Ek 2-1

SONLU FARK FORMÜLASYONLARI

Kısmi diferansiyel denklemlerde yer alan türevlerin bilgisayarda sayısal hesabı için yaklaşık formda yazılması gerekir. Bu tip ayrıklaştırma işlemlerine genel olarak sonlu fark formülasyonu adı verilir.

Sonlu fark formülasyonları çoğu zaman Taylor seri açılımına dayanılarak yapılır. Bunun yanında polinomlar yardımıyla da ayrıklaştırma yapılabilir.

Taylor seri açılımı ve Birinci türev için yaklaşımlar

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $(x+\Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x)+(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots\ldots. \\ &= f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\Delta x)}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \end{aligned} \qquad \text{(Ek5.1)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan birinci türev çekilirse;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\ldots\ldots. \qquad \text{(Ek5.2)}$$

veya

$$O(\Delta x)=-\frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\ldots\ldots. \qquad \text{(Ek5.3)}$$

hata terimi olmak üzere kısaca,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+O(\Delta x) \qquad \text{(Ek5.4)}$$

yazılabilir. Bu ifade f büyüklüğünün x 'e göre birinci türevi için yapılmış birinci dereceden bir yaklaşımdır. İndissel formda

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i=\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}+O(\Delta x)} \qquad \text{(Ek5.5)}$$

şeklinde gösterilir ve türev için *birinci mertebeden ileri fark formülasyonu* olarak adlandırılır. Adım uzunluğu azaltıldıkça bu yaklaşık formülün gerçek türeve o kadar yakın olacağı açıktır.

Taylor açılımı,

$$f(x-\Delta x)=f(x)-(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\ldots\ldots. \qquad \text{(Ek5.6)}$$

şeklinde yazılarak benzeri işlemlerle

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)} \qquad \text{(Ek5.7)}$$

şeklinde *birinci mertebeden geri fark formülasyonu*, veya (Ek5.1) ve (Ek5.6) Taylor açılımları birbirinden çıkartılarak

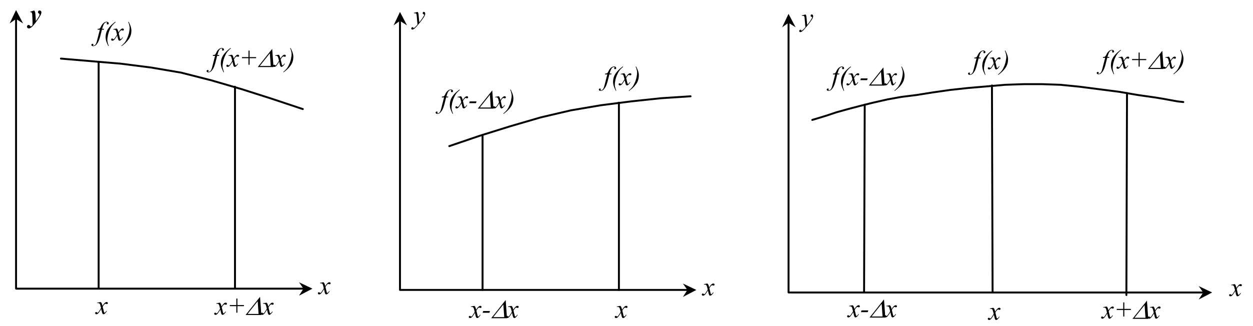
$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\Delta x\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots\ldots \qquad \text{(Ek5.8)}$$

benzeri işlemler sonucu

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2} \qquad \text{(Ek5.9)}$$

şeklinde *merkezi fark formülasyonu* elde edilebilir. Bu formülasyonun *ikinci mertebeden* olduğu dikkati çekmektedir.

Birinci türev için yazılan formülasyonlarda hangi ağ noktalarının kullanıldığı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



a) İleri fark *b) Geri fark* *c) Merkezi fark*

<u>İkinci türev için formülasyon</u>

Taylor serisinin ($x+2\Delta x$) ve ($x-2\Delta x$) noktalarındaki açılımları

$$f(x+2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots\ldots. \qquad \text{(Ek5.10)}$$

$$f(x-2\Delta x) = f(x) - (2\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots\ldots. \qquad \text{(Ek5.11)}$$

şeklinde yazılabilir. (Ek5.1) eşitliği *2* ile çarpıp (Ek5.10) denkleminden çıkartılırsa;

$$f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \ldots.. \qquad \text{(Ek5.12)}$$

ve buradan ikinci türev çekilirse,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \qquad \text{(Ek5.13)}$$

elde edilir. Bu bağıntı indissel formda yazılarak *ikinci türevin*

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)} \qquad \text{(Ek5.14)}$$

şeklinde *ileri fark formülü* elde edilir. Benzeri işlemler (Ek5.1) ve (Ek5.11) seri açılımları arasında yapılırsa *ikinci türevin geri fark formülü*

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)} \qquad \text{(Ek5.15)}$$

şeklinde ve (Ek5.1) ve (Ek5.2) bağıntıları birbiriyle toplanarak benzeri işlemler sonucu *ikinci türevin merkezi fark formülü*

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2} \qquad \text{(Ek5.16)}$$

şeklinde elde edilir.

Sonlu fark denklemi

Bir kısmi diferansiyel denklemde yer alan bütün türevler yukarda gösterilen yöntemlerle ayrıklaştırılarak denklemin tamamı ayrık formda yazılır ve sayısal çözümü bu şekilde araştırılır.

Örnek olarak bir $f = f(t, x, y)$ bağımlı değişkenine ait

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(Ek5.17)}$$

denklemini ayrıklaştıralım. Zamana göre türevin sonlu fark açılımında *n* üst-indisi, konuma göre türevlerin sonlu fark açılımlarında da *x* yönünde *i* alt-indisi ve *y* yönünde de *j* alt-indisi kullanalım. *t* anında *f* fonksiyonunun bütün x, y konumlarındaki değerleri bilinsin. Buna göre zamana göre türevin ileri farkla hesaplanması uygun olur:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t) \qquad \text{(Ek5.18)}$$

Konuma göre türevlerin t_n anında veya t_{n+1} anında ayrıklaştırılmasına göre iki farklı sonlu fark denklemi elde edilebilir. t_n anında ayrıklaştırılma yapılırsa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^{n} - 2f_{i,j}^{n} + f_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \qquad \text{(Ek5.19)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^{n} - 2f_{i,j}^{n} + f_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \qquad \text{(Ek5.20)}$$

Böylece (Ek5.17) denkleminin sonlu fark formülasyonu

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right] + O\left[\Delta t\,,(\Delta x)^2\,,(\Delta y)^2\right] \tag{Ek5.21}$$

şekline gelir. t_{n+1} anında ayrıklaştırılma yapıldığı taktirde ise

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\alpha\left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i,j+1}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right] + O\left[\Delta t\,,(\Delta x)^2\,,(\Delta y)^2\right] \tag{Ek5.22}$$

elde edilir.

Bu iki formülasyon arasındaki temel farklılık elde edilen ayrıklaştırılmış denklemlerdeki bilinmeyen sayısıdır. (Ek5.21) denkleminde bir tek bilinmeyen var iken, (Ek5.22) denkleminde 5 bilinmeyen vardır.

(Ek5.21) denklemi bütün ağ noktalarında kolaylıkla hesaplanır ve bu formülasyona "*açık (explicit) formülasyon*" adı verilir.

Buna karşılık (Ek5.22) denkleminin her bir ağ noktasında bağımsız olarak çözümü mümkün değildir. Bütün ağ noktalarında yazıldıktan sonra elde edilen denklem sisteminin eş zamanlı olarak çözülmesi gerekir. Bu nedenle bu formülasyona "*kapalı (explicit) formülasyon*" adı verilir.