

EK**SAYISAL ÇÖZÜM TEKNİĞİNİN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ****1-Giriş:**

Sonlu fark denklemlerinin çözümünde genel olarak iki tip hata üretilir:

- Bilgisayarın bir özelliği olan yuvarlatma hatası
- Uygulanan sayısal yöntemdeki hata, yani ayrıklaştırma hatası

Şayet KDD çözümüne sokulan bu hatalar kontrol edilmezse, çözüm sürecinde büyüyen hatalar kararsız bir çözüme yol açar. Bir kararlılık analizi ile hataların anlaşılması ve kontrol edilmesi kısmi diferansiyel denklem çözümünün başarısı için esastır.

Burada model denklemler için kararlılık analizine bir giriş yapılacaktır. Bu analizler daha karmaşık kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılık gereksinimleri için yol gösterici olacaktır. Bazı hallerde kararlılık analizi son derece zor olup, nümerik tecrübe daha gerçekçi bir yaklaşım olur. Model denklemler için kararlılık analizi yanında sayısal tecrübeler kararlı bir çözüm elde etmek için gerekli adım uzunluğu limitleri hakkında bilgi verecektir.

Bu bağlamda iki tür kararlılık analizine ve bunların model denklemler üzerindeki uygulamalarına yer verilecektir:

- Ayrık bozuntuyla kararlılık analizi
- Van Neumann (Fourier) kararlılık analizi

Von Neumann kararlılık analizi daha çok kullanılmakta olup, matematiksel yönden de daha az zorluk çıkartır. Bununla birlikte okuyucuyu yöntemle alıştırmak ve çözüm sürecinde bozuntunun artması veya azalmasını grafiksel olarak göstermek açısından ayrık bozuntu kararlılık analizi de anlatılacaktır.

2-Ayrık Bozuntu Kararlılık Analizi

Bu yöntemde, bir noktaya bir bozuntu sokularak bunun komşu noktalar üzerindeki etkisi incelenir. Şayet çözüm ilerledikçe bozuntu zayıflıyorsa sayısal teknik kararlı, bozuntu büyüyorsa kararsızdır. Bu analiz yöntemini açıklamak için aşağıdaki parabolik model denklemi ele alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Burada α sabit kabul edilmektedir. Açık formülasyonla zamana göre birinci dereceden ileri farklarla ve konuma göre ikinci dereceden merkezi farklarla ayrıklaştırma yapılırak

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2)$$

elde edilir.

Kararlılık analizinde matematiksel işlemler için iki yol izlenebilir.

Birinci yöntemde bütün i noktalarında bir $u_i^n=0$ çözümü kabul edilir. Ve bir n zaman adımında herhangi bir i noktasına bir ε bozuntusu sokularak $n+1$ zaman adımında bütün i noktalarında **çözümlerin durumu** sorgulanır. Buna göre

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2(u_i^n + \varepsilon) + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Buradan n zaman adımındaki bütün çözümlerin sıfır kabul edildiği göz önüne alınarak

$$\frac{u_i^{n+1} - \varepsilon}{\Delta t} = \alpha \frac{-2\varepsilon}{(\Delta x)^2}$$

veya yeni bir düzenleme ile

$$u_i^{n+1} = -\alpha \frac{2\varepsilon}{(\Delta x)^2} \Delta t + \varepsilon \quad \rightarrow \quad u_i^{n+1} = \varepsilon \left[1 - 2\alpha \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) \right]$$

elde edilir. Burada parantez içindeki ikinci terim "**difüzyon sayısı**" olarak adlandırılmakta olup

$$\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = d$$

denilerek sonuçta

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon} = 1 - 2d} \quad (3)$$

bulunur.

Bozuntunun diğer noktalar üzerindeki etkisine geçmeden önce **ikinci yöntem** gözden geçirilecek olursa, bu kez bir i noktasına n zaman adımında bir ε_i^n bozuntusu sokulur ve bu noktada ($n+1$) zaman adımında **bozuntunun durumu** (ε_i^{n+1}) incelenir:

$$\frac{(u_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1}) - (u_i^n + \varepsilon_i^n)}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2(u_i^n + \varepsilon_i^n) + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

Bu denklem

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} - \alpha \frac{2\varepsilon_i^n}{(\Delta x)^2}$$

şeklinde düzenlenir ve eşitliğin her iki yanındaki birinci terimlerin (2) denklemi gereği eşit olduğu hatırlanarak

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = -\alpha \frac{2\varepsilon_i^n}{(\Delta x)^2}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n \left[1 - 2 \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] \quad (5)$$

veya difüzyon sayısının tanımı hatırlanarak

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = 1 - 2d \quad (6)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu sonuç ilk yolla elde edilmiş olan (3) denkleminle eşdeğerdir. Ancak matematiği daha az olduğundan bundan sonraki analiz için ilk yöntem tercih edilecektir.

Burada belirtilmesi gerekli önemli bir nokta, n zaman düzeyinde kabul edilen çözümün analizin çıktısını etkilemeyeceği hususudur.

Tekrar (3) denkleminde dönülecek olursa,

$$\frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon} = 1 - 2d$$

bu eşitlik i noktasındaki bozuntunun $n+1$ zaman düzeyindeki yayılmasını ifade etmektedir. Çözüm sürecinde bozuntunun büyümemesi için hatanın sınırlı kalması gerekir. Bunun için de hata yayılması teriminin mutlak değeri 1'e eşit veya 1'den küçük kılınmalı, yani

$$\left| \frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon} \right| \leq 1 \quad \rightarrow \quad |1 - 2d| \leq 1$$

olmalıdır. Tanımı gereği d büyüklüğü pozitif işaretli olduğu için daima $1 - 2d \leq 1$ dir. O halde yukarıdaki eşitsizliğin gerçekleşmesi için

$$1 - 2d \geq -1 \quad \rightarrow \quad 2 \geq 2d \quad \rightarrow \quad d \leq 1 \quad (7)$$

olması yeterlidir.

Bu bozuntunun $n+1$ anında $i+1$ noktasındaki etkisini hesaplamak için (2) denklemini bir defa da bu nokta için yazalım

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n}{(\Delta x)^2} \quad \rightarrow \quad u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n = d (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n) \quad (8)$$

n anında i noktasına bozuntu ilavesiyle bu denklem

$$u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n = d [u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + (u_i^n + \varepsilon)] = d (u_{i+2}^n - 2u_{i+1}^n + u_i^n) + d \varepsilon$$

şekline gelir. n anında bütün noktadaki çözümlerin sıfır kabul edildiği tekrar hatırlanarak

$$\boxed{u_{i+1}^{n+1} = d \varepsilon} \quad (9a)$$

bulunur. Benzeri işlemlerle $i-1$ noktasında da

$$\boxed{u_{i-1}^{n+1} = d \varepsilon} \quad (9b)$$

sonucunu bulmak mümkündür.

Bozuntunun i noktasında $n+2$ zaman düzeyindeki durumunu görmek için (2) denklemi,

$$\frac{u_i^{n+2} - u_i^{n+1}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

veya

$$u_i^{n+2} = u_i^{n+1} + d(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \quad (10)$$

şeklinde yazılıp burada (3) ve (9) eşitlikleri kullanılırsa

$$u_i^{n+2} = \varepsilon(1 - 2d) + d[d\varepsilon - 2\varepsilon(1 - 2d) + d\varepsilon] \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{u_i^{n+2}}{\varepsilon} = 6d^2 - 4d + 1} \quad (11)$$

elde edilir. Kararlı bir çözüm için

$$\left| \frac{u_i^{n+2}}{\varepsilon} \right| = |6d^2 - 4d + 1| \leq 1$$

olmalıdır. Bu eşitsizliğin gerçekleşmesi için aşağıdaki iki şartın gerçekleşmesi gerekir:

$$6d^2 - 4d + 1 \leq 1 \quad \rightarrow \quad d(3d - 2) \leq 0 \quad \rightarrow \quad d \leq \frac{2}{3} \quad (12)$$

$$6d^2 - 4d + 1 \geq -1 \quad \rightarrow \quad 3d^2 - 2d \geq -1$$

d büyüklüğünün pozitif olduğu tekrar hatırlatılarak ikinci şartın bütün d ler için gerçekleştiği söylenebilir. Buna göre kararlı çözüm için birinci şartın gerçekleşmesi gerektiği anlaşılır.

Şimdi de bozuntunun $n+2$ anında $i+2$ noktasındaki durumunu incelemek için

$$\frac{u_{i+2}^{n+2} - u_{i+2}^{n+1}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+3}^{n+1} - 2u_{i+2}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (13)$$

veya

$$u_{i+2}^{n+2} = u_{i+2}^{n+1} + d(u_{i+3}^{n+1} - 2u_{i+2}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})$$

yazılıp $n+1$ anında $i+2$ ve $i+3$ noktalarındaki çözümlerin henüz sıfır olduğu hatırlanır ve ayrıca (9a) eşitliği kullanılırsa

$$u_{i+2}^{n+2} = d u_{i+1}^{n+1} = d d \varepsilon \quad \rightarrow \quad \boxed{u_{i+2}^{n+2} = d^2 \varepsilon} \quad (14)$$

ve benzeri biçimde $i+1$ noktasında

$$u_{i+1}^{n+2} = u_{i+1}^{n+1} + d(u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1})$$

yazılabilir ve $i+2$ noktasındaki çözümün henüz sıfır olduğu hatırlanarak, ayrıca (3) ve (9a) bağıntıları kullanılarak

$$u_{i+1}^{n+2} = d \varepsilon + d [-2d \varepsilon + \varepsilon(1-2d)] \rightarrow \boxed{u_{i+1}^{n+2} = 2d \varepsilon(1-2d)} \quad (15)$$

elde edilir.

Bu analiz benzeri şekilde daha yüksek zaman düzeyleri için tekrarlanabilir. Zaman düzeyi arttıkça d büyüklüğü üzerinde daha kısıtlayıcı şartlar ortaya konulacağı görülür.

Birçok zaman adımından sonra muhtemelen hata bütün ağ noktalarına yaklaşık aynı büyüklükle erişecektir. Burada iki olasılık dikkate alınabilir.

Birinci olasılık olarak m zaman düzeyinde hataların aynı işaretle olduğu düşünülebilir. Yani

$$u_{i+1}^m = \varepsilon^m$$

$$u_i^m = \varepsilon^m$$

$$u_{i-1}^m = \varepsilon^m$$

ve buna göre $m+1$ zaman adımında

$$\frac{u_i^{m+1} - \varepsilon^m}{\Delta t} = \alpha \frac{\varepsilon^m - 2\varepsilon^m + \varepsilon^m}{(\Delta x)^2} \rightarrow u_i^{m+1} = \varepsilon^m$$

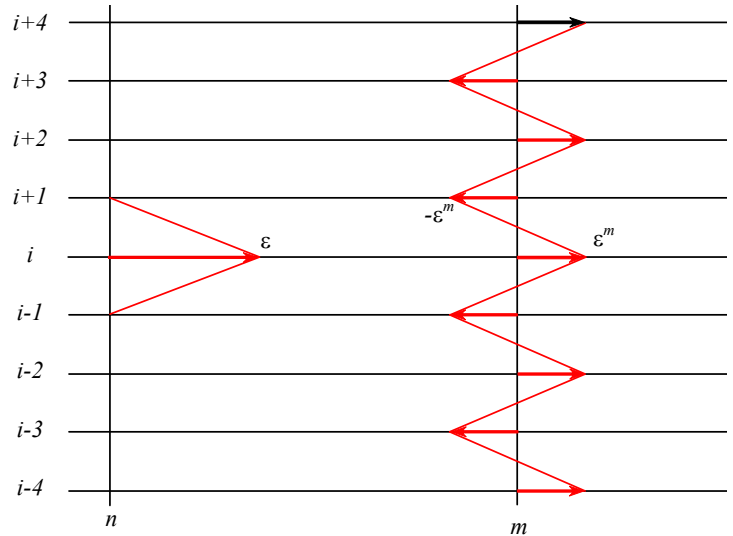
bulunur ki bu sonuca göre bu olasılıkta kararlılık için bir kısıtlama yoktur.

İkinci olasılıkta hatanın ardarda gelen noktalarda işaret değiştireceği düşünülebilir. Bu durum Şekil 1 de şematik olarak gösterilmektedir. Bu halde bir i noktası ve komşu noktalardaki çözümler için

$$u_{i+1}^m = -\varepsilon^m$$

$$u_i^m = \varepsilon^m$$

$$u_{i-1}^m = -\varepsilon^m$$



Şekil 1- m zaman adımında bozuntuların yayılması

ve buna göre $m+1$ zaman adımındaki çözümü bulmak için

$$\frac{u_i^{m+1} - \varepsilon^m}{\Delta t} = \alpha \frac{-\varepsilon^m - 2\varepsilon^m - \varepsilon^m}{(\Delta x)^2}$$

yazılarak

$$u_i^{m+1} = \varepsilon^m + d(-\varepsilon^m - 2\varepsilon^m - \varepsilon^m) \rightarrow \boxed{u_i^{m+1} = (1-4d)\varepsilon^m} \quad (16)$$

elde edilir. Çözümün kararlı olması için

$$\left| \frac{u_i^{m+1}}{\varepsilon^m} \right| = |1 - 4d| \leq 1$$

ve bunun için de aşağıdaki iki şartın gerçekleşmesi gerekir:

$$1 - 4d \leq 1 \quad \rightarrow \quad d \geq 0$$

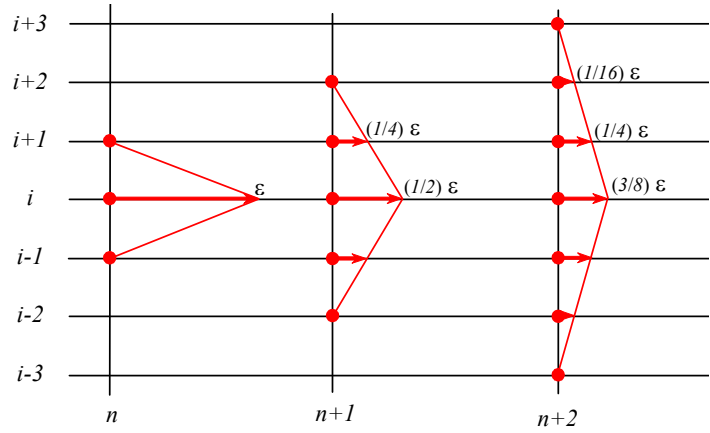
$$1 - 4d \geq -1 \quad \rightarrow \quad \boxed{d \leq \frac{1}{2}} \quad (17)$$

Buradaki birinci şartın kendiliğinden gerçekleştiği bilinmektedir. Buna göre kararlılık için sadece ikinci şartın gerçekleşmesi yeterli olacaktır. Bu şart konumsal ve zamansal adım uzunlukları bakımından

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{1}{2\alpha} (\Delta x)^2} \quad (18)$$

şeklinde bir kısıtlama getirir. Yani (1) parabolik denklemi için (2) eşitliğiyle gösterilen sonlu fark denkleminin kararlı bir çözümünün elde edilebilmesi için adım uzunluklarının bu şart gerçekleşecek biçimde seçilmesi gerekir.

Şimdi de d büyüklüğünün iki farklı değeri için grafiksel bir inceleme yaparak bozuntunun sönümlenmesi veya büyümesi hallerini göstermeye çalışalım.



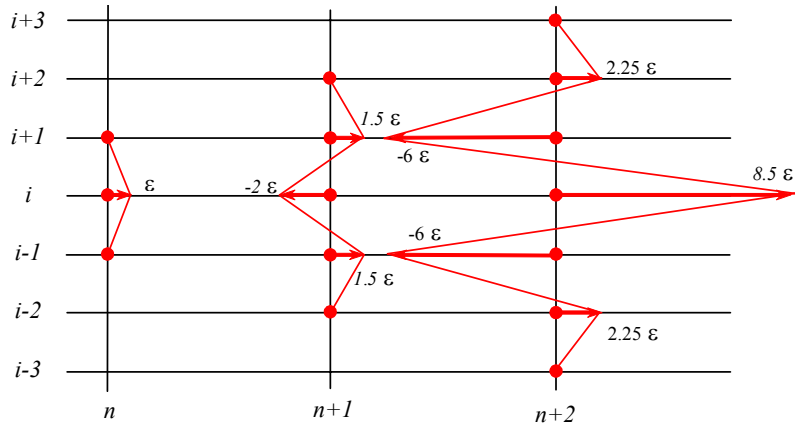
Şekil 2- Model denklem (1) in FTCS açık şemasıyla çözümünde $d=0.25$ için hatanın küçülmesi

İlk olarak $d=0.25$ halini ele alalım. Bu halde n zaman düzeyinde i noktasına sokulacak ε bozuntusu Şekil 2 de gösterildiği biçimde sönümlenecektir.

Kararlılık koşulunun aşıldığı $d=1.5$ halinde ise bozuntu Şekil 3 de gösterildiği gibi büyüyecektir.

Ayrık bozuntu kararlılık analizine ikinci bir örnek olarak birinci-dereceden bir hiperbolik denklem olan bir-boyutlu dalga denklemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a > 0 \quad (19)$$



Şekil 3- Model denklem (1) in FTCS açık şemasıyla çözümünde $d=1.5$ için hatanın büyümesi

Ayrıklaştırmaları zamanda ileri farklarla, uzayda geri farklarla yapalım

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (20)$$

n zaman adımında i noktasına bir ε bozuntusu uygulanırsa

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = -a \frac{(u_i^n + \varepsilon) - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} = (u_i^n + \varepsilon) - c(u_i^n + \varepsilon - u_{i-1}^n), \quad c = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Buradaki c büyüklüğü *Courant sayısı* olarak adlandırılır. Böylece $(i, n+1)$ de çözüm

$$u_i^{n+1} = (1 - c)\varepsilon \quad (21)$$

olur. Kararlı bir çözüm için

$$\left| \frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon} \right| \leq 1 \quad \text{veya} \quad |(1 - c)| \leq 1$$

ve böylece

$$1 - c \leq 1 \quad (22a)$$

ve

$$1 - c \geq -1 \quad (22b)$$

olmalıdır.

(22a) koşulu $-c \leq 0$ olmasını gerektirmekte olup, c büyüklüğü pozitif olduğundan bu koşul her zaman gerçekleşir. (22b) koşulu ise $c \leq 2$ olmasını gerektirmektedir.

Şimdi bozuntunun $(i+1, n+1)$ deki yayılmasını göz önüne alalım.

$$\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - (u_i^n + \varepsilon)}{\Delta x}$$

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^n - c [u_{i+1}^n - (u_i^n + \varepsilon)]$$

Buradan
$$u_{i+1}^{n+1} = c \varepsilon$$

ve kararlı bir çözüm için
$$\left| \frac{u_{i+1}^{n+1}}{\varepsilon} \right| \leq 1$$

koşulundan
$$|c| \leq 1 \quad c \leq 1 \quad \text{ve} \quad c \geq -1$$

elde edilir. Buradaki ikinci koşul yine daima sağlanmaktadır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için $c \leq 1$ olması gerekmektedir.

$(i+1, n+1)$ de ayrıklaştırılmış denklem

$$\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{\Delta x}$$

Şeklinde olup içinde bozuntu büyüklüğü yer almamaktadır. Dolayısıyla $u_{i-1}^{n+1} = 0$ bulunur.

Bu işlemler bir sonraki zaman adımında da aşağıdaki gibi sonuçlar verir:

$$u_i^{n+2} = (1-c)^2 \varepsilon \quad (23a)$$

$$u_{i+1}^{n+2} = 2c(1-c)\varepsilon \quad (23b)$$

$$u_{i+2}^{n+2} = c^2 \varepsilon \quad (23c)$$

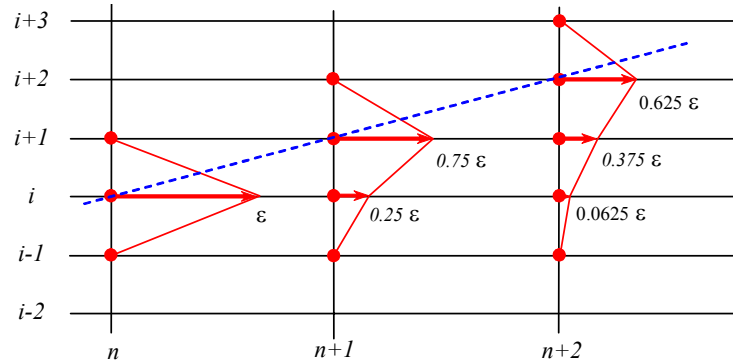
$$u_{i+3}^{n+2} = 0 \quad (23d)$$

$$u_{i-1}^{n+2} = 0 \quad (23e)$$

Kararlılık koşulu uygulanarak çözümün $c \leq 1$ halinde kararlı olacağı görülebilir.

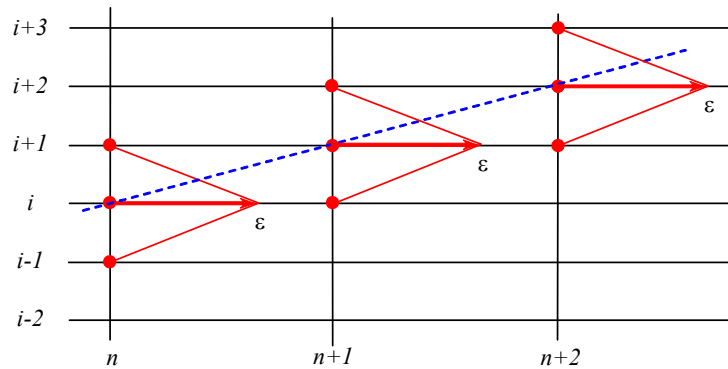
Şimdi ε bozuntusunun $c=0.75$ ve $c=1.5$ hallerindeki azalması veya büyümesini inceleyelim.

$c=0.75$ halindeki kararlılık analizi bozuntuda, [Şekil 4](#) de gösterildiği gibi bir küçülme olduğuna işaret etmektedir.



Şekil 4- Hatanın (20) denklemi için $c=0.75$ halinde küçülmesi

Kararlılık koşulunun üst sınırında, yani $c=1$ için çözümün tam (exact) olduğu belirtilmelidir. Bu durumda bozuntu [Şekil 5](#) de gösterildiği gibi karakteristik çizgi boyunca yayılır.



Şekil 5- Bozuntunun karakteristik çizgi boyunca yayılması

(20) denkleminin kararsız bir çözümü $c=1.5$ halinde elde edilir. Bu durumda bozuntunun yayılması Şekil 6 da gösterilmiştir.

Kararsızlıkla ilgili bir uyarı:

Şekil 3 de sunulan kararsız çözümü tekrar hatırlayalım. Şekil 7 de i noktası için çözümün kararsızlığı çeşitli zaman adımlarında gösterilmiştir. Bu şekilden kararsız çözümün salınımlı karakteri açıkça görülmektedir. Bu durum "dinamik kararsızlık" olarak bilinir. i noktası için çeşitli zaman adımlarındaki bozuntu yayılması

$$u_i^n = \varepsilon$$

$$u_i^{n+1} = (1 - 2d)\varepsilon$$

$$u_i^{n+2} = (6d^2 - 4d + 1)\varepsilon$$

şeklindedir. $d > 1/2$ için kararsız çözümün gerçekten salınımlı olduğu belirtilmelidir. Örneğin $d=1.5$ için

$$u_i^n = \varepsilon > 0$$

$$u_i^{n+1} = -2\varepsilon < 0$$

$$u_i^{n+2} = 8.5\varepsilon > 0$$

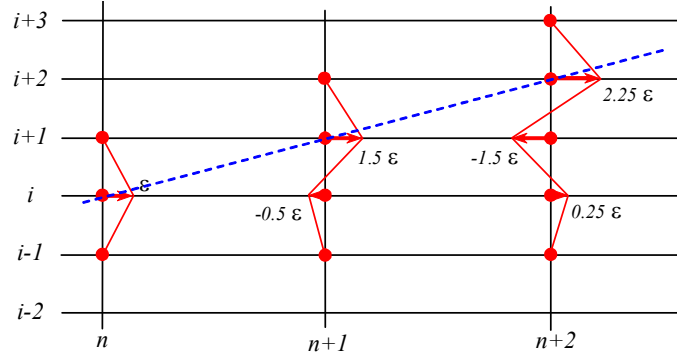
dır. Görüldüğü gibi zamanda ilerlerken her adımda çözüm işaret değiştirmektedir.

Şayet kararsızlık salınımlarla birlikte genlik artacak biçimde ise bu durum bir "statik kararsızlık" olarak sınıflandırılır. Tipik bir sonuç Şekil 8 de görülmektedir.

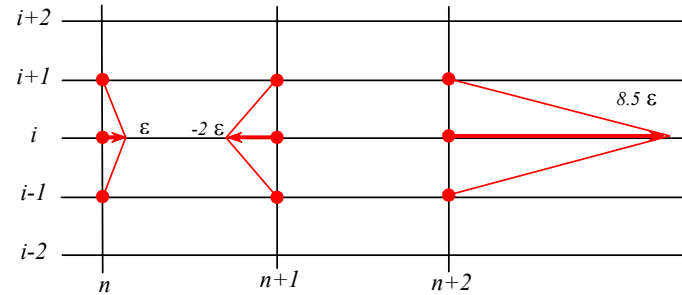
Şayet model denklemden

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

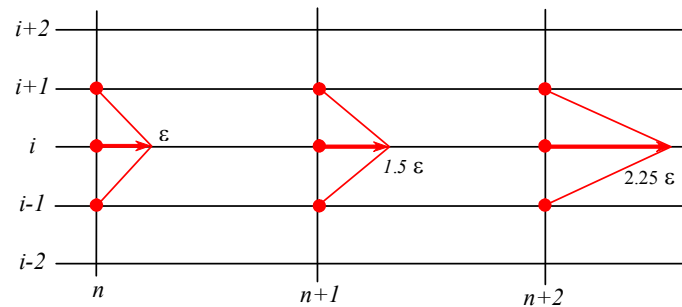
şeklinde taşınım ve yayılım terimlerinin her ikisi de varsa [ayrık bozuntu kararlılık analiz yönteminin](#) uygulanması sorunlu olur. Bu gibi durumlarda [Von Neumann kararlılık analiz yönteminin](#) kullanılması daha pratik olur.



Şekil 6- Hatanın (20) denklemleri için $c=1.5$ halinde büyümesi



Şekil 7- Dinamik kararsızlık



Şekil 8- Statik kararsızlık

3-Von Neumann Kararlılık Analizi

Von Neuman kararlılık analiz yöntemi, sonlu fark denklemlerinin kararlılık gereksinimlerinin tayin etmek için çok kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde sonlu fark denkleminin bir çözümü bir Fourier serisine açılır. Amplifikasyon faktörünün büyümesi veya küçülmesi nümerik algoritmanın kararlı olup olmadığını gösterir.

Lineer bir denklem için çeşitli çözümlerin toplanabildiğini (süperpozisyon) hatırlayalım. Buna göre incelenmekte olan sonlu fark denklemini lineerse Fourier serisinin sadece bir teriminin incelenmesi yeterli olur. Gerçekte denklemin lineer olması Von Neumann kararlılık analiz yönteminin uygulanması için genel bir zorunluluktur. Bu yöntemle ayrıca sınır koşullarının çözümün kararlılığı üzerindeki etkisi de hesaba katılmaz. Bu kısıtlamaları aşmak için non lineer denklemler lokal olarak lineerleştirildikten sonra Von Neumann kararlılık analizi uygulanabilir. Bu durumda nihai kararlılık koşulunun lokal olarak sağlanmış olduğu belirtilmelidir. Dolayısıyla gerçekte gerekli kararlılık koşulu Van Neumann analiziyle elde edilenden daha kısıtlayıcı olabilir. Bununla birlikte yapılan analiz çalışmasından elde edilen sonuçlar kararlılık gerekleriyle ilgili faydalı bilgiler verecektir.

Analiz sürecini göstermek amacıyla u_i^n için Fourier serisi terimlerinden birini

$$u_i^n = U^n e^{IP(\Delta x)i} \quad (24)$$

şeklinde alalım. Burada

$$I = \sqrt{-1}$$

U^n n zaman adımındaki genlik

P x doğrultusunda dalga sayısı, yani $\lambda_x = 2\pi/P$

λ_x dalga uzunluğu

Benzeri şekilde

$$u_i^{n+1} = U^{n+1} e^{IP(\Delta x)i} \quad \text{ve} \quad u_{i\pm 1}^n = U^n e^{IP(\Delta x)(i\pm 1)}$$

yazılabilir. Şayet $\theta = P\Delta x$ şeklinde bir faz açısı tanımlanırsa

$$u_i^n = U^n e^{I\theta i} \quad (25)$$

$$u_i^{n+1} = U^{n+1} e^{I\theta i} \quad (26)$$

$$u_{i\pm 1}^n = U^n e^{I\theta(i\pm 1)} \quad (27)$$

olur. Bu yöntemin uygulamasında daha ileriye gidebilmek için model olarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denklemini ve bu denklemin

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

şeklindeki FTCS açık formül formülasyonunu göz önüne alalım. Bu denklem

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad \text{difüzyon sayısı}$$

olmak üzere

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (28)$$

şeklinde düzenlenebilir. (25), (26) ve (27) bağıntıları bu son denklemde yerleştirilerek

$$U^{n+1} e^{I\theta i} = U^n e^{I\theta i} + d [U^n e^{I\theta(i+1)} - 2U^n e^{I\theta i} + U^n e^{I\theta(i-1)}]$$

sadeleştirmelerden sonra

$$U^{n+1} = U^n + d [U^n e^{I\theta} - 2U^n + U^n e^{-I\theta}]$$

$$U^{n+1} = U^n [1 + d (e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2)]$$

$$U^{n+1} = U^n [1 + 2d (\cos \theta - 1)]$$

elde edilir. Bu bağıntı

$$U^{n+1} = U^n G$$

şeklinde bir büyütme (amplifikasyon) çarpanı tanımlanarak

$$G = 1 - 2d (1 - \cos \theta) \quad (29)$$

bulunur. Kararlı bir çözüm için θ nın bütün değerleri için G nin mutlak değeri sınırlı olmalıdır. Bu koşul matematiksel olarak

$$|G| \leq 1 \quad \text{veya} \quad |1 - 2d (1 - \cos \theta)| \leq 1$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$1 - 2d (1 - \cos \theta) \leq 1 \quad (30)$$

ve

$$1 - 2d (1 - \cos \theta) \geq -1 \quad (31)$$

koşulları elde edilir.

(30) eşitsizliği θ nın bütün değerleri için sağlanmaktadır.

(1-cos θ) büyüklüğünün maksimum değeri 2 olup bu değer için (31) eşitsizliğinin sol tarafı (1-4d) olur. Bunun -1 den büyük olması için de

$$1 - 4d \geq -1 \quad \rightarrow \quad 4d \leq 2$$

olmalıdır. Buna göre kararlılık için koşul

$$d \leq \frac{1}{2} \quad (32)$$

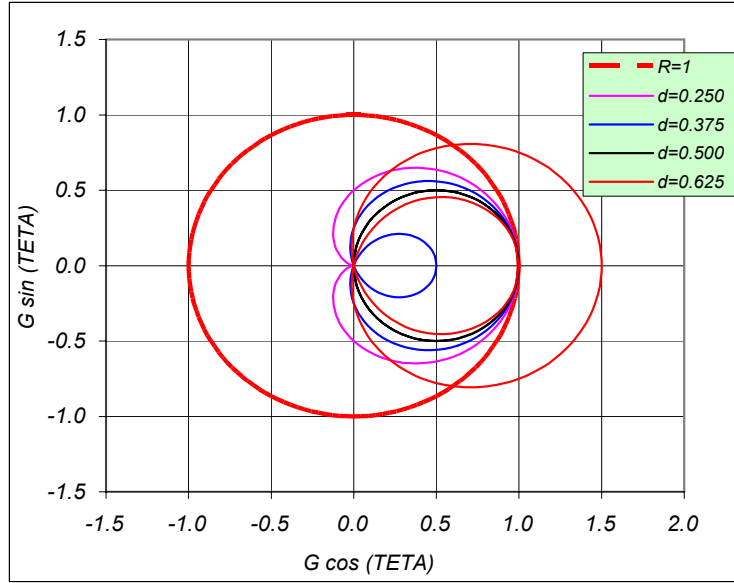
olarak elde edilir. Bu koşul, zaten daha önce ayrık bozuntu kararlılık analiz yöntemiyle bulunduğu için bu şekilde beklenmekte idi.

Bazı durumlarda büyütme faktörü karmaşık bir matematiksel ifade şeklinde olabilir. Böylece, kararlılık için $|G| \leq 1$ isteri uygulandıktan sonra net bir kararlılık koşulu ortaya konulamayabilir. Bu gibi durumlarda büyütme faktörünün grafiksel bir sunumu faydalı olabilir. Bu grafik üzerindeki sayısal denemelerle analiz kolaylaştırılabilir. Ayrıca, basit modeller üzerindeki kararlılık analizlerinden elde edilen deneyimler çok yol gösterici olabilir. Grafik gösterim için (29) bağıntısıyla verilen büyütme çarpanı ifadesini dikkate alalım.

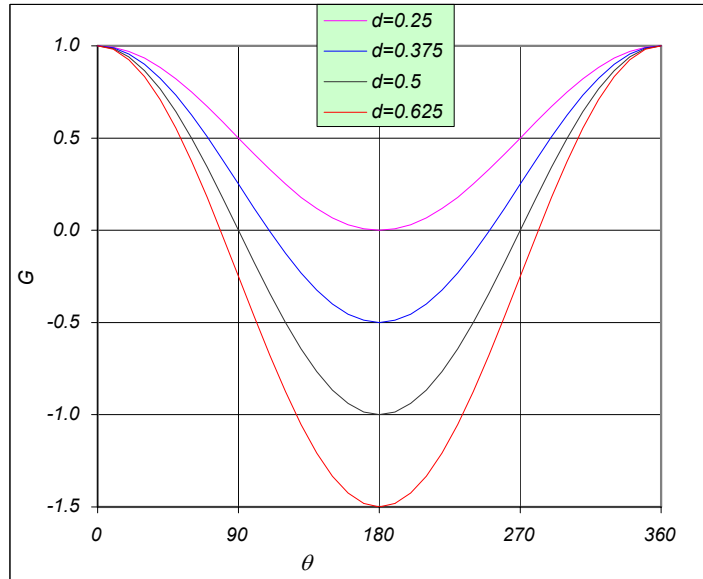
Grafikle temsil Şekil 9a ve 9b de gösterildiği gibi polar koordinatlarda veya kartezyen koordinatlarda yapılabilir.

$d=0.625$ olduğunda Şekil 9a da G nin bazı değerlerinin 1 yarıçaplı dairenin dışında kaldığı dikkati çekmektedir.

Şekil 9b de ise $d=0.625$ için kararlılık sınırının aşıldığı net bir biçimde görülmektedir. Bu durumda kararsız bir çözüme gidileceği anlaşılmaktadır.



a) Polar koordinatlar



b) Kartezyen koordinatlar

Şekil 9- (29) bağıntısıyla verilen büyütme faktörünün çeşitli d değerleri için görünümü

Von Neuman kararlılık analizinin ikinci bir uygulaması için taşınım ve yayılım terimleri olan bir-boyutlu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (33)$$

denklemini ele alalım. Bu denklem için FTCS ile ayrıklaştırılmış açık şema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (34)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$c = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad d = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Von Neumann kararlılık analizi izlenerek

$$U^{n+1} e^{I\theta i} = U^n e^{I\theta i} - \frac{c}{2} [U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta(i-1)}] + d [U^n e^{I\theta(i+1)} - 2U^n e^{I\theta i} + U^n e^{I\theta(i-1)}]$$

sadeleştirme ve düzenlemelerle

$$U^{n+1} = U^n - \frac{c}{2} [U^n e^{I\theta} - U^n e^{-I\theta}] + d [U^n e^{I\theta} - 2U^n + U^n e^{-I\theta}]$$

$$U^{n+1} = U^n \left\{ 1 - \frac{c}{2} (e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + d [(e^{I\theta} + e^{-I\theta}) - 2] \right\} \quad (35)$$

$$U^{n+1} = U^n \{ 1 - c I \sin \theta + 2d (\cos \theta - 1) \} \quad (36)$$

ve böylece büyütme faktörü olarak

$$G = 1 - 2d (1 - \cos \theta) - I c \sin \theta \quad (37)$$

elde edilir. Bu özel problem için büyütme faktörünün reel ve imajiner kısımları olduğu görülmektedir.

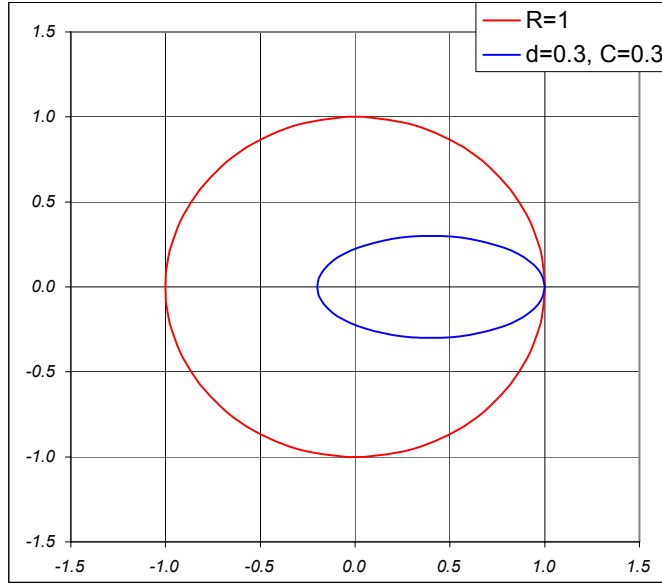
Kararlı bir çözüm büyütme faktörünü modülünün sınırlı olmasını gerektirmektedir.

$$|G|^2 \leq 1$$

Matematiksel argümanları ortaya koymadan önce grafiksel bir inceleme amacıyla (37) denklemi

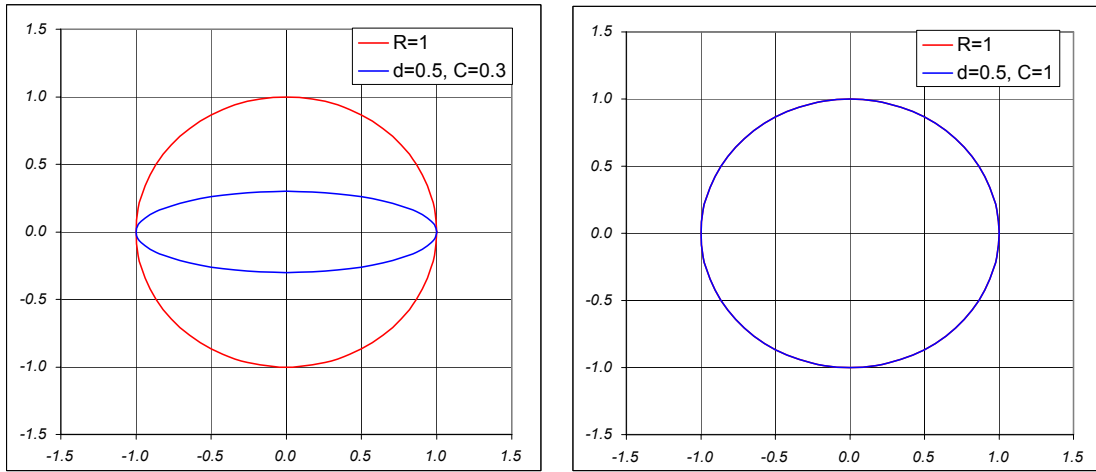
$$G = X + IY = [(1 - 2d) + 2d \cos \theta] - I [c \sin \theta] \quad (38)$$

şeklinde düzenlenirse Şekil 10 da gösterildiği gibi bir elips denklemi elde edilir. Kararlı bir çözüm için $|G| \leq 1$ koşulu bu elipsin birim yarıçaplı dairenin içinde kalması gerektiğini gösterir.



Şekil 10- (38) bağıntısıyla verilen büyütme faktörünün görünümü

En-uç iki durumda $1-2d=0$ veya $d=0.5$ (Şekil 11a) veya $c=1$ (Şekil 11b) dir. Böylece kararlılık koşullarının $d \leq 0.5$ ve $c \leq 1$ olduğu görülür.

a) $d=0.5$ halib) $c=1$ hali

Şekil 11- Büyütme faktörü için uç-durumlar

Daha kısıtlayıcı bir koşul (38) bağıntısının modülünün sınırlı olması koşulundan ($|G|^2 \leq 1$) elde edilir.

$$|G|^2 = G\bar{G} = \{(1-2d) + 2d \cos \theta\} - I [c \sin \theta] \cdot \{(1-2d) + 2d \cos \theta\} + I [c \sin \theta]$$

veya

$$|G|^2 = [(1-2d) + 2d \cos \theta]^2 + [c \sin \theta]^2 \quad (39)$$

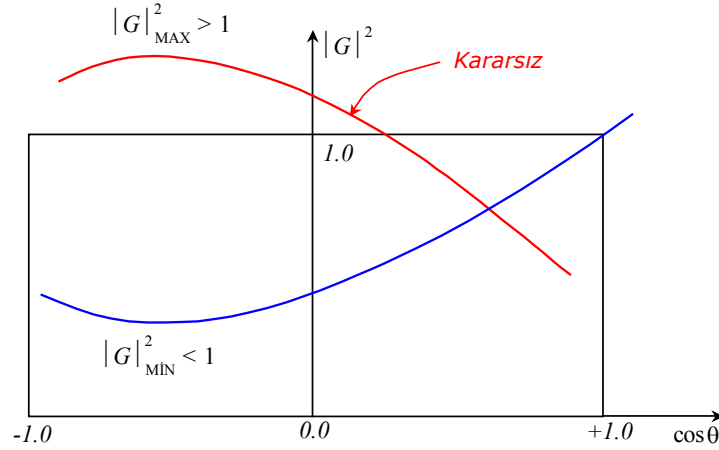
Bu bağıntı kuartatik biçiminde yazılırsa

$$|G|^2 = (1 - 2d)^2 + 4d^2 \cos^2 \theta + 4d(1 - 2d)\cos \theta + c^2 [1 - \cos^2 \theta]$$

veya

$$|G|^2 = (4d^2 - c^2)\cos^2 \theta + 4d(1 - 2d)\cos \theta + 4d(d - 1) + c^2 + 1 \quad (40)$$

Bu kuadratik denklem iki eğriyi temsil etmekte olup bunlardan biri içbükey (bir minimumu var) eğri ve diğeri de bir dışbükey (bir maksimumu var) eğridir (Şekil 12).



Şekil 12- (40) denkleminin kuadratik eğrileri

Gösterilebilir ki kararlı bir çözüm için bu kuadratik fonksiyonun bir maksimumu bulunmamalı, yani eğri dışbükey olmamalıdır.

$|G|^2$ fonksiyonunun $\cos \theta$ ya göre birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\frac{d|G|^2}{d(\cos \theta)} = (4d^2 - c^2) 2 \cos \theta + 4d(1 - 2d) \quad (41)$$

$$\frac{d^2|G|^2}{d(\cos \theta)^2} = 2(4d^2 - c^2) \quad (42)$$

dır. Fonksiyonun bir maksimumu olup, şayet ikinci türev negatif olursa, yani $4d^2 - c^2 < 0$ veya $c > 2d$ ise dışbükey bir eğri olacaktır. Şimdi (41) denkleminde

$$(\cos \theta)_{\max} = -\frac{4d(1 - 2d)}{2(4d^2 - c^2)} = \frac{2d(2d - 1)}{4d^2 - c^2} \quad (43)$$

(40) bağıntısında kullanılarak

$$|G|_{\max}^2 = (4d^2 - c^2) \left[\frac{2d(2d - 1)}{4d^2 - c^2} \right]^2 + 4d(1 - 2d) \frac{2d(2d - 1)}{4d^2 - c^2} + 4d(d - 1) + c^2 + 1$$

$$|G|_{\max}^2 = \frac{c^2(c^2 - 4d + 1)}{c^2 - 4d^2} \quad (44)$$

$|G|^2 \leq 1$ koşulu uygulanarak

$$c^2(c^2 - 4d + 1) \leq c^2 - 4d^2$$

veya

$$(c^2 - 2d)^2 \leq 0$$

elde edilir. Bu son ifade karesi alınan bir büyüklük olarak daima pozitif olduğundan kararlılık koşulunu sağlamaz. Buna göre (40) denkleminin temsil edilen kuadratik eğrinin dışbükey olmasına izin verilemez. Bu durumda öncelikle (42) bağıntısıyla verilen ikinci türevin pozitif olması için

$$c \leq 2d \quad (45)$$

koşulu zorlanmalıdır. Bu koşul bir maksimum olmamasını sağlayacaktır. Bununla birlikte $\cos\theta$ nın ekstremum değerleri, yani ± 1 değerlerinin halen araştırılması gerekir.

$\cos\theta=1$ için (40) denkleminin $|G|^2 = 1$ elde edilir ki kararlılık isteri sağlanır.

$\cos\theta=-1$ için $|G|^2 = 16d^2 - 8d + 1$ olup $|G|^2 \leq 1$ koşulu uygulanarak

$$d \leq \frac{1}{2} \quad (46)$$

elde edilir. Bu sonuç daha önce (32) bağıntısı olarak bulunmuştu. (45) ve (46) bağıntıları birleştirilirse

$$c \leq 1 \quad (47)$$

bulunur.

(45) bağıntısından daha kısıtlayıcı bir ister (45) ve (47) bağıntılarının birleştirilmesiyle

$$c^2 \leq 2d \quad (48)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece, (34) denkleminin verilen FTCS açık şeması için kararlılık isteri

$$d \leq \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad c^2 \leq 2d$$

olmaktadır. Courant sayısı ve difüzyon sayısının tanımları kullanılarak (45) koşulu

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

veya

$$a \frac{\Delta x}{\alpha} \leq 2 \quad (49)$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradaki $a \Delta x / \alpha$ büyüklüğü "*Hücre Reynolds Sayısı - Re_c* " olarak adlandırılır. Böylece

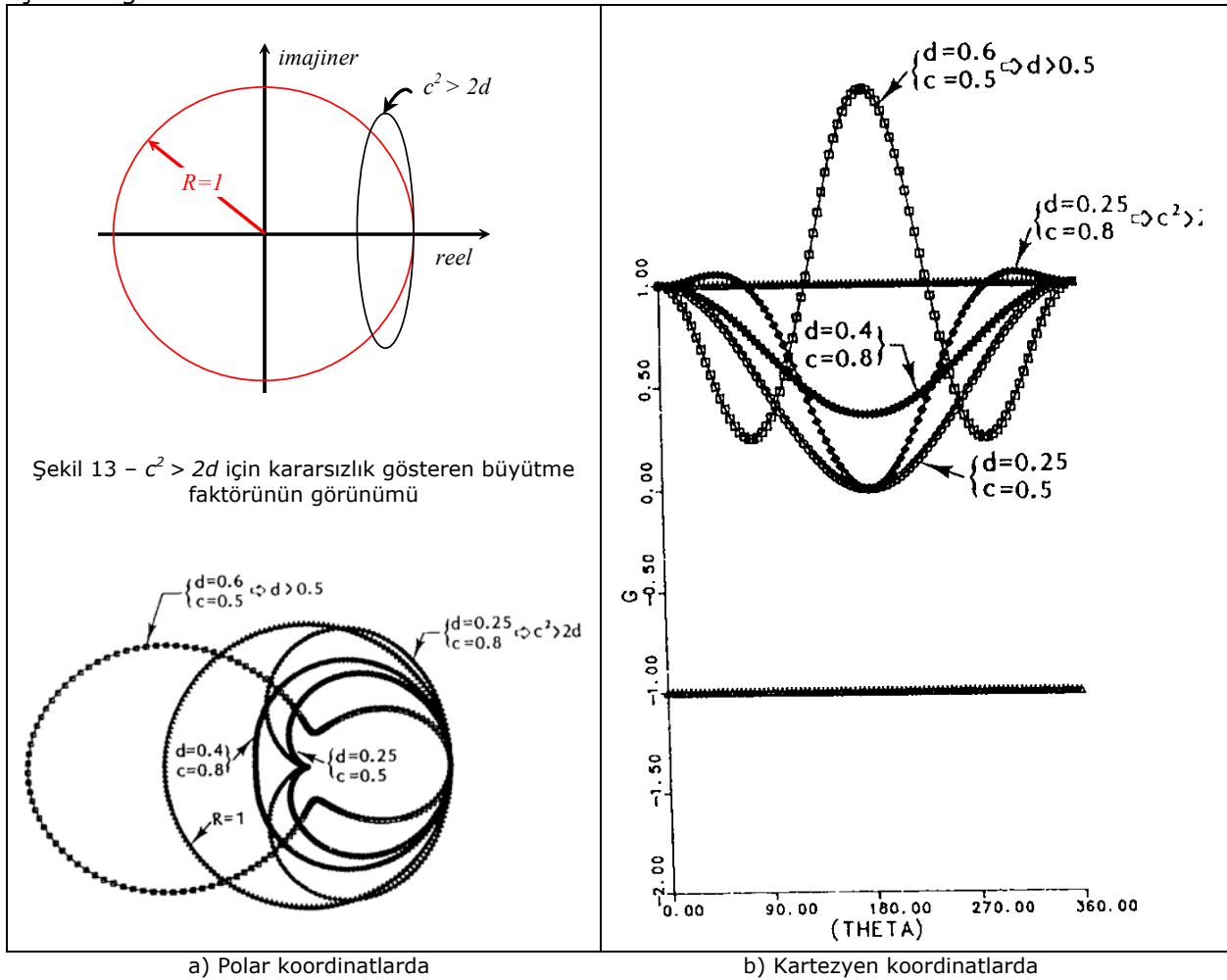
$$Re_c \leq 2 \quad (50)$$

elde edilir.

Benzeri şekilde, daha kısıtlayıcı olan (48) koşulu da

$$Re_c \leq (2/c) \quad (51)$$

şekline getirilebilir.



Şekil 14 - (40) bağıntısıyla verilen büyütme faktörü

Büyütme faktörünün çeşitli c ve d değerleri için grafiksel görünümü Şekil 14a ve 14b de sunulmuştur.

Bu bölümde tartışılan sonlu fark denklemlerine ait incelemelere n ve $n+1$ olmak üzere iki zaman adımı dahil edilmiştir. Bazı sonlu fark denklemlerinde $n-1$, n ve $n+1$ olmak üzere üç zaman adımı birden yer alabilir. Kararlılık analizinin üç-zaman adımını içeren sonlu fark denklemlerine uygulanmasını göstermek için

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (52)$$

dalga denklemini göz önüne alarak merkezi farklarla ayrıklaştırma yapalım:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (53)$$

Courant sayısının $c = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ tanımıyla birlikte bu denklem

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - c(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

şeklinde düzenlenebilir. Von Neumann kararlılık analizinin uygulanmasıyla

$$U^{n+1} e^{I\theta i} = U^{n-1} e^{I\theta i} - c (U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta(i-1)})$$

$$U^{n+1} = U^{n-1} - c (U^n e^{I\theta} - U^n e^{-I\theta})$$

$$U^{n+1} = U^{n-1} - c (2I \sin \theta) U^n$$

veya $-2I c \sin \theta = A$ olmak üzere

$$U^{n+1} = A U^n + U^{n-1} \quad (54)$$

elde edilir. Ayrıca

$$U^n = U^n + (0) U^{n-1} \quad (55)$$

şeklinde bir eşitlik yazılabilir. Son iki eşitlik birlikte matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{Bmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{Bmatrix}$$

böylece büyütme faktörü de bir matris biçiminde yazılmış olur.

$$G = \begin{bmatrix} A & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

Kararlılık için G matrisinin λ öz değerleri $|\lambda| \leq 1$ koşulunu sağlamalıdır. Buna göre

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & I \\ I & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda A - I = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4}}{2}$$

veya A nın tanımı kullanılarak

$$\lambda_{1,2} = \frac{I}{2} \left[-2I c \sin \theta \pm \sqrt{4 - 4c^2 \sin^2 \theta} \right]$$

$$\lambda_{1,2} = -I c \sin \theta \pm \sqrt{I - c^2 \sin^2 \theta} \quad (56)$$

elde edilir. Bu aşamada iki hal incelenmelidir.

Şayet $c^2 \sin^2 \theta \leq I$ ise $|\lambda_{1,2}|^2 = c^2 \sin^2 \theta + (I - c^2 \sin^2 \theta) = I$

olup kararlılık gereğinin sağlandığı görülmektedir. En kısıtlayıcı durumla $\sin^2\theta$ nin maksimum değerinde karşılaşılar ki bu durumda $c \leq 1$ dir.

İkinci olarak $c^2 \sin^2 \theta > 1$ olması halinde

$$\lambda_{1,2} = I \left[-c \sin \theta \pm \sqrt{c^2 \sin^2 \theta - 1} \right]$$

$$|\lambda_{1,2}|^2 = c^2 \sin^2 \theta + (c^2 \sin^2 \theta - 1) \pm 2c \sin \theta \sqrt{c^2 \sin^2 \theta - 1}$$

$$|\lambda_{1,2}|^2 = 2c^2 \sin^2 \theta \pm 2c \sin \theta \sqrt{c^2 \sin^2 \theta - 1} - 1$$

yazılabilir. Kararlılık gereği $|\lambda|^2 \leq 1 \rightarrow 2c^2 \sin^2 \theta \pm 2c \sin \theta \sqrt{c^2 \sin^2 \theta - 1} - 1 \leq 1$

olup + işaretli ifadeden $c^2 \sin^2 \theta + c \sin \theta \sqrt{c^2 \sin^2 \theta - 1} < 1$

olması gerektiği ortaya çıkar ki, $c^2 \sin^2 \theta > 1$ için bu koşulun asla sağlanamadığı görülmektedir.

Buna göre (53) denklemi için kararlılık koşulu $c \leq 1$ olmaktadır.

Kararlılık analizinin bir başka örneği için ikinci dereceden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (52)$$

dalga denklemini ele alalım. Bu lineer denklemde u akışkan hızı a da sabit olduğu kabul edilen ses hızıdır.

(57) denkleminin analitik çözümünün

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

şeklinde ifade edilebileceği gösterilebilir. Bu çözüm için karakteristik denklemler

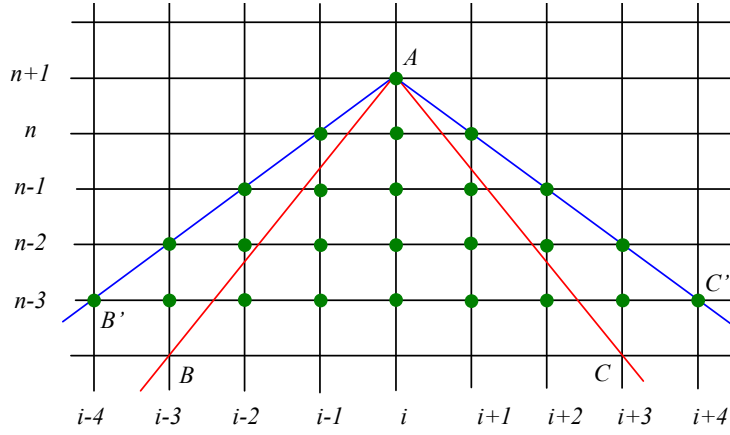
$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2$$

şeklindedir. Bu karakteristiklerin $(x-t)$ düzleminde eğimleri $dx/dt = \pm a$ (Şekil 15 deki AB ve AC doğruları) dir. A noktasındaki büyüklükler BAC bölgesinden etkilenmekte olup bu bölgeye A noktasının *bağımlılık bölgesi* adı verilir.

Şimdi (57) denkleminin türevler için ikinci-mertebeden merkezi fark uygulanarak elde edilen sonlu fark açılımını göz önüne alalım

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = -a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (58)$$

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$



Şekil 15 - Fiziksel ve hesaplanan karakteristik çizgileri

Courant sayısı cinsinden

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + c^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (59)$$

(59) denkleminin i noktasında $n+1$ zaman adımında yeni hesaplanan değerlerin i ve $i\pm 1$ noktalarında n zaman adımında ve i noktasında $n-1$ zaman adımında bulunan değerlere bağlı olduğunu göstermektedir. Benzeri şekilde $n+1$ zaman adımında i noktasındaki değerler de $n+2$ zaman adımında $i, i+1$ noktalarına yansımaktadır.

Von Neuman kararlılık analizi $c^2 \leq 1$ halinde kararlı çözüm elde edileceğini gösterir (bu hususun ispatı egzersiz olarak bırakılmıştır). Böylece nümerik çözüm için kararlılık koşulu

$$\left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq 1 \quad \text{veya} \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \pm \frac{1}{a}$$

şeklindedir. Bu bağıntı göstermektedir ki, Şekil 15 de $B'AC'$ ile belirtilen sonlu fark ortamının bağımlılık bölgesi BAC ile belirtilen sürekli ortamın bağımlılık bölgesini içine almalıdır. Bu sonuç, $B'AB$ ve $C'AC$ bölgelerinde gerekli olmayan bilgi yayılması nedeniyle doğru değildir. Açık ki, $c=1$ olduğu, yani sürekli ortamla hesaplama ortamına ait bölgeler eşdeğer olduğu zaman nümerik çözüm tam (exact) olacaktır. Diğer taraftan, şayet sayısal bölge sürekli ortam bölgesinin tamamını içermediği takdirde hesaplamalar için gerekli hayati bilgilerin bir kısmı silinecek ve kararsız bir çözümle sonuçlanacaktır.

Bu aşamada bir denklem sisteminin kararlılık analizinin ele alınması uygun olacaktır. Bu amaçla aşağıdaki model denklemleri göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (61)$$

Denlem sistemi matris biçiminde düzenlenebilir:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + [A] \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \phi = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sonlu fark açılımı

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + [A]^n \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

açık şema biçiminde düzenlenerek

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - [A] \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n)$$

Von Neuman kararlılık analizi uygulanarak

$$\phi^{n+1} e^{I\theta i} = \phi^n e^{I\theta i} - [A] \frac{\Delta t}{\Delta x} [\phi^n e^{I\theta i} - \phi^n e^{I\theta(i-1)}]$$

ortak büyüklükler sadeleştirilerek

$$\phi^{n+1} = \phi^n - [A] \frac{\Delta t}{\Delta x} [I - e^{-I\theta}] \phi^n$$

Böylece büyütme matrisi

$$[G] = [I D] - \frac{\Delta t}{\Delta x} (I - \cos \theta + I \sin \theta) [A]$$

veya

$$[G] = \left\{ [I D] - (I - \cos \theta) \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) [A] \right\} - I \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \theta \right\} [A]$$

olarak elde edilir. Burada $[ID]$ birim matristir. Kararlılık için $[G]$ matrisinin en büyük özdeğeri $|\lambda_{G_{max}}| \leq 1$ koşulunu sağlamalıdır. Kararlılık koşulunun bir eşdeğeri de $|\lambda_{max} \Delta t / \Delta x| \leq 1$ şeklindedir. Burada λ_{max} büyüklüğü $[A]$ matrisinin en büyük özdeğeri. Böylece, buradaki örnek için

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_{max} = \sqrt{b_1 a_2}$$

ve kararlılık isteri

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{b_1 a_2} \leq 1 \quad (62)$$

olarak elde edilir.