundaki sonsuz küçük bir parçasının P noktasında indüklediği elementer hız Biot-Savart kanunu yardımıyla

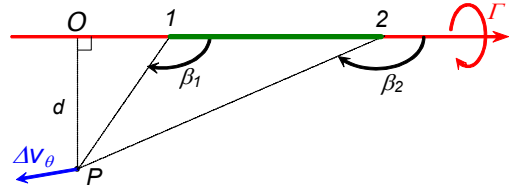
$$\Delta \vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2.68b)$$

şeklinde yazılabilir. Şayet problem girdap eksenine bağlı yeni bir silindirik koordinat sisteminde ele alınırsa P noktasında sadece bir v_θ teğetsel hız bileşeni olacağı söylenebilir. Buna göre yukarıdaki bağıntı

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl \cdot r \sin \beta \quad \text{olduğu da dikkate alınarak} \quad \boxed{\Delta v_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \beta}{r^2} dl} \quad (2.68c)$$

skaler formunda yazılabilir. Bu ifade 1 ve 2 noktaları arasında integre edilerek girdabın bu parçasının P noktasındaki toplam indüklemesi elde edilir:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sin \beta}{r^2} dl$$



Şekil 2.15

Burada β , r ve l büyüklükleri birbirine bağlı olup, bu ifade

$$d = r \sin(\pi - \beta) \quad \rightarrow \quad \boxed{r = \frac{d}{\sin \beta}}$$

$$\tan(\pi - \beta) = \frac{d}{l} \quad \rightarrow \quad l = -\frac{d}{\tan \beta} \quad \rightarrow \quad \boxed{dl = \frac{d}{\sin^2 \beta} d\beta}$$

değişken dönüşümleri yapılarak integre edilirse

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi d} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\Gamma}{4\pi d} (-\cos \beta)_{\beta_1}^{\beta_2} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi d} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)} \quad (2.69)$$

elde edilir.

Sonsuz uzun girdabın (2 boyutlu girdap) etkisi incelenmek istenirse $\beta_1=0$ ve $\beta_2=\pi$ alınarak

$$\boxed{v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi d}} \quad (2.70)$$

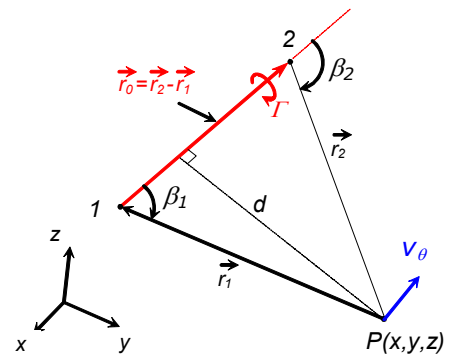
Veya yarı-sonsuz bir girdabın etkisini görmek için de, $\beta_1=\pi/2$ ve $\beta_2=\pi$ alınarak

$$\boxed{v_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi d}} \quad (2.71)$$

elde edilir.

Biot-Savart kanunu 3-boyutlu problemlerin sayısal incelenmesi için daha uygun bir biçimde yazılabilir.

Bu amaçla Şekil 2.16 da görüldüğü gibi (x,y,z) kartezyen eksen takımında 1 ve 2 noktaları arasında yer alan bir doğrusal girdap parçasının bir P noktasındaki indüklemesi incelenirse:



Şekil 2.16

d mesafesi ve β açılarının kosinüsleri için vektörel biçimde

$$d = \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\vec{r}_0|}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_1|}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_2|}$$

bağıntıları kullanılarak ve ayrıca P , 1 ve 2 noktalarının oluşturduğu düzlemin normal vektörü için

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}$$

yazılıp, girdabın indüklediği hızın bu doğrultuda olacağı dikkate alınarak Biot-Savart kanunu

$$\vec{V}_{12} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|^2} \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \quad (2.72)$$

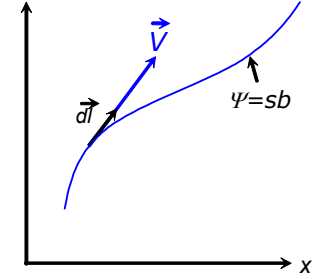
şeklinde elde edilir.

2.13 Akım fonksiyonu

İki-boyutlu bir akım alanında $\Psi(x,y)$ gibi bir akım fonksiyon tanımlamak mümkündür. Öyle ki, bu fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaları birleştiren eğriler akım çizgileri olarak tanımlanır.

Akım çizgilerinin denklemi hız vektörünün akım çizgisine teğet olma özelliğinden yararlanılarak elde edilebilir:

$$\vec{V} \parallel d\vec{l} \quad \rightarrow \quad \vec{V} \times d\vec{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}}$$



Akım fonksiyonunun değerlerini akım debisiyle ilişkilendirmek mümkündür. Bu amaçla Şekil 2.17 de görüldüğü gibi iki akım çizgisi arasından akmakta olan akışkanın hacimsel debisi $A-B$ aralığında hesaplanırsa, sıkıştırılamaz akım için

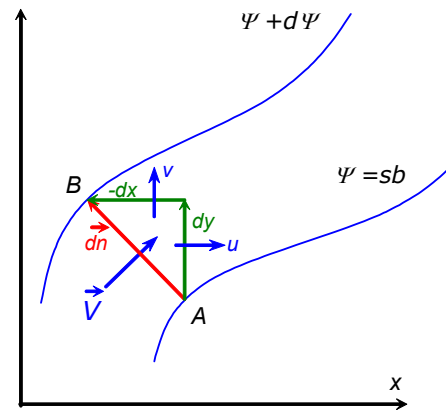
$$\vec{V} \cdot d\vec{n} = u \cdot dy - v \cdot dx \quad (2.73)$$

Akım fonksiyonlarının değerleri arasındaki fark bu debiye eşitlenerek

$$(\Psi + d\Psi) - \Psi = d\Psi = \vec{V} \cdot d\vec{n}$$

Böylece

$$d\Psi = u \cdot dy - v \cdot dx$$



Şekil 2.17

Bu fonksiyonun $\Psi(x,y)$ şeklinde x ve y koordinatlarına bağlı olduğu düşünülerek tam diferansiyeli tanımlanırsa

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy$$

Bu iki bağıntı karşılaştırılarak

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (2.74)$$

elde edilir.

Akım fonksiyonu için bulunan bu bağıntılar süreklilik denkleminde kullanılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} = 0 \quad (2.77)$$

şeklinde süreklilik denkleminin kendiliğinden sağlandığı görülür.

Akım fonksiyonunun [viskoz akışlar için de geçerli](#) olduğunu belirtmekte yarar vardır.

Akımın irrotasyonel olması halinde $\nabla \times \vec{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Hız bileşenleri bu bağıntıda kullanılarak

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \downarrow$$

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad (2.78)$$

Şeklinde akım fonksiyonu için yazılmış Laplace denklemi elde edilir.

Polar koordinatlarda

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

İki boyutlu akımda [hız vektörünü akım fonksiyonu cinsinden](#) ifade etmek mümkündür:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \vec{j}$$

$$= \frac{\partial\Psi}{\partial y} (-\vec{k} \times \vec{j}) - \frac{\partial\Psi}{\partial x} (\vec{k} \times \vec{i}) = -\vec{k} \times \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \vec{i} \right)$$

$$\vec{V} = -\vec{k} \times \nabla\Psi \quad (2.79)$$

Polar koordinatlarda

$$\vec{V} = -\vec{e}_x \times \nabla\Psi$$

Gradyant operatörü

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \downarrow$$

$$\vec{V} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\vec{e}_r$$

Böylece hız bileşenleri

$$v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad (2.80)$$

Potansiyel fonksiyonu – Akım fonksiyonu ilişkisi (Cauchy-Riemann şartları)

Kartezyen koordinatlarda

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (2.81)$$

Polar koordinatlarda

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad (2.82)$$