THOMAS YÖNTEMİ

Dolu katsayılar matrisine sahip lineer denklem takımı

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{N,i} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_N \end{Bmatrix}$$

Gauss eliminasyon yöntemi

$$\left\{ \begin{pmatrix} P = a_{ik} / a_{kk} \\ a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} P \, ; \quad j = k+1, k+2, \ldots .N+1 \end{pmatrix} ; \quad i = k+1, k+2, \ldots .N \right\} ; \quad k = 1,2, \ldots .N-1$$

$$x_N = \frac{a_{NN+1}}{a_{NN}} , \qquad x_i = \frac{a_{iN+1} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad ; \quad i = N-1, N-2, \ldots .2,1$$

THOMAS YÖNTEMİ

Üç-diyagonalli katsayılar matrisine sahip denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_N \end{Bmatrix}$$

Yukarıdaki dizi yapısının kullanılması halinde:

- Çok sayıda sıfır elemana sahip bir kare matris bilgisayar hafızasında "gereksiz" yerler işgal edecektir.

- Gauss- eliminasyon yönteminin uygulanması halinde sıfır elemanlar üzerinde gereksiz yere çok sayıda işlem yapılacaktır.

THOMAS YÖNTEMİ

Thomas algoritması Gauss eliminasyon yönteminin üç kolonlu bir dikdörtgensel matris kullanılarak yapılan özel bir uygulamasıdır.

$$\begin{bmatrix} m_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_2 & m_2 & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & m_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & m_i & u_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & m_N \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \cdots \\ r_i \\ \cdots \\ r_N \end{Bmatrix}$$

ilk denklem l_2 ile ve ikinci denklem de m_1 ile çarpılıp birinci denklem ikincisinden çıkarıldıktan sonra her iki taraf m_1 ile bölünerek

$$l_2 m_1 x_1 + l_2 u_1 x_2 = l_2 r_1$$
$$m_1 l_2 x_1 + m_1 m_2 x_2 + m_1 u_2 x_3 = m_1 r_2$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_2 - \frac{l_2 u_1}{m_1} \right) x_2 + u_2 x_3 = r_2 - \frac{r_1 l_2}{m_1}$$

$$\Downarrow$$

$$m_2' = m_2 - \frac{l_2 u_1}{m_1} \quad ; \quad r_2' = r_2 - \frac{r_1 l_2}{m_1}$$ olmak üzere $$m_2' x_2 + u_2 x_3 = r_2'$$

THOMAS YÖNTEMİ

Bu durumda denklem sistem:

$$
\begin{bmatrix}
m_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & m_2' & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & l_3 & m_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & l_i & m_i & u_i & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & m_N
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3 \\ \cdots \\ r_i \\ \cdots \\ r_N \end{Bmatrix}
$$

İkinci denklem l_3 ile ve üçüncü denklem de m_2' ile çarpılıp yine birinci denklem ikincisinden çıkarılıp, karşılıklı m_2' ile bölünerek

$$
\begin{aligned}
& l_3 d_2' x_2 + l_3 u_2 x_3 = l_3 r_2' \\
& m_2' l_3 x_2 + m_2' d_3 x_3 + m_2' u_3 x_4 = m_2' r_3
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\left(m_3 - \frac{l_3 u_2}{m_2'} \right) x_3 + u_3 x_4 = r_3 - \frac{l_3 r_2'}{m_2'}
$$

$$
m_3' = m_3 - \frac{l_3 u_2}{m_2'} \quad ; \quad r_3' = r_3 - \frac{l_2 r_2'}{m_2'}
$$

olmak üzere

$$
\Downarrow
$$

$$
m_3' x_3 + u_3 x_4 = r_3'
$$

THOMAS YÖNTEMİ

İki satır için izah edilen işlemler bütün satırlar için uygulanacak biçimde genelleştirilirse:

$$m_i^{'} = m_i - \frac{l_i u_{i-1}}{m_{i-1}^{'}} \quad ; \quad r_i^{'} = r_i - \frac{l_i r_{i-1}^{'}}{m_{i-1}^{'}} \qquad (i = 2,3,....N)$$

Bu durumda denklem sistemi üst-üçgensel hale gelir

$$\begin{bmatrix} m_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_2^{'} & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3^{'} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_i^{'} & u_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N^{'} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2^{'} \\ r_3^{'} \\ \cdots \\ r_i^{'} \\ \cdots \\ r_N^{'} \end{Bmatrix}$$

Geri süpürme yoluyla çözümler elde edilir:

$$x_N = \frac{r_N^{'}}{m_N^{'}} , \qquad x_i = \frac{r_i^{'} - u_i x_{i+1}}{m_i^{'}}$$

THOMAS YÖNTEMİ - Örnek vBasic alt programı

```
Sub Thomas(N,lo,mi,up,r,x)

    ReDim c(N), d(N)

'   Diyagonal altı elemanların sıfırlanması

    d(1) = mi(1)
    c(1) = r(1)
    For i = 2 To N
        d(i) = mi(i) - lo(i) * up(i - 1) / d(i - 1)
        c(i) = r(i) - lo(i) * c(i - 1) / d(i - 1)
    Next i

'   Geri süpürme

    x(N) = c(N) / d(N)
    For i = N - 1 To 1 Step -1
        x(i) = (c(i) - up(i) * x(i + 1)) / d(i)
    Next i

End Sub
```