

SONLU HACİMLER YÖNTEMİ

Kaynak:

H.K. Versteeg and W. Malalasekera,

An Introduction to Computational Fluid Dynamics,
The Finite Volume Method,

Longman, 1995

YAYINIM PROBLEMLERİ İÇİN SONLU HACİMLER YÖNTEMİ

Transport denklemi

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi U) = \nabla(\Gamma \nabla\phi) + S_\phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \text{ yayılım katsayısı} \\ S_\phi \text{ kaynak terimi} \end{array} \right.$$

Problem

- Zamandan bağımsız (daimi) ise

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = 0$$

- Taşınım (konveksiyon) içermiyorsa

$$\nabla(\rho\phi U) = 0$$

yayılım
(difüzyon)
problemi

$$\nabla(\Gamma \nabla\phi) + S_\phi = 0$$

Sonlu hacimler yöntemi için bu denklem
bir kontrol hacmi içinde integre edilir

$$\iiint_{\Delta V} \nabla(\Gamma \nabla\phi) dV + \iiint_{\Delta V} S_\phi dV = 0$$

Diverjans teoremi
kullanılarak

$$\iiint_{\Delta V} \nabla \bar{a} dV = \iint_A \bar{a} \cdot \bar{n} dA$$



$$\iint_A (\Gamma \nabla\phi) \cdot \bar{n} dA + \iiint_{\Delta V} S_\phi dV = 0$$

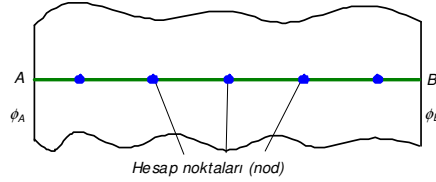
Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

$$\nabla(\Gamma\nabla\phi) + S_\phi = 0$$

1-B halde



$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0$$



Genel olarak

A ve B sınırlarında ϕ büyüklüğünün sınır değerleri bilinir ve çizgi boyunca ϕ büyüklüğünün değerlerinin hesaplanması beklenir.

Bu konu için tipik bir örnek [bir-boyutlu ısı iletimi](#) problemidir.

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Genel işlem süreci

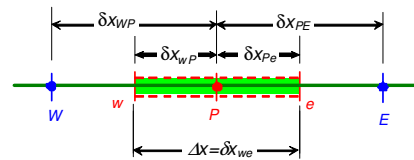
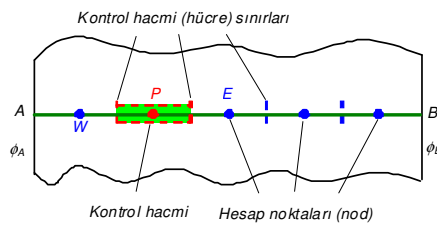
1.Adım: Ağ yapısı Oluşturma

A ve B noktaları arasında kontrol noktaları (hesap noktaları) seçilir.

Hücreler bu noktaları içine alır. Kontrol Hücre sınırları kontrol noktaları arasındaki orta noktalardır.

Hücre terminolojisi

- P Hücre merkez kontrol noktası
- W Batı kontrol noktası
- E Doğu kontrol noktası
- w Hücrenin batı duvarı
- e Hücrenin doğu duvarı

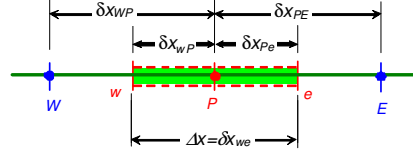


Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Genel işlem süreci

2.Adım: Denklemin ayrıştırılması

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0$$



Kontrol hacmi içerisinde integre edilerek

$$\iiint_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \iiint_{\Delta V} S dV = 0$$

Diverjans teoremi uygulanarak

$$\iint_A \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dA + \iiint_{\Delta V} S dV = 0$$

İntegraller hesaplanarak

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0$$

ΔV : Hücrenin (kontrol hacmi) hacmi

\bar{S} : Kaynak büyüklüğünün ortalama değeri (birim hacim başına)

A : Hücre duvarının alanı

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükölen

5

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Genel işlem süreci

Sonlu Hacimler Yönteminin çok önemli bir özelliği, ayrıştırılmış denklemin fiziksel bir yorum yapmaya imkan vermesidir. Nitekim

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad \text{denklemine bakıldığında}$$

- ilk iki terimin ϕ büyüklüğüne ilişkin **yayınimsal akılar** olduğu,

- bu akılar arasındaki farkın (çıkan akı – giren akı) **kontrol hacmi içerisinde üretilen ϕ büyüklüğüne eşit** olduğu

açıkça
görülmemektedir.

Yani bu denklem ϕ büyüklüğü için bu kontrol hacmi (hücre) içerisinde yazılmış bir denge denklemdir.

Bu denklemden yararlanabilmek için Γ difüzyon katsayısıyla $d\phi/dx$ türevinin hücre sınırlarındaki değerlerinin bilinmesi gerekir.

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükölen

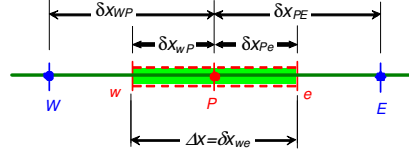
6

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Genel işlem süreci

Uygulamada genel olarak ϕ büyüklüğü ve Γ difüzyon katsayısı kontrol noktalarında bilinir veya hesaplanır.

Hücre sınırlarında gereken büyüklükler *interpolasyon* yoluyla elde edilebilir.



Bunun için belirtilen büyüklüklerin kontrol noktaları arasındaki dağılımları için bir yaklaşım yapmak gerekir. En basit yol lineer yaklaşım olup, bu yaklaşım pratikte *merkezi farklandırma* olarak bilinir.

Üniform bir ağ yapısında *lineer interpolasyon* kullanılarak *hücre sınırlarındaki*

Difüzyon katsayıları

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2}, \quad \Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

Yayınımsal akı terimleri

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}, \quad \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

7

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Genel işlem süreci

S kaynak terimi bazı hallerde *bağımlı değişkenin bir fonksiyonu* olabilir. *Lineer* bir yaklaşım yapılırsa

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \phi_P$$

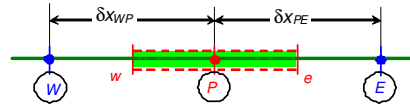
Bulunan değerler $\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0$ eşitliğinde kullanılarak

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + S_u + S_P \phi_P = 0$$

Düzenlenerek $\left(-\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_P \right) \phi_P + \left(-\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_E = S_u$

veya

$$a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E = S_u$$



Burada

$$a_W = -\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w, \quad a_E = -\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P)$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

8

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY Genel işlem süreci

3.Adım: Denklemlerin çözümü

$$a_W \phi_W + a_P \phi_P + a_E \phi_E = S_u$$

$$a_W = -\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w, \quad a_E = -\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P)$$

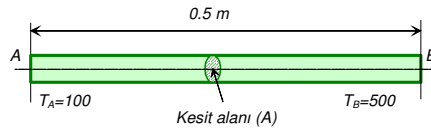
Yukarıdaki denklemin benzerleri her bir hücre için çıkartılarak bir denklem sistemi elde edilir.

Çözüm havzası sınırındaki hücreler için denklem **sınır koşullarını da içerecek** şekilde düzenlenmelidir.

Sonuç olarak ortaya çıkan lineer denklem takımı çözülerek ϕ büyüklüğünün kontrol noktalarındaki değerleri elde edilir.

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Örnek problem 1: Bir boyutlu ısı iletimi



Uç noktalarındaki sıcaklık sırasıyla 100 °C ve 500 °C olan 0.5m boyundaki izole edilmiş bir çubuğun ısıl iletkenlik katsayısı $k=1000\text{W/m}^\circ\text{C}$ ve dik kesit alanı $A=10 \times 10^{-3}\text{m}^2$ dir. Daimi halde çubuk boyunca sıcaklık dağılımını bulunuz.

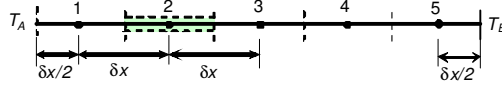
Daimi 1-B ısı iletimi denklemi
$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$$

Bu problemde kaynak terimi bulunmayıp $S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0$

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Örnek: *Bir boyutlu ısı iletimi*

Çubuk eşit büyüklükte 5 hücreye bölünürse hücre boyları $\delta x = 0.1m$ olur.



5 kontrol noktası: - 1 ve 5 sınır kontrol noktaları
- 2,3,4 iç kontrol noktaları

İç hücreler ve sınır hücreler için ayrılaştırılmış denklemlerin farklı şekilde düzenlenmesi gerekmektedir.

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

İç hücrelerde ayrıştırma

Ayrılaştırılmış yayınım denklemi
$$\left(-\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) \phi_w + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p\right) \phi_p + \left(-\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) \phi_E = S_u$$

bu problem için iç hücrelerde yazılarak
$$-\left(\frac{k_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) T_w + \left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{k_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) T_p - \left(\frac{k_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) T_E = 0$$

Isı iletkenlik katsayısı $k_w = k_e = k = sb$

Nokta aralıkları $\delta x_{WP} = \delta x_{PE} = \delta x_{WP} = \delta x = sb$ olup

Kesit alanları $A_w = A_e = A = sb$

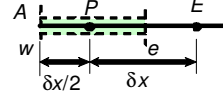
$$a_w T_w + a_p T_p + a_E T_E = 0$$

$$a_w = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_p = -(a_w + a_E)$$

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Soldaki sınır hücresinde ayrıklaştırma

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad \text{Denklemi} \quad kA \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - kA \left(\frac{T_P - T_A}{\delta x / 2} \right) = 0$$



$$\left(-\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \right) \phi_w + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_p + \left(-\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e \right) \phi_e = S_u \quad \text{denklemindeki}$$

standart sıralamaya göre yeniden düzenlenerek

$$-0 \cdot T_w + \left(0 + \frac{k}{\delta x} A + \frac{2k}{\delta x} A \right) T_p + \left(-\frac{k}{\delta x} A \right) T_e = \left(\frac{2k}{\delta x} A \right) T_A$$

Burada T_A büyüklüğü sınır koşulu olarak bilindiğinden denklemin sağına, sanki bir kaynak terimi imiş gibi aktarılmıştır. Ayrıca hücrenin batı tarafında bir T_w bilinmeyişi olmadığı için bunun katsayısı sıfır yapılmıştır

Böylece

$$a_w T_w + a_p T_p + a_e T_e = S_u$$

$$a_w = 0, \quad a_e = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_p = -(a_w + a_e + S_p), \quad S_p = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_A$$

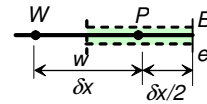
UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

13

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Sağdaki sınır hücresinde ayrıklaştırma

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad \text{Denklemi} \quad kA \left(\frac{T_B - T_P}{\delta x / 2} \right) - kA \left(\frac{T_P - T_w}{\delta x} \right) = 0$$



Denklemin standart biçimde bilinmeyen sıcaklıklara göre sıralanarak

$$\left(-\frac{k}{\delta x} A \right) T_w + \left(\frac{k}{\delta x} A + 0 + \frac{2k}{\delta x} A \right) T_p + 0 \cdot T_e = \left(\frac{2k}{\delta x} A \right) T_B$$

Standart biçimde katsayılarla düzenlenerek

$$a_w T_w + a_p T_p + a_e T_e = S_u$$

$$a_w = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_e = 0, \quad a_p = -(a_w + a_e + S_p), \quad S_p = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x} T_B$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

14

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Denklemler sistemi

Sınır hücreleri ve iç hücreler için elde edilen bütün denklemler ve katsayıları bir araya getirilerek

$$a_{W_i}T_{W_i} + a_{P_i}T_{P_i} + a_{E_i}T_{E_i} = S_{u_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\begin{aligned} i=1 & \rightarrow a_W = 0, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x}T_A \\ i=2,3,4 & \rightarrow a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E), \quad S_P = 0, \quad S_u = 0 \\ i=5 & \rightarrow a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = \frac{2kA}{\delta x}T_B \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} k &= 1000 \text{ W/m}^\circ\text{K} \\ A &= 10 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \delta x &= 0.1 \text{ m} \end{aligned} \right\} \frac{kA}{\delta x} = \frac{1000 \times 10 \times 10^{-3}}{0.1} = 100$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükölen

15

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Denklemler sisteminin katsayıları

Hücre No	a_W	$a_P = -(a_W + a_E + S_P)$	a_E	S_P	S_u
1	0	300	-100	-200	$200 T_A$
2	-100	200	-100	0	0
3	-100	200	-100	0	0
4	-100	200	-100	0	0
5	-100	300	0	-200	$200 T_B$

$$\begin{aligned} 300 T_1 - 100 T_2 &= 200 T_A \\ -100 T_1 + 200 T_2 - 100 T_3 &= 0 \\ -100 T_2 + 200 T_3 - 100 T_4 &= 0 \\ -100 T_3 + 200 T_4 - 100 T_5 &= 0 \\ -100 T_4 + 300 T_5 &= 200 T_B \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200 T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 T_B \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_A &= 100^\circ\text{C} \\ T_B &= 500^\circ\text{C} \end{aligned}$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükölen

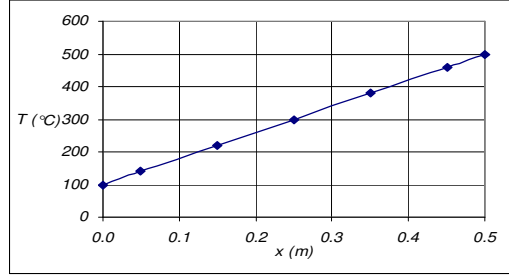
16

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Denklemin çözümü

Gauss yok etme yöntemi veya Thomas yöntemi ile

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{Bmatrix}$$



Anolitik çözüm $T = 800x + 100$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükselen

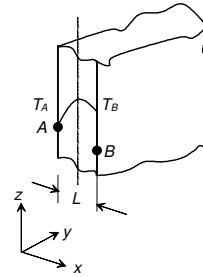
17

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Örnek problem 2: Isı kaynağı olması hali

Şekilde görülen $L=2\text{cm}$ kalınlığındaki levhanın ısı iletkenliği sabit olup $k = 0.5\text{W/m}^\circ\text{K}$ olarak verilmiştir. Levhanın her yerinde $q=1000\text{kW/m}^3$ olmak üzere üniform bir ısı üretimi mevcuttur. A ve B yüzlerinin sıcaklıkları sırasıyla 100°C ve 200°C dir. Levhanın y ve z doğrultusundaki uzunlukları çok büyük olup, sadece x doğrultusundaki sıcaklık gradyanları önemlidir.

Buna göre daimi haldeki sıcaklık dağılımını hesaplayarak sayısal sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırınız



Daimi 1-B ısı iletimi denklemi

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + q = 0$$

q : ısı kaynağı terimi

Çözüm için $\delta x = 0.004\text{ m}$ olmak üzere 5 hücre kullanalım

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükselen

18

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

İç hücreler için integrasyon

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} q dV = 0$$

$$\int_{\Delta V} q dV = q \Delta V \quad \text{olmak üzere}$$

Türevler ayrıştırılarak

$$\left[\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q \Delta V = 0$$

$$\left[k_e A \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - k_w A \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] + q A \delta x = 0$$

Sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$\left(\frac{k_e A}{\delta x} + \frac{k_w A}{\delta x} \right) T_P = \left(\frac{k_w A}{\delta x} \right) T_W + \left(\frac{k_e A}{\delta x} \right) T_E + q A \delta x$$

Standart biçimde

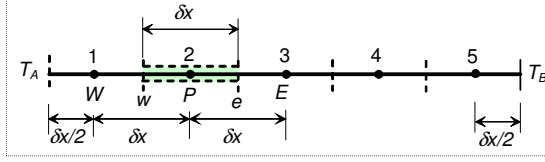
$$a_w T_W + a_p T_P + a_e T_E = S_u$$

$$k_e = k_w = k$$

$$a_w = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_e = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_p = -(a_w + a_e + S_p), \quad S_p = 0, \quad S_u = qA\delta x$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükölen

19



Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Soldaki sınır hücresinde

$$\left[\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q \Delta V = 0$$

Kontrol noktasıyla sınır yüzeyi
arasında lineer sıcaklık dağılımı ile

$$\left[k_e A \left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - k_A A \left(\frac{T_P - T_A}{\delta x / 2} \right) \right] + q A \delta x = 0$$

Sıcaklıklar için standart
biçimde düzenlenerek

$$a_w T_W + a_p T_P + a_e T_E = S_u$$

$$a_w = 0, \quad a_e = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_p = -(a_w + a_e + S_p), \quad S_p = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_A$$

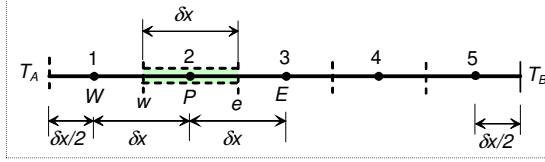
UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükölen

20

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Sağdaki sınır hücresinde

$$\left[\left(kA \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA \frac{dT}{dx} \right)_w \right] + q\Delta V = 0$$



Kontrol noktasıyla sınır yüzeyi arasında lineer sıcaklık dağılımı ile

$$\left[k_B A \left(\frac{T_B - T_P}{\delta x / 2} \right) - k_W A \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] + qA\delta x = 0$$

Sıcaklıklar için standart biçimde düzenlenerek

$$a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u$$

$$a_W = -\frac{kA}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_p), \quad S_p = -\frac{2kA}{\delta x}, \quad S_u = qA\delta x + \frac{2kA}{\delta x} T_B$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

21

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Denklemler sistemi ve çözüm

$$A = 1, \quad k = 0.5 \text{ W/mK}$$

olmak üzere katsayılar hesaplanırsa

$$q = 1000 \text{ kW/m}^3, \quad \delta x = 0.004 \text{ m}$$

Nokta	S_p	a_w	$a_p = a_w + a_e - S_p$	a_e	S_u
1	-250	0	375	-125	$4000 + 250T_A$
2	0	-125	250	-125	4000
3	0	-125	250	-125	4000
4	0	-125	250	-125	4000
5	-250	-125	375	0	$4000 + 250T_B$

$$\begin{bmatrix} 375 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ -125 & 250 & -125 & 0 & 0 \\ 0 & -125 & 250 & -125 & 0 \\ 0 & 0 & -125 & 250 & -125 \\ 0 & 0 & 0 & -125 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 4000 \\ 54000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 218 \\ 254 \\ 258 \\ 230 \end{Bmatrix}$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

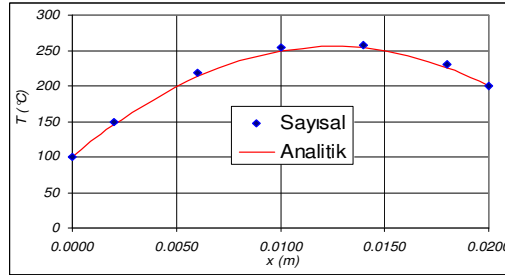
22

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Cözüm

Analitik çözüm $T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L-x) \right] x + T_A = [5,000 + 1,000,000(0.02-x)]x + 100$

Nokta	1	2	3	4	5
x(m)	0.002	0.006	0.01	0.014	0.018
Nümerik sonuç	150	218	254	258	230
Analitik sonuç	146	214	250	254	226
Yüzde hata	2.73	1.86	1.60	1.57	176



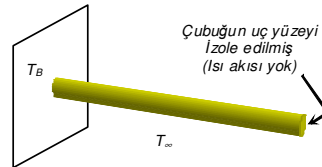
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yüksele

23

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Örnek problem 3:

Şekilde gösterilen silindirik çubuğun dik kesit alanı $A=5b$, olup boyu $L=1m$ dir. Çevre ortam sıcaklığı $20^\circ C$, çubuk tabanında sıcaklık $T_B=100^\circ C$, ve çubuk uç yüzeyi izole edilmiştir (Isı akısı yok) olsun.



Çubuk boyunca sıcaklıkları hesaplayıp sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırınız.

Analitik Çözüm $\frac{T - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)}$ $n^2 = \frac{hp}{kA} = 25 m^{-2}$

olarak verilmiştir. Burada x çubuk tabanından uzaklıkları, h ısı iletim katsayısını, P ise çevre uzunluğunu göstermektedir. Çubuk boyunca $kA=5b$ alınacaktır.

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yüksele

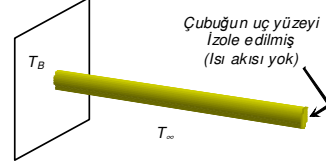
24

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Örnek problem 3:

Problemi modelleyen denklemin $\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0$

Buradaki ikinci terim taşınım ile ısı kaybını temsil eden bir kuyu terimidir.



$kA = sb$ olduğu için $kA \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) - n^2(T - T_\infty) = 0$

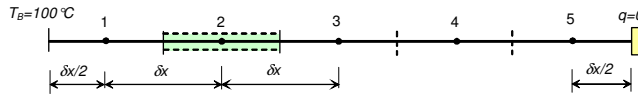
Denklemin kontrol hacmi içinde integre edilerek $\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dV - \int_{\Delta V} n^2(T - T_\infty) dV = 0$

$\int_{\Delta V} n^2(T - T_\infty) dV = n^2(T - T_\infty) A \delta x$ kabul edilerek $\left[A \frac{dT}{dx} \right]_e - \left[A \frac{dT}{dx} \right]_w - [n^2(T_p - T_\infty) A \delta x] = 0$

Bütün terimler A kesit alanıyla bölünerek $\left[\left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\frac{dT}{dx} \right)_w \right] - [n^2(T_p - T_\infty) \delta x] = 0$

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Eşit uzunlukta 5 hücre alınırsa hücre boyları $\delta x = 0.5m$ olur.



İç hücreler için ayrıştırma

$$\left[\left(\frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\frac{dT}{dx} \right)_w \right] - [n^2(T_p - T_\infty) \delta x] = 0$$

Sıcaklık gradyanları lineer yaklaşımla ayrıştırılarak

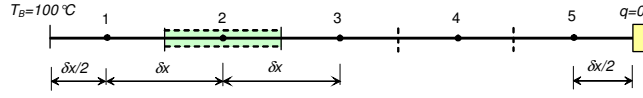
$$\left[\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2(T_p - T_\infty) \delta x] = 0$$

$$\left(\frac{1}{\delta x} + \frac{1}{\delta x} \right) T_P = \left(\frac{1}{\delta x} \right) T_W + \left(\frac{1}{\delta x} \right) T_E + n^2 \delta x T_\infty - n^2 \delta x T_P$$

$$a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u$$

$$a_W = -\frac{1}{\delta x}, \quad a_E = -\frac{1}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_P), \quad S_P = -n^2 \delta x, \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty$$

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY



Soldaki sınır hücresi için ayrıklaştırma

Sol sınırdaki sabit sıcaklık cinsinden sınır şartı uygulanarak

$$\left[\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x} \right) - \left(\frac{T_P - T_B}{\delta x/2} \right) \right] - [n^2(T_P - T_\infty)\delta x] = 0$$

Düzenleme yapılarak

$$a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u$$

$$a_W = 0, \quad a_E = -\frac{1}{\delta x}, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_p), \quad S_p = -n^2 \delta x - \frac{2}{\delta x}, \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty + \frac{2}{\delta x} T_B$$

Soldaki sınır hücresi için ayrıklaştırma

Sol sınırdaki sabit sıcaklık cinsinden sınır şartı uygulanarak

$$\left[0 - \left(\frac{T_P - T_W}{\delta x} \right) \right] - [n^2(T_P - T_\infty)\delta x] = 0$$

$$a_W T_W + a_P T_P + a_E T_E = S_u$$

$$a_W = -\frac{1}{\delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_P = -(a_W + a_E + S_p), \quad S_p = -n^2 \delta x, \quad S_u = n^2 \delta x T_\infty$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yüköğretim

27

Daimi 1-B Yayınım Denklemi için SHY

Denklemler sistemi

Nokta	S_p	a_W	$a_P = a_W + a_E - S_p$	a_E	S_u
1	-15	0	20	-5	$100 + 10T_B$
2	-5	-5	15	-5	100
3	-5	-5	15	-5	100
4	-5	-5	15	-5	100
5	-5	-5	10	0	100

$$\begin{bmatrix} 20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 64.22 \\ 36.91 \\ 26.50 \\ 22.60 \\ 21.30 \end{Bmatrix}$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yüköğretim

28

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Cözüm sonucu

$$\text{Analitik Çözüm} \quad \frac{T - T_{\infty}}{T_B - T_{\infty}} = \frac{\cosh[n(L-x)]}{\cosh(nL)} \quad n^2 = \frac{hp}{kA} = 25 \text{ m}^{-2}$$

Nokta	x(m)	Sonlu hacim sonucu	Analitik sonuç	Fark	Yüzde hata
1	0.1	64.22	68.52	4.30	6.27
2	0.3	36.91	37.86	0.95	2.51
3	0.5	26.50	26.61	0.11	0.41
4	0.7	22.60	22.53	-0.07	-0.31
5	0.9	21.30	21.21	-0.09	-0.42

En büyük oransal hata %6 mertebesindedir.

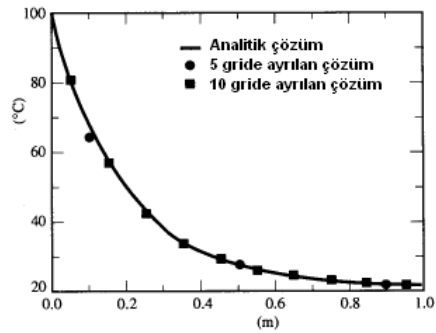
Sayısal çözümlemede kullanılan ağ kaba olup bu hata doğaldır.

Daimi 1-B Yayınım Denklemi İçin SHY

Cözüm sonucu

Çözüm 10 hücre ile tekrarlanırsa

Nokta	x(m)	Sonlu hacim sonucu	Analitik sonuç	Fark	Yüzde hata
1	0.05	80.59	82.31	1.72	2.08
2	0.15	56.94	57.79	0.85	1.47
3	0.25	42.53	42.93	0.40	0.93
4	0.35	33.74	33.92	0.18	0.53
5	0.45	28.40	28.46	0.06	0.21
6	0.55	25.16	25.17	0.01	0.03
7	0.65	23.21	23.19	-0.02	-0.08
8	0.75	22.06	22.03	-0.03	-0.13
9	0.85	21.47	21.39	-0.08	-0.37
10	0.95	21.13	21.11	-0.02	-0.09



2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

1-B halde denklemlerin ayrıklaştırılması için kullanılan yöntem kolaylıkla 2-B problemler için de genişletilebilir.

Daimi 2-B yayınım denklemi

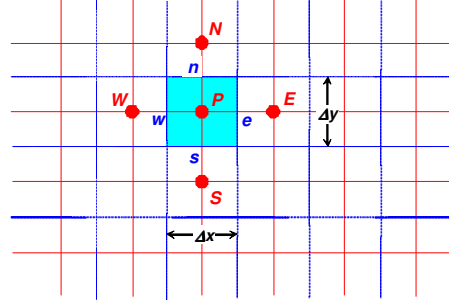
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0$$

Kontrol hacmi içerisinde integre edilerek

$$\iint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \iint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Delta V} S_{\phi} dV = 0$$

Sınır yüzeylerinin alanları $A_e = A_w = \Delta y$ ve $A_n = A_s = \Delta x$ olup ayrıklaştırma sonucu

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$



UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yücelen

31

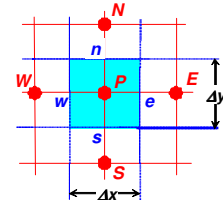
2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

$$\text{Batı yüzeyinden geçen akı} \quad \Gamma_w A_w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right)$$

$$\text{Doğu yüzeyinden geçen akı} \quad \Gamma_e A_e \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right)$$

$$\text{Güney yüzeyinden geçen akı} \quad \Gamma_s A_s \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s = \Gamma_s A_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_{SP}} \right)$$

$$\text{Kuzey yüzeyinden geçen akı} \quad \Gamma_n A_n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n = \Gamma_n A_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}} \right)$$



Denkleme yerleştirilerek $\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + \Gamma_n A_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}} \right) - \Gamma_s A_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_{SP}} \right) + \bar{S} \Delta V = 0$

Kaynak terimi için lineer dağılım $\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi$

$$a_P \phi_P + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N = S_u$$

$$a_W = -\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}, \quad a_E = -\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$$

$$a_S = -\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}, \quad a_N = -\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$$

$$a_P = -(a_W + a_E + a_S + a_N + S_p)$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yücelen

32

2-B Yayınım Problemleri için SHY

Örnek problem

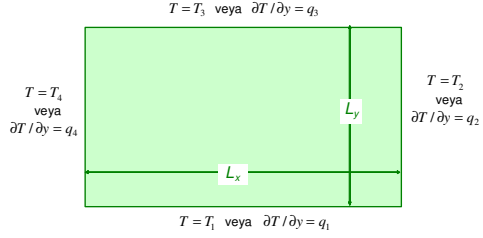
Dikdörtgenel dik-kesitli sonsuz uzun bir çubuk içerisindeki ısı iletimi problemi hücre merkezli sonlu hacimler yöntemiyle sayısal olarak inceleyiniz. Bu amaçla genel bir yazılım geliştiriniz. Öyle ki levha kenarlarında sınır koşulu olarak

“sıcaklık” veya “ısı akısı”

cinsinden koşullar seçilebilsin.

Kaynak terimi olmayıp

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$



Sınır koşulları

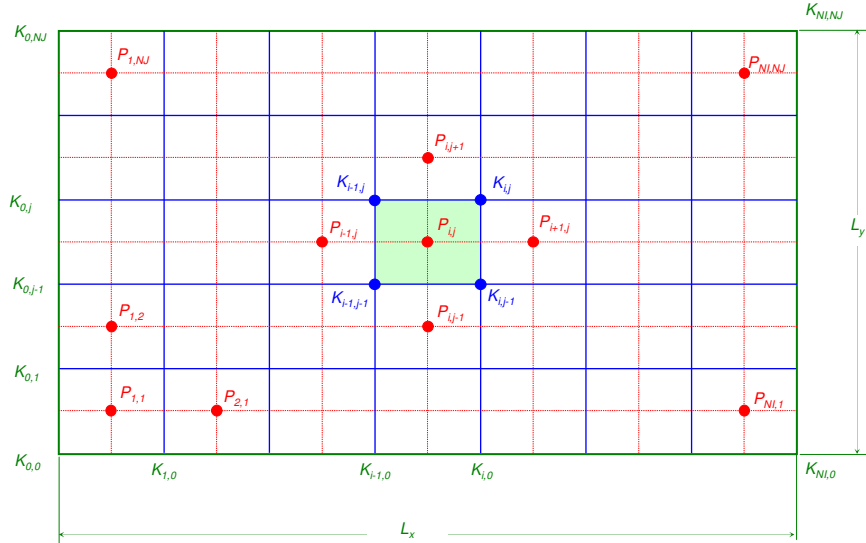
Alt duvarda	$T = T_1$ veya $\partial T / \partial y = q_1$
Sağ duvarda	$T = T_2$ veya $\partial T / \partial y = q_2$
Üst duvarda	$T = T_3$ veya $\partial T / \partial y = q_3$
Sol duvarda	$T = T_4$ veya $\partial T / \partial y = q_4$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yürekli

33

2-B Yayınım Problemleri için SHY

Örnek problem



UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yürekli

34

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem

Denklem bir (i,j) hücresi içerisinde integre edilerek

$$\iiint_{\Delta V_{i,j}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV + \iiint_{\Delta V_{i,j}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dV = 0$$

Diverjans teoremi uygulanarak

$$\iint_{\Delta A_{i,j}} k \frac{\partial T}{\partial x} dy + \iint_{\Delta A_{i,j}} k \frac{\partial T}{\partial y} dx = 0$$

Hücre duvarları üzerinde integraller hesaplanarak

$$\left[(k\Delta y)_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - (k\Delta y)_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] + \left[(k\Delta x)_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - (k\Delta x)_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] = 0$$

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

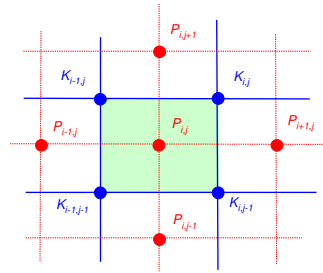
Örnek problem İç hücreler için ayrıştırma

$$(k\Delta y)_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e = k\Delta y \left(\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \right)$$

$$(k\Delta y)_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = k\Delta y \left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right)$$

$$(k\Delta x)_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = k\Delta x \left(\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \right)$$

$$(k\Delta x)_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = k\Delta x \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right)$$



Denklemde yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{i,j} = a_w T_{i-1,j} + a_E T_{i+1,j} + a_S T_{i,j-1} + a_N T_{i,j+1}$$

$$a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_S = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_p = a_w + a_E + a_S + a_N$$

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Batı sınırındaki hücreler için ayrıştırma

Batı kenarındaki sınır şartının sabit sıcaklık değeri olarak T_w ile verilmesi halinde sınır hücresinin batı duvarında akı

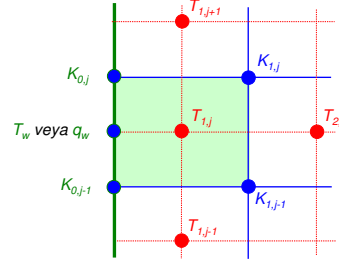
$$(k\Delta y)_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = k\Delta y \left(\frac{T_{1,j} - T_w}{\Delta x / 2} \right)$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{1,j} = 0 + a_E T_{2,j} + a_S T_{1,j-1} + a_N T_{1,j+1} + S_w$$

$$a_w = 0, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_S = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad S_w = \frac{2k\Delta y}{\Delta x} T_w$$

$$a_p = a_w + a_E + a_S + a_N + S_{pw}, \quad S_{pw} = \frac{2k\Delta y}{\Delta x}$$



UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

37

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Batı sınırındaki hücreler için ayrıştırma

Batı kenarındaki sınır şartının ısı akısı cinsinden q_w ile verilmesi halinde sınır hücresinin batı duvarında akı

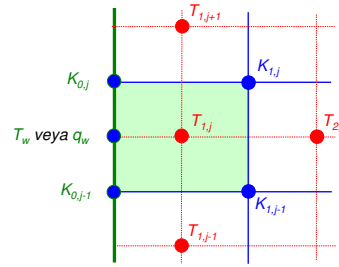
$$(k\Delta y)_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w = -q_w$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{1,j} = 0 + a_E T_{2,j} + a_S T_{1,j-1} + a_N T_{1,j+1} + S_w$$

$$a_w = 0, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_S = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad S_w = q_w$$

$$a_p = a_w + a_E + a_S + a_N$$



UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

38

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Doğu sınırındaki hücreler için ayrıklaştırma

Doğu kenarındaki sınır şartının sabit sıcaklık değeri olarak T_e ile verilmesi halinde sınır hücresinin doğu duvarında akı

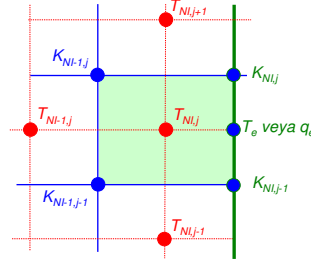
$$(k\Delta y)_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e = k\Delta y \left(\frac{T_e - T_{NI,j}}{\Delta x/2} \right)$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{NI,j} = a_w T_{NI-1,j} + 0 + a_s T_{NI,j-1} + a_n T_{NI,j+1} + S_e$$

$$a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_n = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad S_e = 2k \frac{\Delta y}{\Delta x} T_e$$

$$a_p = a_w + a_E + a_s + a_n + S_{pe}, \quad S_{pe} = \frac{2k\Delta y}{\Delta x}$$



2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Doğu sınırındaki hücreler için ayrıklaştırma

Doğu kenarındaki sınır şartının ısı akısı cinsinden q_e ile verilmesi halinde sınır hücresinin doğu duvarında akı

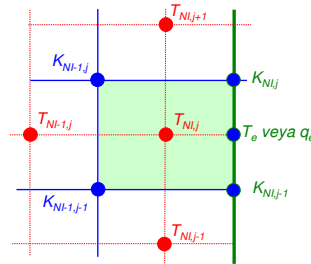
$$(k\Delta y)_e \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_e = q_e$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{NI,j} = a_w T_{NI-1,j} + 0 + a_s T_{NI,j-1} + a_n T_{NI,j+1} + S_e$$

$$a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_n = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad S_e = q_e$$

$$a_p = a_w + a_E + a_s + a_n$$



2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Güney sınırındaki hücreler için ayrıklaştırma

Güney kenarındaki sınır şartının sabit sıcaklık değeri olarak T_s ile verilmesi halinde sınır hücresinin güney duvarında akı

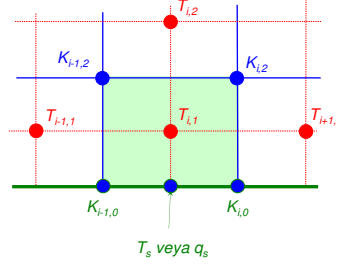
$$(k\Delta x)_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = k\Delta x \frac{T_{i,1} - T_s}{\Delta y/2}$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_P T_{i,1} = a_W T_{i-1,1} + a_E T_{i+1,1} + 0 + a_N T_{i,2} + S_s$$

$$a_W = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_S = 0, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad S_s = 2k \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + S_{ps}, \quad S_{ps} = \frac{2k\Delta x}{\Delta y}$$



2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Güney sınırındaki hücreler için ayrıklaştırma

Güney kenarındaki sınır şartının ısı akısı cinsinden q_s ile verilmesi halinde sınır hücresinin güney duvarında akı

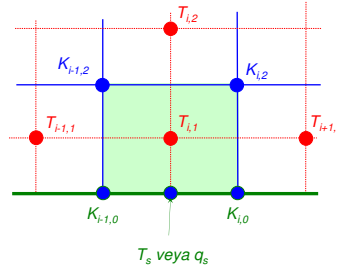
$$(k\Delta x)_s \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s = -q_s$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_P T_{i,1} = a_W T_{i-1,1} + a_E T_{i+1,1} + 0 + a_N T_{i,2} + S_s$$

$$a_W = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_S = 0, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad S_s = q_s$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N$$



2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Kuzey sınırındaki hücreler için ayrıklaştırma

Kuzey kenarındaki sınır şartının sabit sıcaklık değeri olarak T_n ile verilmesi halinde sınır hücresinin kuzey duvarında akı

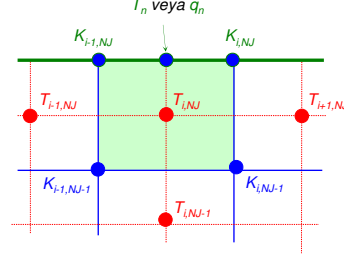
$$(k\Delta x)_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = k\Delta x \left(\frac{T_n - T_{i,NJ}}{\Delta y/2} \right)$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{i,NJ} = a_w T_{i-1,NJ} + a_e T_{i+1,NJ} + a_s T_{i,NJ-1} + 0 + S_n$$

$$a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_e = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_n = 0, \quad S_n = 2k \frac{\Delta x}{\Delta y} T_n$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + S_{pn}, \quad S_{pn} = \frac{2k\Delta x}{\Delta y}$$



UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

43

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem Kuzey sınırındaki hücreler için ayrıklaştırma

Kuzey kenarındaki sınır şartının ısı akısı cinsinden q_n ile verilmesi halinde sınır hücresinin kuzey duvarında akı

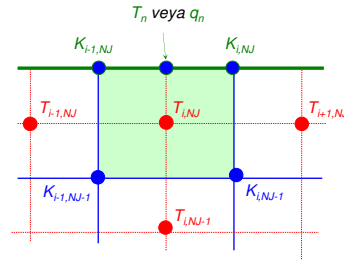
$$(k\Delta x)_n \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_n = q_n$$

Denklemden yerleştirilip sıcaklıklara göre düzenlenerek

$$a_p T_{i,NJ} = a_w T_{i-1,NJ} + a_e T_{i+1,NJ} + a_s T_{i,NJ-1} + 0 + S_n$$

$$a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_e = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_n = 0, \quad S_n = q_n$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n$$



UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

44

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem

Formüllerin genelleştirilmesi

Ayrıklaştırılmış denklemler bütün hücreler için genel bir biçimde yazılarak

$$a_p T_{i,j} = a_w T_{i-1,j} + a_e T_{i+1,j} + a_s T_{i,j-1} + a_n T_{i,j+1} + S$$

Bütün hücreler için

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + S_p$$

Burada

İç hücrelerde $\{(i = 2,3,\dots, NI - 1), j = 2,3,\dots, NJ - 1\}$

$$a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_e = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_n = k \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad S = 0, \quad S_p = 0$$

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek problem

Batı sınır hücrelerinde $\{i = 1\}$

$$j = 1,2,\dots, NJ \quad a_w = 0, \quad a_e = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_n = k \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$T = T_w \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_w = 2k \frac{\Delta y}{\Delta x} T_w, \quad S_p = S_{pw} = 2k \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$q = q_w \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_w = q_w, \quad S_p = 0$$

$$j = 1 \text{ için ayrıca} \quad a_s = 0 \quad S = S_w + S_s, \quad S_p = S_{pw} + S_{ps}$$

$$j = NJ \text{ için ayrıca} \quad a_n = 0 \quad S = S_w + S_n, \quad S_p = S_{pw} + S_{pn}$$

2-B Yayınım Problemleri için SHY

Örnek problem

Doğu sınır hücrelerinde $\{i = NI\}$

$$j = 1, 2, \dots, NJ \quad a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = 0, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$T = T_e \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_e = 2k \frac{\Delta y}{\Delta x} T_e, \quad S_p = S_{pe} = 2k \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$q = q_e \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_e = q_e, \quad S_p = 0$$

$$j = 1 \text{ için ayrıca} \quad a_s = 0 \quad S = S_e + S_s, \quad S_p = S_{pe} + S_{ps}$$

$$j = NJ \text{ için ayrıca} \quad a_N = 0 \quad S = S_e + S_n, \quad S_p = S_{pe} + S_{pn}$$

2-B Yayınım Problemleri için SHY

Örnek problem

Güney sınır hücrelerinde $\{j = 1\}$

$$i = 2, 3, \dots, NI - 1 \quad a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_s = 0, \quad a_N = k \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$T = T_s \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_s = 2k \frac{\Delta x}{\Delta y} T_s, \quad S_p = S_{ps} = 2k \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$q = q_s \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_s = q_s, \quad S_p = 0$$

Kuzey sınır hücrelerinde $\{j = NJ\}$

$$i = 2, 3, \dots, NI - 1 \quad a_w = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_E = k \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_s = k \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_N = 0$$

$$T = T_n \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_n = 2k \frac{\Delta x}{\Delta y} T_n, \quad S_p = S_{pn} = 2k \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$q = q_n \text{ Sınır şartı için} \quad S = S_n = q_n, \quad S_p = 0$$

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek uygulama

Yukarıda özetlenen formüller uygulanarak katsayılar hesaplanırsa

Nokta	a_N	a_S	a_W	a_E	a_P	S
1	10	0	0	10	20	500
2	10	10	0	10	30	500
3	10	10	0	10	30	500
4	0	10	0	10	40	2500
5	10	0	10	10	30	0
6	10	10	10	10	40	0
7	10	10	10	10	40	0
8	0	10	10	10	50	2000
9	10	0	10	0	20	0
10	10	10	10	0	30	0
11	10	10	10	0	30	0
12	0	10	10	0	40	2000

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükselen

51

2-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Örnek uygulama

Herhangi bir (i,j) hücresi için yazılan sonlu hacim denklemi

$$a_P T_{i,j} = a_W T_{i-1,j} + a_E T_{i+1,j} + a_S T_{i,j-1} + a_N T_{i,j+1} + S$$

Denklemin çözümünü daha önce sonlu fark problemleri için uygulanan tekniklerden biri ile elde etmek mümkündür. Örneğin denklem

$$-a_S T_{i,j-1} + a_P T_{i,j} - a_N T_{i,j+1} = a_W T_{i-1,j} + a_E T_{i+1,j} + S \quad j = 1, 2, \dots, NJ$$

şeklinde düzenlenerek sütunlar doğrultusunda bir kapalı formülasyonla çözüm yoluna gidilebilir. Bu şekilde yapılan bir iteratif çözümde ilk iterasyon adımı ve 37nci iterasyon adımı sonucu elde edilen çözümler aşağıda sunulmuştur.

77.66	63.23	78.76		146.3	129.7	124.0
60.65	38.47	51.82		205.6	178.1	166.2
54.26	30.03	38.21		242.2	211.1	196.5
52.13	27.38	32.79		260.0	222.7	212.1

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar
Uygulamaları Ders notları, M. Adil
Yükselen

52

3-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Daimi 3-B yayınım denklemi

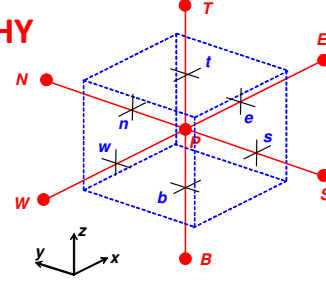
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S = 0$$

Kontrol hacmi içerisinde integre edilerek

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV + \iiint_{\Delta V} S dV = 0$$

$A_e = A_w = \Delta y \Delta z$, $A_n = A_s = \Delta x \Delta z$, $A_t = A_b = \Delta x \Delta y$ olmak üzere ayrıştırılarak

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \Gamma_b A_b \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$



3-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Daimi 3-B yayınım denklemi

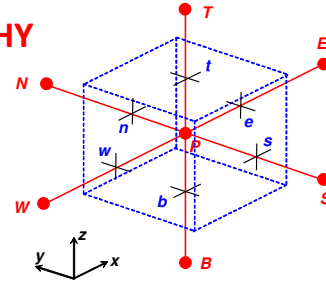
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S = 0$$

Kontrol hacmi içerisinde integre edilerek

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dV + \iiint_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dV + \iiint_{\Delta V} S dV = 0$$

$A_e = A_w = \Delta y \Delta z$, $A_n = A_s = \Delta x \Delta z$, $A_t = A_b = \Delta x \Delta y$ olmak üzere ayrıştırılarak

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_t - \Gamma_b A_b \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b \right] + \bar{S} \Delta V = 0$$



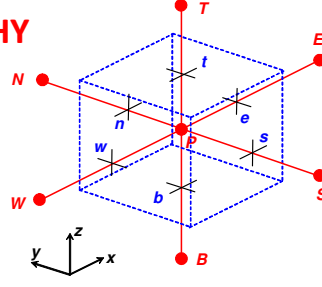
3-B Yayınım Problemleri İçin SHY

Türevler lineer yaklaşımla hesaplanarak

$$\left[\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \right] +$$

$$\left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\delta y_{PN}} \right) - \Gamma_s A_s \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\delta y_{SP}} \right) \right] +$$

$$\left[\Gamma_t A_t \left(\frac{\phi_T - \phi_P}{\delta z_{PT}} \right) - \Gamma_b A_b \left(\frac{\phi_P - \phi_B}{\delta z_{BP}} \right) \right] + (S_u + S_p \phi_P) = 0$$



$$a_p \phi_P + a_w \phi_W + a_e \phi_E + a_s \phi_S + a_n \phi_N + a_b \phi_B + a_t \phi_T = S_u$$

$$a_w = -\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}, \quad a_e = -\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}, \quad a_s = -\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}, \quad a_n = -\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$$

$$a_b = -\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}, \quad a_t = -\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}, \quad a_p = -(a_w + a_e + a_s + a_n + S_p)$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

55

Yayınım Problemleri - Özet

Standart denklem $a_p \phi_P + \sum a_{nb} \phi_{nb} = S_u$

	a_w	A_e	A_s	A_n	A_b	A_t
1B	$-\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$-\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$				
2B	$-\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$-\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$-\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$-\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$		
3B	$-\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$-\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$-\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$-\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$-\frac{\Gamma_b A_b}{\delta z_{BP}}$	$-\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{PT}}$

$$a_p = \sum a_{nb} + S_p$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$$

UCK348 Mühendislikte Bilgisayar Uygulamaları Ders notları, M. Adil Yükselen

56

Yayınım Problemleri - Özet

Sınır koşulları

- Sınır tarafındaki katsayı sifira eşitlenerek, ve
- sınırdan geçen akı da tam veya lineer yaklaşımla bulunmuş haliyle S_u veya S_p ilave kaynak terimlerinde yerleştirilerek uygulanacaktır.

Genişliği $\Delta\zeta$ ve sınır yüzeyi B olan bir-boyutlu bir kontrol hacmi için

Sınır tarafındaki katsayı : $a_B = 0$

Kaynak katkısı Sabit ϕ_B değeri için : $S_u = \frac{2k_B A_B}{\Delta\zeta} \phi_B$ $S_p = -\frac{2k_B A_B}{\Delta\zeta}$

Sabit q_B akısı için : $S_u + S_p \phi_p = q_B$