

## YAYINIM PROBLEMLERİ İÇİN SONLU HACİMLER YÖNTEMİ (\*)

### 4.1. Giriş:

Bu bölümde Sonlu Hacimler Yöntemlerinin (SHY) yayılım problemlerine farklı şartlar ve sınır koşullarında nasıl uygulanabileceği gösterilecektir. Bu bağlamda akışı ve ısı transferini yöneten denklemlerin nasıl ayrıklaştırılacağı ve nasıl çözümleneceği ana hatlarıyla incelenecektir.

Taşıyım denklemi genel halde

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi U) = \nabla(\Gamma \nabla\phi) + S_\phi$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\Gamma$  difüzyon katsayısı,  $S_\phi$  de kaynak terimi olarak adlandırılmaktadır.

Zamandan bağımsız (daimi) ve taşıyım (konveksiyon) içermeyen problemler yayılım (difüzyon) problemi olarak nitelendirilir ve yukarıdaki denklem

$$\nabla(\Gamma \nabla\phi) + S_\phi = 0 \quad (4.1)$$

şekline gelir. Sonlu hacimler yöntemi için bu denklem bir kontrol hacmi içinde integre edilerek;

$$\iiint_{\Delta V} \nabla(\Gamma \nabla\phi) dV + \iiint_{\Delta V} S_\phi dV = 0 \quad (4.2a)$$

elde edilir.

Öte yandan diverjans teoremi, herhangi bir  $\vec{a}$  vektörel büyüklüğü için yazılmış hacim integrali ile alan integrali arasında

$$\iiint_{\Delta V} \nabla \vec{a} dV = \iint_A \vec{a} \cdot \vec{n} dA$$

şeklinde bir ilişki olduğunu belirtir. Diverjans teoremi uygulanarak (4.2a) denklemi

$$\iint_A (\Gamma \nabla\phi) \vec{n} dA + \iiint_{\Delta V} S_\phi dV = 0 \quad (4.2b)$$

şekline gelir.

### 4.2. Daimi Bir Boyutlu Difüzyon Denklemi İçin Sonlu Hacimler Yöntemi

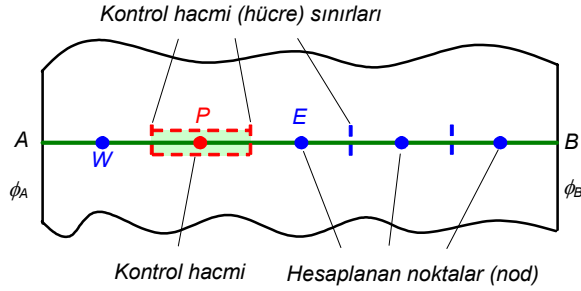
Şekil 4.1 de gösterilen AB doğru parçası üzerinde bir  $\phi$  büyüklüğünün daimi haldeki bir-boyutlu difüzyon problemini göz önüne alalım. Bu problem için (4.1) denklemi

---

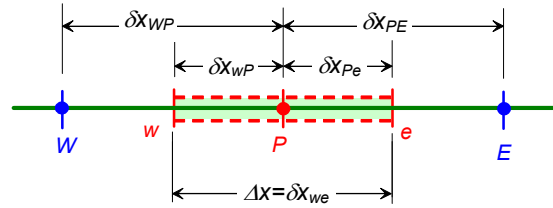
\* H.K. Versteeg and W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method, Longman, 1995

$$\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.3)$$

şekline gelir. Burada  $\Gamma$  difüzyon katsayısı ve  $S$  de kaynak terimidir. Genel olarak,  $A$  ve  $B$  sınırlarında  $\phi$  büyüklüğünün sınır değerleri bilinir ve çizgi boyunca  $\phi$  büyüklüğünün değerlerinin hesaplanması beklenir. Bu konu için tipik bir örnek bir çubuk boyunca bir-boyutlu ısı iletimi problemi olup, örnek ayrıntılı olarak Bölüm 4.3 de incelenecektir.



Şekil 4.1



Şekil 4.2

Şimdi (4.3) denkleminin SHM ile çözümünü adım adım izleyelim:

### **1.Adım: Ağ yapısı Oluşturma**

Sonlu hacim yöntemlerinde ilk adım çözüm bölgesinin ayrı kontrol hacimlerine (hücre) bölünmesidir. Bu amaçla  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki bölgede çeşitli kontrol noktaları alalım. Kontrol hacimlerinin sınırları (veya yüzleri) ardarda gelen noktalar arasındaki orta noktalar olacaktır. Böylece her bir kontrol noktası bir kontrol hacmiyle çevrelenmiş olacaktır. Hesap havzasının sınırlarına komşu hücre sınırlarının fiziksel sınırlarla çakışık alınması uygun olur.

Bu aşamada ilerideki formülasyonun rahat izlenebilmesi için uygun bir isimlendirme ve indisleme sisteminin ortaya konulmasında yarar bulunmaktadır. CFD yöntemlerindeki alışlagelmış uygulama Şekil 4.2 de görülmektedir. Buna göre göz önüne alınan bir kontrol noktası  $P$  ile, bunun solundaki (batısındaki) ve sağındaki (doğusundaki) kontrol noktaları sırasıyla  $W$  ve  $E$  olarak,  $P$  yi çevreleyen kontrol hacminin sol (batı) sınırı  $w$  ve sağ sınırı da  $e$  ile adlandırılmaktadır. Noktalar ve sınırlar arasındaki mesafeler ayrıca şekil üzerinde belirtilmiştir.

### **2.Adım: Denklemin Ayrıklaştırılması**

Sonlu Hacim Yönteminin esası olarak nitelendirilebilecek ikinci adım, problemi yöneten denklemin (veya denklemlerin),  $P$  kontrol noktasında ayrıklaştırılmış bir denklem elde etmek üzere bir kontrol hacmi üzerinde integre edilmesidir.

Yukarıda belirtilen kontrol hacmi içinde (4.3) denklemi integre edilirse

$$\iiint_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \iiint_{\Delta V} S \Delta V = 0$$

Diverjans teoremi uygulanarak

$$\iint_A \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dA + \iiint_{\Delta V} S \Delta V = 0$$

ve integraller hesaplanarak

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada  $\Delta V$  hücrenin hacmini,  $\bar{S}$  kaynak büyüklüğünün bu hacim içerisindeki ortalama değerini (birim hacim başına ortalama değer),  $A$  ise hücre sınırının alanını belirtmektedir.

Sonlu Hacimler Yönteminin çok önemli bir özelliği, ayrıklaştırılmış denklemin fiziksel bir yorum yapmaya imkan vermesidir. Nitekim (4.4) denkleminde bakıldığında ilk iki terimin  $\phi$  büyüklüğüne ilişkin yayımsal akılar olduğu, bu akılar arasındaki farkın (çıkan akı - giren akı) kontrol hacmi içerisinde üretilen  $\phi$  büyüklüğü miktarına (üçüncü terim) eşit olduğunu açık bir şekilde görmek mümkündür. Yani bu denklem  $\phi$  büyüklüğü için bu kontrol hacmi (hücre) içerisinde yazılmış bir denge denklemdir.

(4.4) denkleminde yararlanabilmek için  $\Gamma$  difüzyon katsayısıyla  $d\phi/dx$  türevinin hücre sınırlarındaki değerlerinin bilinmesi gerekir. *Uygulamada genel olarak  $\phi$  büyüklüğü ve difüzyon katsayısı kontrol noktalarında bilinmekte veya hesaplanmaktadır.* Buna göre *hücre sınırlarında gereken büyüklükler interpolasyon yoluyla elde edilebilir.* Bunun için belirtilen büyüklüklerin kontrol noktaları arasındaki dağılımları için bir yaklaşım yapmak gerekir. En basit yol lineer yaklaşım olup, bu yaklaşım pratikte *merkezi farklandırma* olarak bilinir. Üniform bir ağ yapısında lineer interpolasyon kullanılarak hücre sınırlarındaki difüzyon katsayıları için

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \quad (4.5a)$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \quad (4.5b)$$

ve yayımsal akı terimleri için de

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \quad (4.6a)$$

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \quad (4.6b)$$

yazılabilir. İleride de gösterileceği gibi *S kaynak terimi* bazı hallerde *bağımlı değişkenin bir fonksiyonu olabilir.* Bu gibi durumlarda kaynak terimi *lineer bir yaklaşımla*

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \phi_P \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(4.6), (4.7) ve (4.8) bağıntıları (4.4) denkleminde kullanılarak

$$\Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + S_u + S_P \phi_P = 0 \quad (4.9)$$

veya  $\phi$  büyüklüğüne göre bir düzenleme yapılarak

$$\left(-\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p\right) \phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) \phi_E = S_u \quad (4.10)$$

veya

$$a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E = S_u \quad (4.11a)$$

elde edilir. Burada geçen katsayılar

$$a_W = -\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w, \quad a_E = -\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_p) \quad (4.11b)$$

olup,  $S_u$  ve  $S_p$  'nin değerleri (4.8) ile verilen kaynak modelinden elde edilebilir.

(4.11) ve (4.8) bağıntıları (4.4) denkleminin ayrıklaştırılmış formunu teşkil etmektedir. Bu tipten ayrıklaştırılmış denklemler diğer bütün geliştirmelerin esasını teşkil etmektedir.

### **3.Adım: Denklemlerin çözümü**

Problemin çözülebilmesi için (4.11) formundaki denklemlerin bütün kontrol noktalarında kurulması gerekir. Çözüm havzası sınırındaki kontrol hacimleri için (4.11) denklemini sınır koşullarını da içerecek şekilde düzenlenmelidir. Sonuç olarak ortaya çıkan lineer denklem takımı çözülerek  $\phi$  büyüklüğünün kontrol noktalarındaki değerleri elde edilir. Bölüm 7 de özellikle CFD problemlerinde kullanılmak üzere geliştirilmiş matris çözüm tekniklerine yer verilecektir. Farklı tipteki sınır koşulları ile ilgilenen teknikler Bölüm 9 da ayrıntılı olarak incelenecektir.

### **4.3. Çalışılmış örnekler: Daimi bir-boyutlu difüzyon**

Bu bölümde, sonlu hacimler yönteminin ısı iletimi içeren basit difüzyon problemlerinin çözümüne uygulanması gösterilecektir.

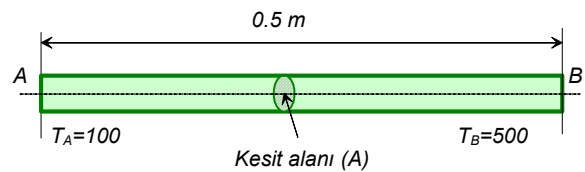
Daimi bir-boyutlu ısı iletimi olayı için (4.3) denklemini

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki  $k$  ısı iletimi katsayısı (4.3) denklemindeki  $\Gamma$  büyüklüğünün yerini almakta olup, bağımlı değişken de  $T$  sıcaklığıdır. Kaynak terimi, örneğin, çubuktan geçen bir elektrik akımının yarattığı ısı üretimi olabilir. Sınır koşullarının ele alınışı ve kaynak teriminin incelenmesi üç örnek problem yardımıyla izah edilecektir.

#### **Örnek 4.1:**

*Uç noktalarındaki sıcaklık sırasıyla 100°C ve 500°C olan 0.5 m boyundaki izole edilmiş bir çubuğun ısı iletkenlik katsayısı  $k=1000 \text{ W/mK}$  ve dik kesit alanı  $A=10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  dir. Daimi halde çubuk boyunca sıcaklık dağılımını bulunuz.*



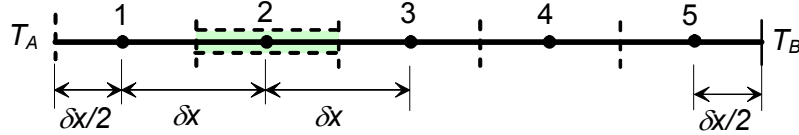
Şekil 4.3

**Çözüm:**

Bu problemde kaynak terimi bulunmayıp (4.12) denklemi

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (4.13)$$

şekline gelir. Çubuk Şekil 4.4 de görüldüğü gibi eşit büyüklükte 5 hücreye bölünürse hücre boyları  $\delta x = 0.1 m$  olur.



Şekil 4.4

Bu ağ sisteminde 5 kontrol noktası mevcut olup 2, 3 ve 4 numaralı kontrol noktaları iç hücrelerde 1 ve 5 numaralı kontrol noktaları ise sınır hücrelerde yer almaktadır. İç hücreler ve sınır hücreler için ayrılaştırılmış denklemlerin farklı şekilde düzenlenmesi gerekmektedir.

İç hücrelerde ayrıştırma

İç hücrelerin herbirinin solunda ve sağında birer komşu hücre bulunmakta olup sıcaklıkların komşu hücrelerin kontrol noktalarında tanımlanan değerleri bilinmemektedir. (4.10) ayrıştırılmış denklemi bu noktaları içine alan hücreler için

$$\left( \frac{k_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) T_W + \left( \frac{k_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{k_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) T_P + \left( \frac{k_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) T_E = 0 \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bütün çubuk boyunca ısı iletkenlik katsayısı  $k_e = k_w = k = sb$ , nokta aralıkları  $\delta x = sb$  ve kesit alanları  $A_e = A_w = A = sb$  olup, böylece 2, 3 ve 4 noktaları için ayrıştırılmış denklemler

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = 0} \quad (4.15a)$$

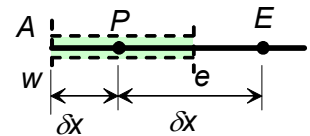
şekline gelir. Burada,

$$\boxed{a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E)} \quad (4.15b)$$

Soldaki sınır hücresinde ayrıştırma

(4.13) denklemi 1 noktasını içeren sınır hücresinde integre edilirse

$$kA \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - kA \left( \frac{T_P - T_A}{\delta x / 2} \right) = 0 \quad (4.16)$$



elde edilir. Burada hücrenin A sınırından geçen akının A ve P noktaları arasında lineer bir sıcaklık değişimi olduğu kabulüyle hesaplandığı belirtilmelidir. Denklem sıcaklıklar için

$$\left(-\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P\right) \phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) \phi_E = S_u \quad (4.10)$$

denklemindeki sıralamaya benzer bir biçimde düzenlenirse,

$$-0 \cdot T_W + \left(0 + \frac{k}{\delta x} A + \frac{2k}{\delta x} A\right) T_P + \left(-\frac{k}{\delta x} A\right) T_E = \left(\frac{2k}{\delta x} A\right) T_A \quad (4.17)$$

şekline gelir. Burada TA sınır koşulu olarak bilindiğinden denklemin sağına, sanki bir kaynak terimi imiş gibi aktarılmıştır. Ayrıca hücrenin batı tarafında bir  $T_W$  bilinmeyişi olmadığı için bunun katsayısı sıfır yapılmıştır. Böylece 1 noktası için ayrıklaştırılmış denklemler

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u} \quad (4.18a)$$

şeklinde düzenlenirken, bu denklem için (4.11b) ve (4.15b) de tanımlanan katsayıların sırasıyla

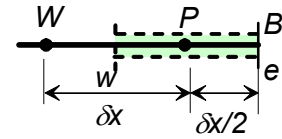
$$\boxed{a_W = 0, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_A} \quad (4.18b)$$

olacağı görülmektedir.

#### Sağdaki sınır hücresinde ayrıklaştırma

5 noktasını içeren hücre için benzeri inceleme yapılırsa, 5 noktasıyla B sınırı arasında yine lineer bir sıcaklık dağılımı kabulü ile ayrıklaştırılmış denklemler

$$kA \left(\frac{T_B - T_P}{\delta x / 2}\right) - kA \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x}\right) = 0 \quad (4.19)$$



şeklinde elde edilir. Denklem sıcaklıklar için düzenlenerek,

$$\left(-\frac{k}{\delta x} A\right) T_W + \left(\frac{k}{\delta x} A + 0 + \frac{2k}{\delta x} A\right) T_P + 0 \cdot T_E = \left(\frac{2k}{\delta x} A\right) T_B \quad (4.20)$$

ve standart forma sokularak

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u} \quad (4.21a)$$

elde edilir. Burada

$$\boxed{a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_B} \quad (4.21b)$$

dir.

Böylece ayrıklaştırma işlemleri her bir kontrol noktası için bir denklem vermiştir. Bu denklem sistemi özet olarak

$$\boxed{a_{W_i} T_{W_i} + a_{P_i} T_{P_i} + a_{E_i} T_{E_i} = S_{u_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5}$$

şeklinde olup buradaki katsayılar da aşağıdaki gibidir.

$$i=1 \quad a_W = 0, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_A$$

$$i=2,3,4 \quad a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E), \quad S_P = 0, \quad S_u = 0$$

$$i=5 \quad a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_B$$

Problemde örnek olarak verilen sayısal değerler kullanılarak,  $kA/\delta x = 100$  elde edilir. Bu değer de yukarıda elde edilen bağıntılarda kullanılarak tüm kontrol noktaları ayrıklaştırılmış denklemlerin katsayıları sayısal olarak elde edilebilir. Bu değerler Tablo 4.1 de sunulmuştur.

Tablo 4.1

Hücre No	$a_W$	$a_P = -(a_W + a_E + S_P)$	$a_E$	$S_P$	$S_u$
1	0	300	-100	-200	200 $T_A$
2	-100	200	-100	0	0
3	-100	200	-100	0	0
4	-100	200	-100	0	0
5	-100	300	0	-200	200 $T_B$

Bu örnekte ortaya çıkan bütün denklemler açık biçimde yazılırsa

$$\begin{aligned}
 300 T_1 - 100 T_2 &= 200 T_A \\
 -100 T_1 + 200 T_2 - 100 T_3 &= 0 \\
 -100 T_2 + 200 T_3 - 100 T_4 &= 0 \\
 -100 T_3 + 200 T_4 - 100 T_5 &= 0 \\
 -100 T_4 + 300 T_5 &= 200 T_B
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

ve matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{bmatrix}
 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\
 -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\
 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\
 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\
 0 & 0 & 0 & -100 & 300
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 200 T_A \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 200 T_B
 \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

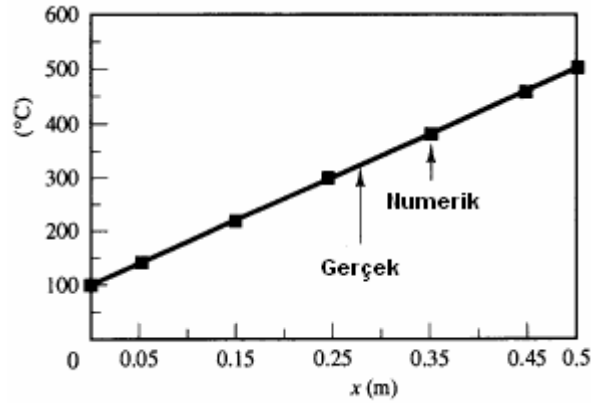
şeklinde düzenlenebilir.

Yukarıdaki denklem sistemi çözüldüğü takdirde incelenen problem için daimi haldeki sıcaklık dağılımını verir. Az sayıda nokta içeren basit problemler halinde elde edilen denklem takımı MATLAB gibi bir yazılımla veya *Gauss yok etme yöntemi*yle kolaylıkla çözülebilir. Denklem sayısının çok olması halinde ise üç-diyagonal matris sistemleri için

daha uygun olan Thomas yöntemi ile çözülebilir.  $T_A=100$  ve  $T_B=500$  için denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Denklemin analitik çözümü ise,  $T = 800x + 100$  şeklinde olup Şekil 4.5 de görüldüğü gibi analitik ve sayısal çözümler çakışmaktadır.



Şekil 4.5

### Örnek 4.2:

Şimdi sınır şartlarının verdiği terimler haricinde ayrıca kaynak terimi içeren bir örnek problemi ele alalım.

Şekil 4.6 da görülen  $L=2\text{ cm}$  kalınlığındaki levhanın ısı iletkenliği sabit olup  $k=0.5\text{ W/mK}$  olarak verilmiştir. Levhanın her yerinde  $q=1000\text{ kW/m}^3$  olmak üzere üniform bir ısı üretimi mevcuttur. A ve B yüzlerinin sıcaklıkları sırasıyla  $100^\circ\text{C}$  ve  $200^\circ\text{C}$  dir. Levhanın y ve z doğrultusundaki uzunlukları çok büyük olup, sadece x doğrultusundaki sıcaklık gradyanları önemlidir.

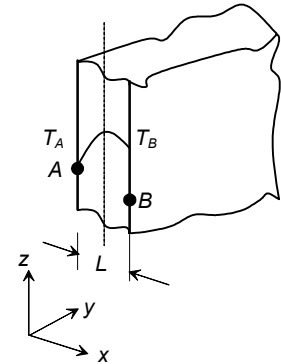
Buna göre daimi haldeki sıcaklık dağılımını hesaplayarak sayısal sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırınız

### Çözüm:

Bu defa problemi yöneten denklem bir kaynak terimi içermekte olup

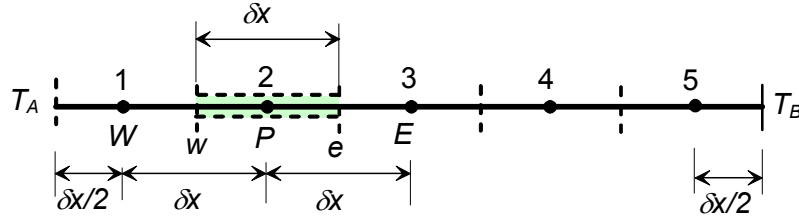
$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + q = 0 \quad (4.25)$$

şeklindedir. Çözüm daha önce olduğu gibi basit bir ağ yapısı kullanarak gösterilecektir. y-z düzleminde birim alan dikkate alarak Şekil 4.7 de gösterildiği gibi  $\delta x=0.004\text{ m}$  olmak üzere 5 hücre kullanalım.



Şekil 4.6





Şekil 4.7

(4.25) denklemi bir *ic hücre* üzerinde integre edilerek;

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} q dV = 0 \quad (4.26)$$

yazılabilir. Buradaki ilk terim ilk örnekte olduğu gibi incelenecektir. Kaynak terimini içeren ikinci integral ise her bir kontrol hacminde  $\bar{S} \Delta V = q \Delta V$  şeklinde ortalama alınarak hesaplanacaktır. Böylece (4.26) denklemi

$$\left[ \left( kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q \Delta V = 0 \quad (4.27)$$

$$\left[ k_e A \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - k_w A \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] + qA \delta x = 0 \quad (4.28)$$

şekline gelir. Denklem sıcaklıklar için düzenlenirse

$$\left( \frac{k_e A}{\delta x} + \frac{k_w A}{\delta x} \right) T_P = \left( \frac{k_w A}{\delta x} \right) T_W + \left( \frac{k_e A}{\delta x} \right) T_E + qA \delta x \quad (4.29)$$

veya katsayılar cinsinden yazılırsa

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u} \quad (4.30a)$$

şekline gelir. Burada; ( $k_e = k_w = k$ ) olmak üzere katsayılar

$$\boxed{a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = 0, \quad S_u = qA \delta x} \quad (4.30b)$$

1 noktasını içeren *soldaki sınır hücresinde* (4.25) denklemi integre edilerek

$$\left[ \left( kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q \Delta V = 0 \quad (4.31)$$

Kontrol noktasıyla sınır yüzeyi arasında yine lineer bir sıcaklık dağılımı kabulü ile

$$\left[ k_e A \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - k_A A \left( \frac{T_P - T_A}{\delta x / 2} \right) \right] + qA \delta x = 0 \quad (4.32)$$

sıcaklıklar için standart formda düzenlenerek

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u} \quad (4.33a)$$

şekline gelir. Burada; ( $k_e = k_w = k$ ) olmak üzere katsayılar

$$\boxed{a_W = 0, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_A} \quad (4.33b)$$

5 noktasını içeren [sağdaki sınır hücresinde](#) sınır hücresinde (4.25) denklemini integre edilerek ve kontrol noktasıyla sınır yüzeyi arasında yine lineer bir sıcaklık dağılımı kabulü yapılarak

$$\left[ \left( kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q\Delta V = 0 \quad (4.34)$$

$$\left[ k_B A \left( \frac{T_B - T_P}{\delta x / 2} \right) - k_w A \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] + qA\delta x = 0 \quad (4.35)$$

katsayılar cinsinden yazılarak

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u} \quad (4.36a)$$

elde edilir.. Burada; ( $k_e = k_w = k$ ) olmak üzere katsayılar

$$\boxed{a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_B} \quad (4.36b)$$

şeklindedir.

Problemde  $A=1$ ,  $k=0.5 \text{ W/mK}$ ,  $q=1000 \text{ kW/m}^3$ ,  $\delta x=0.004 \text{ m}$  olarak verilen sayısal değerler kullanılarak bütün katsayılar hesaplanırsa Tablo 4.2 deki değerler elde edilmektedir.

Tablo 4.2

Nokta	$S_P$	$a_W$	$a_P = a_W + a_E - S_P$	$a_E$	$S_u$
1	-250	0	375	-125	$4000 + 250T_A$
2	0	-125	250	-125	4000
3	0	-125	250	-125	4000
4	0	-125	250	-125	4000
5	-250	-125	375	0	$4000 + 250T_B$

Denklem sistemi matris formda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 54000 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

çözüm,

$$\{T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5\} = \{150 \ 218 \ 254 \ 258 \ 230\} \quad (4.38)$$

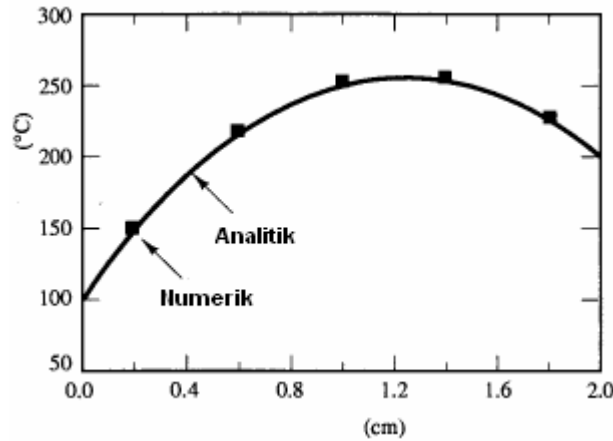
şeklinde elde edilir. Denklemin analitik çözümü de (4.25) denklemini integre edilerek

$$T = \left[ \frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A \quad (4.39)$$

şeklinde elde edilebilir. SHY sonuçlarının analitik sonuçlarla karşılaştırılması Tablo 4.3 ve Şekil 4.8 de yer almaktadır. Görüldüğü gibi sadece 5 gibi az sayıda nokta alınmasına rağmen sonuçların uyumu çok iyidir.

Tablo 4.3:

Nokta	1	2	3	4	5
$x(m)$	0.002	0.006	0.01	0.014	0.018
Nümerik sonuç	150	218	254	258	230
Analitik sonuç	146	214	250	254	226
Yüzde hata	2.73	1.86	1.60	1.57	176



Şekil 4.8

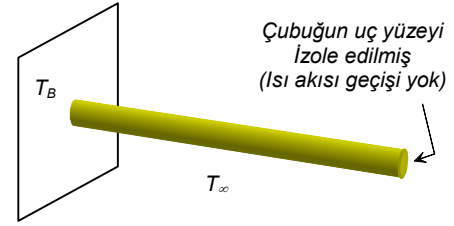
### Örnek 4.2:

*Sonuncu örnekte dairesel kesitli bir finin taşınım yoluyla soğutulması problemi incelenecektir. Taşınım nedeniyle sıcaklığa bağlı bir ısı kaybı söz konusu olacak ve bu nedenle olayı modelleyen denklemde bir kuyu terimi yer alacaktır.*

Şekil 4.9 da gösterildiği gibi dik kesit alanı  $A=Sb$ , boyu  $L=1\text{ m}$  olan silindirik fini dikkate alalım. Çevre ortam sıcaklığı  $20^\circ\text{C}$ , fin tabanında sıcaklık  $T_B=100^\circ\text{C}$ , ve fin uç yüzeyi izole edilmiş olsun.

Fin boyunca sıcaklık dağılımını hesaplayınız ve sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırınız. Analitik çözüm

$$\frac{T - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)}$$



Şekil 4.9

şeklinde verilmekte olup burada  $x$  büyüklüğü fin tabanından uzaklıkları belirtmektedir. Ayrıca  $n^2=hp/(kA)$  olup  $n^2=25\text{ m}^{-2}$  ve  $kA=Sb$  alınacaktır. Burada da  $h$  büyüklüğü ısı iletim katsayısını,  $P$  ise çevre uzunluğunu göstermektedir.

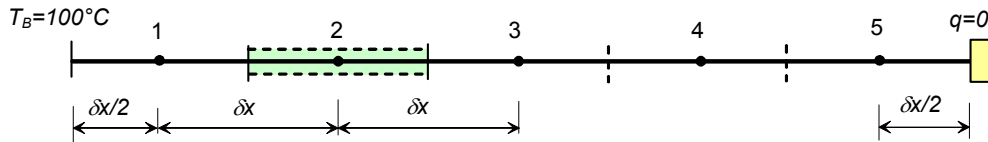
### Çözüm:

Bu örnekteki problemi modelleyen denklem

$$\frac{d}{dx} \left( kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0 \quad (4.40)$$

şeklinde olup, denklemde taşınım ile ısı kaybından kaynaklanan ve yerel  $T$  sıcaklığının fonksiyonu olan  $-hP(T - T_\infty)$  şeklinde bir kuyu terimi bulunmaktadır.

Çözüm için Şekil 4.10 da görüldüğü gibi eşit uzunlukta 5 hücre alınırsa hücre boyları  $\delta x=0.5\text{ m}$  olur.



Şekil 4.10

$kA = Sb$  olduğu için (4.40) denklemi,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) - n^2(T - T_\infty) = 0 \quad (4.42)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $n^2=hp/(kA)$  dır. Bu denklem bir kontrol hacmi üzerinde integre edilerek,

$$\iiint_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) dV - \iiint_{\Delta V} n^2(T - T_\infty) dV = 0 \quad (4.43)$$

elde edilir. Buradaki ilk terim daha önceki örneklerde olduğu gibi hesaplanacaktır. Kaynak teriminden kaynaklanan ikinci integral de, her bir kontrol hacminin içinde integrandın sabit olduğu kabul edilerek hesaplanırsa, (4.43) denklemi

$$\left[ \left( A \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( A \frac{dT}{dx} \right)_w \right] - [n^2 (T_P - T_\infty) A \delta x] = 0$$

veya bütün terimler  $A$  kesit alanıyla bölünerek,

$$\left[ \left( \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \frac{dT}{dx} \right)_w \right] - [n^2 (T_P - T_\infty) \delta x] = 0$$

şekline gelir.

### İç hücreler için ayrıklaştırma:

Sıcaklık gradyanları lineer bir yaklaşımla ayrıklaştırılarak

$$\left[ \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2 (T_P - T_\infty) \delta x] = 0 \quad (4.44)$$

ve sıcaklıklar için düzenleme yapılarak,

$$\left( \frac{1}{\delta x} + \frac{1}{\delta x} \right) T_P = \left( \frac{1}{\delta x} \right) T_W + \left( \frac{1}{\delta x} \right) T_E + n^2 \delta x T_\infty - n^2 \delta x T_P \quad (4.45)$$

veya katsayılarla yazılarak,

$$\boxed{a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u} \quad (4.46a)$$

elde edilir.. Buradaki katsayılar

$$\boxed{a_W = -\frac{l}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{l}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -n^2 \delta x, \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty} \quad (4.46b)$$

dir.

### Soldaki sınır hücresinde ayrıklaştırma

1 nolu hücrenin batı sınırında sıcaklık belirlenmiş sabit bir değerde kalacaktır. İlk örnekte olduğu gibi ayrıklaştırma yapılarak

$$\left[ \left( \frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left( \frac{T_P - T_B}{\delta x / 2} \right) \right] - [n^2 (T_P - T_\infty) \delta x] = 0$$

ve sıcaklıklara göre düzenleme yapılarak katsayılar,

$$\boxed{a_W = 0, \quad a_E = -\frac{l}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -n^2 \delta x - \frac{2}{\delta x}, \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty + \frac{2}{\delta x} T_B} \quad (4.47)$$

şeklinde elde edilir.

Sağdaki sınır hücresinde ayrıklaştırma

5 nolu hücrenin doğu sınırı izole edilmiş olduğundan bu sınırdan geçen akı sıfır olacaktır. Buna göre denklem

$$\left[ 0 - \left( \frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2(T_P - T_\infty)\delta x] = 0$$

şeklinde yazılıp sıcaklıklara göre düzenlenirse katsayılar,

$$a_W = -\frac{I}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -n^2\delta x, \quad S_u = n^2\delta x T_\infty \quad (4.48)$$

şeklinde elde edilir.

Problemde verilen sayısal değerler yerine konulduğu takdirde bütün hücreler için denklemlerin katsayıları Tablo 4.4 de gösterildiği gibi elde edilmektedir:

Tablo 4.4:

Nokta	$S_P$	$a_W$	$a_P = a_W + a_E - S_P$	$a_E$	$S_u$
1	-15	0	20	-5	$100 + 10T_B$
2	-5	-5	15	-5	100
3	-5	-5	15	-5	100
4	-5	-5	15	-5	100
5	-5	-5	10	0	100

Denklem sistemi matris formda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

çözüm,

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 21.30 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

olarak elde edilir. Bulunan bu sayısal değerler Tablo 4.5 de (4.41) bağıntısından elde edilen bulunan analitik değerlerle karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.5:

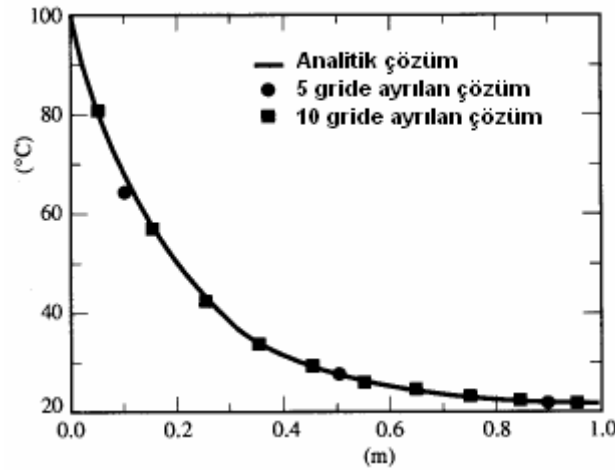
Nokta	$x(m)$	Sonlu hacim sonucu	Analitik sonuç	Fark	Yüzde hata
1	0.1	64.22	68.52	4.30	6.27
2	0.3	36.91	37.86	0.95	2.51
3	0.5	26.50	26.61	0.11	0.41
4	0.7	22.60	22.53	-0.07	-0.31
5	0.9	21.30	21.21	-0.09	-0.42

Görüldüğü gibi en büyük oransal hata %6 mertebesindedir. Sayısal çözümlerde kullanılan ağın kaba olduğu dikkate alınarak bu hata doğal karşılanmalıdır.

Daha sıkı bir ağ kullanılarak sayısal çözüm iyileştirilebilir. Aynı problemi bir defa da çubuk boyunca 10 hücre alarak çözelim. Bu defa hücre boyları  $\Delta x=0.1 m$  olacak ve ayrıklaştırılmış denklemler aynı olmakla birlikte, elde edilen lineer denklem sayısı ve katsayıları farklı olacaktır. Bu ikinci hesaplama ile elde edilen sayısal çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırması Tablo 4.6 ve Şekil 4.11 de yer almaktadır. Bu kez sayısal çözümler analitik çözümlerle daha uyumlu olup en büyük oransal hata %2 mertebesine inmiştir.

Tablo 4.6

Nokta	$x(m)$	Sonlu hacim sonucu	Analitik sonuç	Fark	Yüzde hata
1	0.05	80.59	82.31	1.72	2.08
2	0.15	56.94	57.79	0.85	1.47
3	0.25	42.53	42.93	0.40	0.93
4	0.35	33.74	33.92	0.18	0.53
5	0.45	28.40	28.46	0.06	0.21
6	0.55	25.16	25.17	0.01	0.03
7	0.65	23.21	23.19	-0.02	-0.08
8	0.75	22.06	22.03	-0.03	-0.13
9	0.85	21.47	21.39	-0.08	-0.37
10	0.95	21.13	21.11	-0.02	-0.09



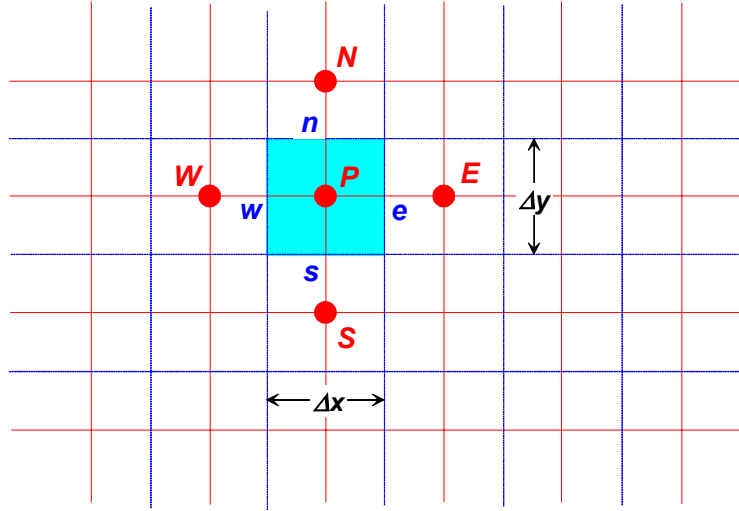
Şekil 4.11

#### 4.4. İki-boyutlu difüzyon problemleri için sonlu hacimler yöntemi

Bir boyutlu halde ayrıklaştırılmış denklemlerin üretilmesinde kullanılan yöntem kolaylıkla iki boyutlu problemler için de genişletilebilir. Tekniği göstermek için daimi iki-boyutlu difüzyon denklemini ele alalım:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (4.51)$$

Ayrıklaştırma için kullanılan iki-boyutlu ağ yapısının bir kısmı Şekil 4.12 de görülmektedir.



Şekil 4.12

$P$  ile gösterilen genel bir ağ noktası için doğu ( $E$ ) ve batı ( $W$ ) komşu noktalar yanında artık kuzey ( $N$ ) ve güney ( $S$ ) noktaları da kullanılacaktır. Sınır yüzeyleri ve hücre boyutları için bir-boyutlu haldeki tanımlamaların benzeri kullanılacaktır. Yukarıdaki denklem bir kontrol hacmi içerisinde  $dV = dx \cdot dy \cdot 1$  olduğu da hatırlanarak kontrol hacmi üzerinde integre edilirse,

$$\iint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \cdot dy + \iint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx \cdot dy + \iint_{\Delta V} S_{\phi} dV = 0 \quad (4.52)$$

Sınır yüzeylerinin alanları  $A_e = A_w = \Delta x$  ve  $A_n = A_s = \Delta y$  olup ayrıklaştırma sonucu

$$\left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4.53)$$

elde edilir.

Daha önce de belirtildiği gibi bu denklem bir kontrol hacmi için  $\phi$  üretimi ile hücre duvarlarından geçen akılar arasındaki dengeyi ifade etmektedir. Önceki bölümlerde tanımlanan yaklaşımlar kullanılarak hücre duvarlarından geçen akılar için aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\text{Batı yüzeyinden geçen akı} = \Gamma_w A_w \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \quad (4.54a)$$



$$\text{Doğu yüzeyinden geçen akı} = \Gamma_e A_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (4.54b)$$

$$\text{Güney yüzeyinden geçen akı} = \Gamma_s A_s \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_s = \Gamma_s A_s \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}} \right) \quad (4.54c)$$

$$\text{Kuzey yüzeyinden geçen akı} = \Gamma_n A_n \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_n = \Gamma_n A_n \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}} \right) \quad (4.54d)$$

Bu ifadeler (4.53) denkleminde yerleştirilerek,

$$\begin{aligned} \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + \Gamma_n A_n \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}} \right) \\ - \Gamma_s A_s \left( \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_{SP}} \right) + \bar{S} \Delta V = 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir. Kaynak terimi için lineerleştirilmiş  $\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi$  formu kullanılarak bu son denklem de

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} - S_p \right) \phi_P \\ = \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_W + \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_E + \left( \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \phi_S + \left( \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_N + S_u \end{aligned} \quad (4.56)$$

veya daha önce bir-boyutlu problemlerde olduğu gibi katsayılarla,

$$\boxed{a_P \phi_P + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N = S_u} \quad (4.57a)$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradaki katsayılar

$$\boxed{a_W = -\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}, \quad a_E = -\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}, \quad a_S = -\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}, \quad a_N = -\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}, \quad a_P = -(a_W + a_E + a_S + a_N + S_p)} \quad (4.57b)$$

Verilmiş herhangi bir iki boyutlu problemde  $\phi$  büyüklüğünün dağılımını, hücrelerin herbirinde (4.57) benzeri ayrıklaştırılmış denklemleri yazarak elde edebiliriz. Sıcaklıkların veya akıların bilindiği sınırlarda ayrıklaştırılmış denklemler daha önceki örneklerde olduğu gibi sınır koşullarını içerecek biçimde düzenlenir. Sınır tarafındaki katsayı sıfıra eşitlenir, sınırdan geçen akı da bir kaynak büyüklüğü olarak  $S_u$  veya  $S_p$  büyüklüklerine sokulur. Böylece elde edilen denklem takımı çözümlere  $\phi$  büyüklüğünün dağılımı hesaplanır.

Bölüm 7 deki Örnek 7.2 de yöntemin iki-boyutlu halde ısı taşınımı problemlerine nasıl uygulanabileceğini göstermektedir.

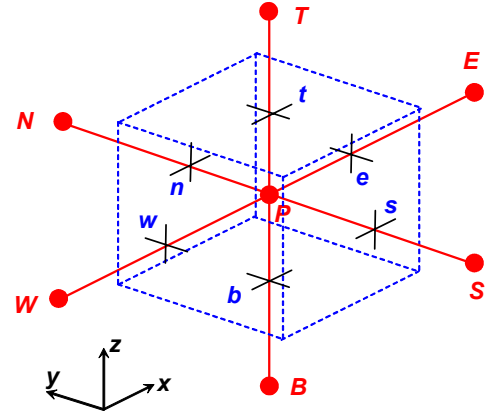
### 4.5. Üç-boyutlu difüzyon problemleri için sonlu hacimler yöntemi

Daimi halde üç-boyutlu bir difüzyon problemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S = 0 \quad (4.58)$$

denklemleriyle modellenir. Bu durumda çözüm havzası üç boyutlu bir ağ yapısıyla hücelere bölünecektir. Tipik bir kontrol hacmi Şekil 4.13 de gösterilmektedir.

P noktasını içeren kontrol hacmi için bu defa batı, doğu, kuzey, güney, dip ve tepe olarak adlandırılan altı kontrol noktası ( $W, E, N, S, B, T$ ) ve yine batı, doğu, kuzey, güney, dip ve tepe olarak adlandırılan altı hücre duvarı ( $w, e, n, s, b, t$ ) mevcuttur.



Şekil 4.13

Gösterilen kontrol hacmi içerisinde (4.58) denklemi integre edilerek,

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV + \iiint_{\Delta V} S dV = 0$$

ve  $A_e = A_w = \Delta y \Delta z$ ,  $A_n = A_s = \Delta x \Delta z$ ,  $A_t = A_b = \Delta x \Delta y$  olmak üzere ayrıştırılarak,

$$\left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \left[ \Gamma_t A_t \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \Gamma_b A_b \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4.59)$$

Türevler lineer yaklaşımla hesaplanarak

$$\left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left( \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_{PN}} \right) - \Gamma_s A_s \left( \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_{SP}} \right) \right] + \left[ \Gamma_t A_t \left( \frac{\phi_T - \phi_P}{\Delta z_{PT}} \right) - \Gamma_b A_b \left( \frac{\phi_P - \phi_B}{\Delta z_{BP}} \right) \right] + (S_u + S_P \phi_P) = 0 \quad (4.60)$$

ve  $\phi$  büyüklüğü için katsayılar cinsinden düzenlenerek,

$$\boxed{a_P \phi_P + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T = S_u} \quad (4.61a)$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradaki katsayılar

$$\begin{aligned}
 a_W &= -\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}, & a_E &= -\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}, & a_S &= -\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}, & a_N &= -\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \\
 a_B &= -\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}, & a_T &= -\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}, & a_P &= -(a_W + a_E + a_S + a_N + S_P)
 \end{aligned}
 \tag{4.61b}$$

İç hücreler için yazılan bu bağıntılar sınır hücrelerinde sınır şartlarını da içerecek biçimde düzenlenecektir.

#### 4.6. Difüzyon problemleri için ayrıklaştırılmış denklemlerin özeti

Bir-, iki- ve üç-boyutlu difüzyon problemleri için elde edilen ayrıklaştırılmış denklemler bir arada değerlendirildiğinde hepsinin de

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_u \tag{4.62}$$

biçiminde oldukları görülmektedir. Burada  $\sum$  sembolü bütün ( $nb$ ) komşu kontrol noktaları üzerinde bir toplam yapıldığını belirtmektedir.  $a_{nb}$  katsayıları,

Bir-boyutlu halde	$a_W, a_E$
İki-boyutlu halde	$a_W, a_E, a_S, a_N$
Üç-boyutlu halde	$a_W, a_E, a_S, a_N, a_B, a_T$

dir.  $\phi_{nb}$  büyüklükleri bağımlı değişkenin komşu kontrol noktalarındaki değerlerini  $S_u$  ise lineerleştirilmiş kaynak terimini temsil etmektedir.

Bütün durumlarda  $P$  kontrol noktası etrafındaki katsayılar

$$a_P = \sum a_{nb} + S_p \tag{4.63}$$

bağıntısıyla hesaplanmaktadır.

Bir-, iki- ve üç-boyutlu problemlerdeki katsayılar Tablo 4.7 de özetlenmiştir.

Tablo 4.7

	$a_W$	$A_E$	$A_S$	$A_N$	$A_B$	$A_T$
1B	$-\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$-\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$				
2B	$-\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$-\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$-\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$-\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$		
3B	$-\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$-\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$-\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$-\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$-\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$-\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$

Kaynak terimleri  $\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$  şeklinde lineerleştirilmiş bağıntıda  $S_u$  ve  $S_p$  büyüklükleri yerleştirilerek hesaplara katılacaktır.

Sınır koşulları, sınır tarafındaki katsayı sıfıra eşitlenerek ve sınırdan geçen akı da tam veya lineer yaklaşımla bulunmuş haliyle  $S_u$  veya  $S_p$  ilave kaynak terimlerinde yerleştirilerek uygulanacaktır. Genişliği  $\Delta\zeta$  ve sınır yüzeyi  $B$  olan bir-boyutlu bir kontrol hacmi için

$$\text{Sınır tarafındaki katsayı} \quad a_B = 0 \quad (4.64)$$

$$\text{Kaynak katkısı} \quad \text{Sabit } \phi_B \text{ değeri için} \quad : \quad \begin{aligned} S_u &= \frac{2k_B A_B}{\Delta\zeta} \phi_B \\ S_p &= -\frac{2k_B A_B}{\Delta\zeta} \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\text{Sabit } q_B \text{ akısı için} \quad : \quad S_u + S_p \phi_p = q_B \quad (4.66)$$

şeklindedir.