

BÖLÜM 2

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

2.1- Kısmi diferansiyel denklemlerin türleri

2.2- Eliptik denklemler

2.2.1 Levha boyunca sıcaklık dağılımının hesaplanması

2.2.2 İteratif yöntemler

2.2.3 Liebmann yönteminde yakınsamanın hızlandırılması

2.2.4 Poisson denklemi

2.2.5 Türev cinsinden sınır koşulu

2.2.6. Değişen yönlü kapalı formülasyon (ADI) yöntemi

2.3- Parabolik denklemler

2.3.1 Isı denkleminin çözümü

2.3.2 Crank-Nicolson yöntemi

2.3.3 Teta yöntemi

2.4- Hiperbolik denklemler

2.4.1 Titreşen yay problemi:

2.4.2 D'Alembert çözümü

2.4.3 Başlangıç anında hızların sıfır olmaması hali

2.4.4 İki boyutlu dalga denklemi

2.Ek1- Sonlu fark formülasyonları

BÖLÜM 2

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

2.1 Kısmi diferansiyel denklemlerin türleri

Kısmi diferansiyel denklemler üç tip olarak sınıflandırılır.

x ve y değişkenlerine bağlı olarak

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

şeklinde tanımlanan ikinci dereceden bir polinomun eğrisi kuadratik bir eğridir. Bu eğri:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{ise bir elipstir}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{ise bir parabolüdür}$$

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{ise bir hiperboldür.}$$

x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olan bir u değişkeni için ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u) = 0$$

şeklinde tanımlandığında benzeri terminoloji kullanılarak denklemin

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{ise eliptik}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{ise parabolik}$$

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{ise hiperbolik}$$

olduğu ifade edilir.

Kısmi diferansiyel denklemler çeşitli tipte sınır şartlarıyla birlikte verilir. Sınır şartı u cinsinden verilmişse "*Dirichlet tipi sınır şartı*" olarak, u 'nun gradyanı cinsinden verilmişse "*Neumann tipi sınır şartı*" olarak adlandırılır. u ve gradyanı birlikte verildiği takdirde "*karışık sınır şartı*" söz konusu olur.

Eliptik denklemler "*potansiyel*" adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil ederler. Potansiyel, bir büyüklüğün kesafetini (sıklığını) ölçer. Örneğin sıcaklık ve konsantrasyon birer potansiyel büyüklüktür. Bağımlı u değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada, sınırdaki değerlere bağlı olarak aldığı denge (equilibrium) veya daimi-durum (steady state) değerlerini belirtir.

Dolayısıyla eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel denklemler olarak da adlandırılır. Eliptik denklemin 2-boyutlu hal için genel tanımı,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y) = 0$$

şeklindedir.

Potansiyelin farklı bir başlangıç durumundan itibaren eriştiği daimi durum değerleri bir parabolik denklemle temsil edilir. Dolayısıyla bu denklemler t zaman değişkenini de bağımsız değişkenlerden biri olarak içerir. Gerçekte başlangıç durumundan itibaren zaman ilerledikçe nihai denge durumuna doğru adım adım ilerlenir. Önemli bir parabolik denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

olup, bu denklem bir çubuk boyunca sıcaklığın uçlardaki şartlara bağlı olarak zamanla nasıl değiştiğini temsil etmektedir. Buradaki c , ρ ve k büyüklükleri parametreler olup, sırasıyla ısı kapasite, yoğunluk ve ısı iletkenlik katsayısını belirtmektedir.

Bu örnekte $A=1$, $B=0$ ve $C=0$ ve dolayısıyla $B^2 - 4AC = 0$ olup, parabol ile aynıdır. Bu denklem "ısı denklemi" olarak adlandırılır. Aynı denklem, " $c\rho/k$ " yerine, D yayılım (difüzyon) katsayısı olmak üzere " $1/D$ " konulması halinde "yayınım (difüzyon) denklemi" olarak adlandırılır. Bu bakımdan " $c\rho/k$ " katsayısı da bazen "ısı yayınelirlik (difüzivite)" olarak adlandırılır.

Üçüncü tip (hiperbolik) denklemler de zamana bağlıdır. Dalgaların nasıl yayıldığını ifade ettiklerinden, "dalga denklemi" olarak adlandırılırlar. Bir boyutlu halde yayların titreşimini gösterir. Titreşen bir yay için kısmi-diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{Tg}{w} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

şeklinde olup, burada T , g ve w büyüklükleri sırasıyla yaydaki gerilmeyi, yer çekimi ivmesini ve birim uzunluk başına ağırlığı belirtmektedir. Bütün bu parametreler pozitif büyüklükler olup,, $A=1$, $B=0$, $C<0$ ve $B^2 - 4AC > 0$ dır.

Bu bölümde kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kullanılan teknikler izah edilecektir. Bu yöntemler denklemler yerine sonlu-fark eşdeğerlerini kullanırlar.

2.2 Eliptik denklemler:

Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin iki standart biçimi vardır. İki-boyutlu halde

$$\text{Laplace denklemi} \quad -\frac{\partial}{\partial x} \left(c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + au = 0$$

$$\text{Poisson denklemi} \quad -\frac{\partial}{\partial x} \left(c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + au = f(x,y)$$

Burada c_x , c_y ve a sistemin parametreleri olup x , y ve u değişkenlerine bağlı olabilirler. u ise içerisinde değeri bulunmak istenen büyüklük, yani potansiyeldir. Laplace denklemi çoğu zaman potansiyel denklemi olarak adlandırılır.

Burada daha ziyade $c_x=c_y=c$ sabit, $a=0$ olduğu özel bir halle ilgilenilecektir ki bu durumda yukarıdaki denklemler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ve} \quad c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x,y)$$

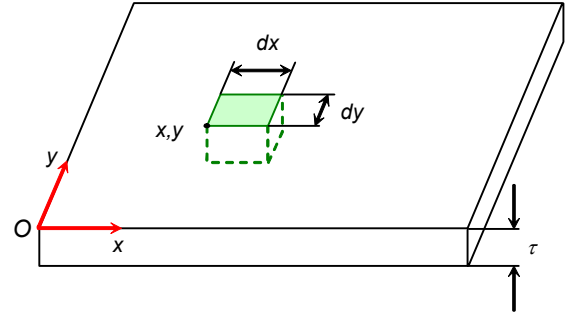
şekline gelir. Burada parantez içerisinde geçen ikinci-dereceden türevlerin toplamı çoğu zaman

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

şeklinde bir sembolle gösterilir ki bu ∇^2 sembolü "*Laplasiyen*" olarak adlandırılır.

Laplace denkleminin bir çok uygulaması vardır. Bunlardan birisi de iki boyutlu bir cisim üzerindeki daimi-durum sıcaklık dağılımıdır ki, buradaki incelemelerde örnek model olarak, çoğu insanın kolaylıkla gözünde canlandırabileceği bu problem ele alınacaktır.

Şekil 2.1 de üniform τ kalınlığında dikdörtgenel bir levha yer almaktadır. Levhanın O ile belirtilen sol alt köşesi başlangıç noktası olmak üzere düzenlenen bir (x,y) kartezyen koordinat sisteminde sol alt köşesi $P(x,y)$ noktasında yer alan ve (dx, dy, τ) kenar uzunluklarına sahip bir hacim elemanını ele alalım. Hacim elemanına x doğrultusunda *birim zamanda giren ısı*



Şekil 2.1

$$= -kA \frac{\partial u}{\partial x} = -k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x}$$

şeklinde ifade edilebilir. Elemandan x doğrultusunda *birim zamanda çıkan ısı* ise $x+dx$ kesitindeki gradyant hesaplanarak

$$= -k(\tau dy) \frac{\partial}{\partial x} \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] = -k(\tau dy) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right]$$

şeklinde gösterilebilir.

Benzeri şekilde elemana y doğrultusunda *birim zamanda giren ve çıkan ısılar* da sırasıyla

$$\begin{aligned} &= -k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -k(\tau dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right] = -k(\tau dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] \end{aligned}$$

olacaktır.

Hacim elemanının ayrıca alt ve üst yüzeylerinden *ısı kaybı* olduğu varsayılırsa, bu yolla birim zamanda çıkan ısı

$$= Q dx dy$$

şeklinde belirtilebilir. Burada Q büyüklüğü birim zamanda birim yüzey başına (alt ve üst yüzeyden) ısı kaybını belirten bir katsayıdır.

Daimi-durumda elemana giren ve çıkan ısılar toplamı eşit olacağından:

$$-k(\tau dy) \frac{\partial u}{\partial x} - k(\tau dx) \frac{\partial u}{\partial y} = -k(\tau dy) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right] - k(\tau dx) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right] + Q dx dy$$

şeklinde bir denge denklemi yazılabilir. Bu denklem sadeleştirmeler ve düzenlemeler sonucu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{Q}{k \tau} \quad (2.1)$$

şekline gelir. 3-boyutlu halde bu denklem yerine benzeri bir incelemeyle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{Q}{k}$$

denklemini elde edilebilir. Buradaki Q büyüklüğü birim hacim başına birim zamanda kaybolan ısıyı belirtir. (Bu durumdaki ısı kaybı genellikle cisim içine gömülü bir soğutucu vasıtasıyla olmaktadır.)

(2.1) denklemini Laplasiyen operatörünü kullanarak kısaca

$$\nabla^2 u = \frac{Q}{k \tau}$$

şeklinde de ifade etmek mümkündür.

Şayet levhanın kalınlığı x ve y ile değişiyorsa (2.1) denklemini yerine

$$\tau \nabla^2 u + \frac{\partial \tau}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{Q}{k} \quad (2.2)$$

şeklinde bir denklem yazılabilir.

Hem levhanın kalınlığı ve hem de ısı iletkenlik katsayısı değişken ise, bu defa

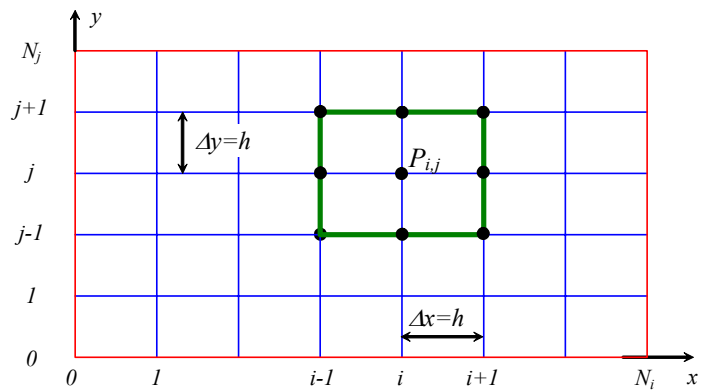
$$k \tau \nabla^2 u + \left(k \frac{\partial \tau}{\partial x} + \tau \frac{\partial k}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(k \frac{\partial \tau}{\partial y} + \tau \frac{\partial k}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = Q \quad (2.3)$$

şeklinde bir denklem elde edilebilir.

2.2.1 Levha boyunca sıcaklık dağılımının hesaplanması:

(2.1-3) denklemlerinden u büyüklüğünü elde etmenin standart yolu hesap bölgesini bir ağ sistemiyle sonlu sayıda elemana bölerek her bir eleman üzerinde türevlerin sonlu-farklarla ifade edilmesidir.

Buradaki incelemede merkezi farklar kullanılacak ve elemanların bütün hesap bölgesinde eşit büyüklükte kare elemanlar olduğu, yani ağ noktalarının eşit aralıklarla dağıldıkları kabul edilecektir. Levha dikdörtgensel olduğu ve en/boy oranı uygun seçildiği takdirde bu durum kolaylıkla sağlanabilir. Eleman kenar uzunlukları kısaca $\Delta x = \Delta y = h$ olarak gösterilecektir. Şekilde, problemin ayrıklaştırılması için kullanılan ağ sistemi, ve ağ düğüm noktalarının indisleme sistemi gösterilmektedir.



Şekil 2.2

Türevlerin sonlu fark açılımlarının Taylor serileri yardımıyla elde edilmesi mümkündür. Bu konuyla ilgili bilgiler Ek 5 de yer almaktadır.

u değişkeninin x ve y ye göre ikinci türevlerinin herhangi bir P_{ij} noktası civarındaki merkezi fark açılımları sırasıyla

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

olup, bu durumda u nun Laplasiyeni için

$$\left(\nabla^2 u\right)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} \quad (2.4)$$

elde edilir.

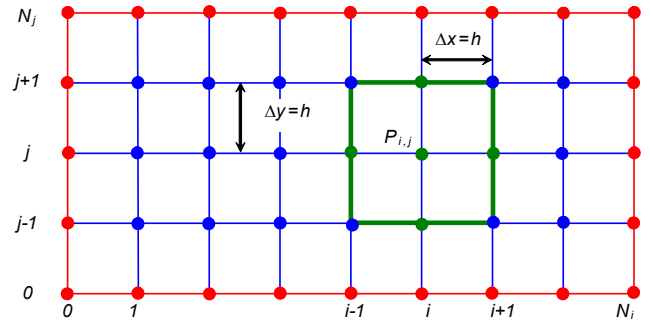
Örnek:

20 cm genişlikte ve 10 cm yükseklikteki bir düz levhanın üst ve alt yüzeylerinin izole edildiğini varsayarak, üst, alt ve sol kenarlarında sıcaklık 0°C , sağ kenarındaki sıcaklık 100°C iken levhanın 2.5 cm aralıkla belirlenmiş noktalarındaki sıcaklıkları hesaplayınız.

Bu problem (2.1) denkleminin $Q=0$ özel halindeki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemiyle incelenecektir. Bu denklemin sayısal çözümü için şekilde gösterildiği gibi bir ağ yapısı kullanılabilir. Bu ağ yapısında noktalar 2.5 cm aralıkla yerleştirildiğinden toplam $3 \times 7 = 21$ adet iç nokta ve 24 adet de sınır noktası mevcuttur.



Denklem, bu ağın bir P_{ij} noktası civarında

$$\frac{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0} \quad (2.5)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Görüldüğü gibi ayrıştırılmış denklem P_{ij} noktasındaki bilinmeyen sıcaklık değerini bu noktanın sol, sağ, üst ve altında yer alan noktalarındaki yine bilinmeyen sıcaklık değerlerine bağlamaktadır. Yani denklemde 5 adet bilinmeyen bulunmaktadır.

Ayrıştırılmış denklem bütün iç noktalarda yazılacak olup böylece 21 adet denklem elde edilecektir. İç noktalardan bir kısmı (16 adet) sınıra komşu noktalar olup, bu noktalarda yazılan denklemlerde sınır noktalarda bilinen sıcaklık değerleri de yer almaktadır. Örneğin P_{13} noktasındaki ayrıştırılmış denklem

$$\boxed{u_{23} + u_{12} - 4u_{13} = -u_{03} - u_{14}}$$

şeklinde olacaktır. Burada u_{03} ve u_{14} değerleri sınırlar üzerinde bilinen sıcaklıklar olduğu için denklemin sağına yazılmıştır.

2.2.2 İteratif yöntemler:

Yukarıdaki örnekte kullanılan çözüm tekniğiyle ilgili en önemli sorun hassasiyeti arttırmak için ağ yapısı çok sıklaştırıldığında çok büyük boyutlu matrislere ihtiyaç doğmasıdır. $h=2.5 \text{ cm}$ hücre genişliği için 21×21 elemanlı bir katsayılar matrisi oluşturulmuştur. Hücre genişliği yarıya indirilerek $h=1.25 \text{ cm}$ yapıldığı takdirde katsayılar matrisinin boyutu 105×105 olacaktır. Hücre genişliğinin bir kez daha yarıya indirilerek $h=0.625 \text{ cm}$ yapılması halinde ise matris boyutu 465×465 olacaktır. Matrisin boyutunun çok büyük olması hem çok büyük bilgisayar hafızası hem de çok büyük işlem zamanı gerektirecektir.

Oysa yukarıdaki örnekte olduğu gibi bu tip problemlerde karşılaşılan matrisler genellikle seyrek (çoğu elemanı sıfır olan) matrislerdir. Ve seyrek matris sistemlerinin çözümü için ideal teknik iteratif yöntemlerdir.

Yukarıdaki örnekte elde edilen (2.5) denklemi

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4}$$

şeklinde düzenlenerek *Liebmann yöntemi* olarak bilinen bir iteratif teknik uygulanabilir. Böylece, herhangi bir adımda bilinen sıcaklık değerleri u_{ij}^k olmak üzere bir sonraki adımdaki sıcaklıklar yukarıdaki formül vasıtasıyla

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k}{4} \quad (2.6)$$

şeklinde hesaplanabilir. Herhangi bir iterasyon adımında hesap noktasının sağında ve üstündeki değerler için önceki iterasyon adımında bilinen değerler alınırken solunda ve altındaki değerler için bu iterasyon adımında hesaplanan yeni değerler alınmaktadır. Sınıra komşu noktalarda bu formül uygulanırken sınır noktalarındaki değerler sınır koşullarından bilinmektedir.

İterasyonun başlangıcında sadece sınır değerleri bilinmekte olup, iç noktalardaki değerler için bir tahminde bulunmak gerekmektedir. Başlangıç değerlerini keyfi (örneğin bütün iç noktalarda sıfır) almak mümkündür. Ancak uygun değerler alınması (örneğin sınır değerlerin bir ortalaması) iterasyon sayısını azaltacaktır.

Aşağıdaki tabloda 28 iterasyondan sonra 0.0001 hassasiyetle yakınsamış çözüm sonuçları yer almaktadır.

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	0	0	0	0	0	0	0	0	100
3	0	0.3531	0.9133	2.0105	4.2959	9.1533	19.6632	43.2102	100
2	0	0.4990	1.2896	2.8325	6.0195	12.6539	26.2895	53.1775	100
1	0	0.3531	0.9133	2.0104	4.2958	9.1532	19.6632	43.2102	100
0	0	0	0	0	0	0	0	0	100

2.2.3 Liebmann yönteminde yakınsamanın hızlandırılması:

Liebmann yönteminin yakınsamasını "ardarda aşırı gevşetme - *successive overrelaxation (SOR)*" yöntemi uygulayarak hızlandırmak mümkündür.

Liebmann yöntemi için SOR yöntemi

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + w \frac{u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} - 4u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k}{4}$$

iterasyon formülüyle uygulanır. Buradaki w büyüklüğü "*aşırı gevşetme çarpanı*" olarak adlandırılır. Yukarıdaki örnek problemde aşırı gevşetme çarpanının çeşitli değerleri için 0.0001 hassasiyetle yakınsamanın sağlandığı iterasyon sayıları aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

Aşırı gevşetme çarpanı	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
İterasyon sayısı	28	22	15	15	17	21	29	39

Aşırı gevşetme ile iterasyon sayısının hayli azaldığı görülmektedir. Ancak aşırı gevşetme çarpanının büyük değerlerinde iterasyon sayısının tekrar arttığı dikkati çekmektedir.

Aşırı gevşetme çarpanının optimum değeri her zaman kolaylıkla tahmin edilemez. Uygun değeri bulmak için iterasyonun başlangıcındaki birkaç adıma ait sonuçları kullanan bazı yöntemler mevcuttur. Dirichlet tipi sınır koşullarının kullanıldığı dikdörtgensel bir hesap bölgesi için önerilmiş bir yöntem

$$[\cos(\pi/p) + \cos(\pi/q)]^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0 \quad (2.8)$$

denkleminin en küçük köküdür. Burada p ve q büyüklükleri hesap bölgesinin her iki yöndeki hücre sayılarını belirtmektedir. Örnek problem için bu denklemin kökleri

$$2.66012\omega^2 - 16\omega + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 1.26681, \quad \omega_2 = 4.74796$$

olup küçük kök için bulunan değer yukarıdaki tabloda elde edilen sonuçları doğrulamaktadır. Nitekim aşırı gevşetme çarpanı için 1.2668 değeri kullanılarak iterasyonun 15 adımda yakınsadığı tespit edilmiştir.

2.2.4 Poisson denklemi:

$$\text{Poisson denklemi} \quad \nabla^2 u = R$$

şeklinde olup buradaki R büyüklüğü (x,y) konumunun bir fonksiyonu olabilir. Laplace denkleminin çözümünde kullanılan yöntemde ufak bir değişiklik yaparak Poisson denklemini çözmek mümkündür.

Örnek:

Dikdörtgensel kesitli bir çubuğun kesit boyutları 6 in x 8 in 'dir. Bu çubuk için burulma fonksiyonunu çözüünüz.

Çubuğun burulması halinde teğetsel gerilmeler burulma fonksiyonunun kısmi türevleriyle orantılı olup burulma fonksiyonu için

$$\nabla^2 \phi = -2$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Sınır koşulu çubuk kesitinin kenarlarında $\phi=0$ şeklindedir.

Bu denklemin çözümü için basit açık iterasyon formülü

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \frac{\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^k + \phi_{i,j+1}^k + 2h^2}{4}$$

şeklinde veya SOR iterasyon formülü

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^k + \omega \frac{\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^k + \phi_{i,j+1}^k - 4\phi_{i,j}^k + 2h^2}{4}$$

şeklinde yazılabilir. $h = 1$ in olmak üzere oluşturulan bir ağ yapısı için optimum aşırı gevşetme çarpanı 1.383 olup, bu değer kullanılarak 14 iterasyonda 0.001 hassasiyetle yakınsayan çözüm sonuçları aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	2.042	3.047	3.353	3.047	2.043	0.000
6	0.000	3.123	4.794	5.319	4.794	3.123	0.000
5	0.000	3.657	5.686	6.335	5.686	3.657	0.000
4	0.000	3.818	5.959	6.647	5.960	3.818	0.000
3	0.000	3.657	5.686	6.335	5.686	3.657	0.000
2	0.000	3.123	4.794	5.319	4.794	3.124	0.000
1	0.000	2.043	3.048	3.354	3.048	2.043	0.000
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

2.2.5 Türev cinsinden sınır koşulu:

Bazı problemlerde sınırlarda fonksiyonun türevi cinsinden (Neumann tipi) veya karışık tipte sınır şartı söz konusu olabilir. Sınır koşulları genel bir biçimde

$$A u + B = C u'$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki A , B ve C büyüklüğü birer sabittir.

- Dirichlet tipi sınır koşulu için $C = 0 \rightarrow u = -B / A$
- Neumann tipi sınır koşulu için $A = 0 \rightarrow u' = B / C$
- Karışık tipte sınır koşulu için $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$

Bu bağıntı, örneğin bir yüzeyden ısı kaybı için $A = H, B = -Hu_s, C = -k$ alınarak

$$-k u' = H (u - u_s)$$

şekline gelir.

Örnek:

Kalınlığı 0.5 cm olan 5 cm × 9 cm boyutlarındaki düz levhanın daimi-haldeki sıcaklık dağılımını hesaplayınız. Levhanın her yerinde $Q = 0.6 \text{ cal/cm}^3 \text{ s}$ büyüklüğünde ısı üretimi olup, alt kenarda $\partial T / \partial y = 15$ şiddetinde bir ısı kaybı mevcut iken yan kenarlar 20°C sabit sıcaklıkta tutulmaktadır. Üst kenarda ise çevre ile $-k \partial T / \partial y = H \cdot (T_0 - T_s)$ formülü uyarınca ısı alışverişi söz konusudur. Burada k (ısı iletkenlik katsayısı) = 0.16, H (ısı transfer katsayısı) = 0.073 ve T_s (çevre sıcaklığı) = 25°C dir. T_0 büyüklüğü levhanın uzun üst kenarındaki sıcaklıkları belirtmektedir. Levha yüzeyi izole edilmiş olup, çevre ile ısı alışverişi yoktur. Hücre genişlik ve yüksekliklerini eşit ve 1 cm alınız.

Levha içinde ısı üretimi söz konusu olduğundan bu problemin çözümünde kullanılacak denklem bir işaret farkıyla (2.1) denkleminin benzeri olup

$$\nabla^2 T = -\frac{Q}{k \tau}$$

şeklinde bir Poisson denklemdir. Bu denklem merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$\frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j}}{h^2} = -\frac{Q}{k\tau}$$

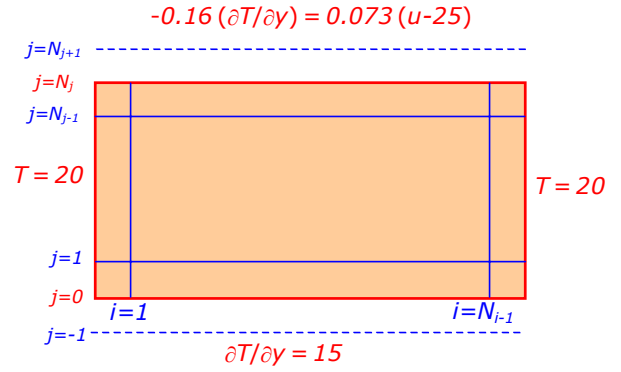
biçiminde yazılabilir. Denklem düzenlenerek

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + \omega \left(\frac{T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^k + T_{i,j+1}^k - 4T_{i,j}^k}{4} + \frac{Q h^2}{4k\tau} \right)$$

şeklinde bir SOR iterasyon formülü elde edilebilir.

Probleme ilişkin sınır koşulları yandaki şekil üzerinde belirtilmiştir.

Levhanın yan yüzlerindeki Dirichlet tipi sınır koşulu bu kenarlardaki düğüm noktalarında sıcaklıklar sabit 20°C sıcaklıkta tutularak gerçekleştirilecektir. Bu değerler $i=1$ ve $i=N_{i-1}$ indisli düğüm noktalarındaki denklemlerde yer alacaktır.



Levhanın alt kenarında $\partial T/\partial y=15$ şeklinde sıcaklık gradyanı cinsinden bir sınır şartı verilmiş olup bu gradyant $j=1$ indisli düğüm noktaları ile çevre ortamda levha kenarından h kadar uzakta yer aldığı varsayılan $j=-1$ indisli hayali düğüm noktaları arasında

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2h} = 15 \quad \rightarrow \quad T_{i,-1} = T_{i,1} - 30h$$

şeklinde hesaplanarak işlemlere katılabilir. (Burada sıcaklık gradyanı pozitif iken ısının levhadan çevreye doğru -negatif y yönünde- akacağı, dolayısıyla ısının problemde belirtildiği gibi kaybedileceği görülmektedir.) Bu durumda levhanın alt kenarı boyunca ($j=0$ indisli düğüm noktalarında) sıcaklıklar

$$T_{i,0}^{k+1} = T_{i,0}^k + \omega \left(\frac{T_{i-1,0}^{k+1} + T_{i+1,0}^{k+1} + T_{i,0}^k - 4T_{i,0}^k}{4} + \frac{Q h^2}{4k\tau} \right)$$

$$T_{i,-1}^{k+1} = T_{i,-1}^k - 30h$$

Levhanın üst kenarında sınır koşulu

$$-k \frac{\partial u}{\partial y} = H(T_o - T_s)$$

şeklinde verilmiştir. Buradaki sıcaklık gradyanı levhanın üst kenarına komşu ($j=N_j-1$ indisli) düğüm noktaları ile yine çevre ortamda levhadan h uzaklıktaki hayali düğüm noktaları ($j=N_j+1$ indisli) arasında

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{T_{i,N_j+1} - T_{i,N_j-1}}{2h}$$

şeklinde hesaplanarak sınır koşulunda kullanılırsa

$$-k \frac{\partial u}{\partial y} = -k \frac{T_{i,N_j+1} - T_{i,N_j-1}}{2h} = H(T_{i,N_j} - T_s) \quad \rightarrow \quad T_{i,N_j+1} = T_{i,N_j-1} - \frac{2hH}{k}(T_{i,N_j} - T_s)$$

elde edilir. Bu durumda levhanın üst kenarındaki ($i=N_i$ indisli) düğüm noktalarında sıcaklıklar

$$T_{i,N_i}^{k+1} = T_{i,N_i}^k + \omega \left(\frac{T_{i-1,N_i}^{k+1} + T_{i,N_i-1}^{k+1} + T_{i+1,N_i}^k + T_{i,N_i+1}^k - 4T_{i,N_i}^k}{4} + \frac{Q h^2}{4k\tau} \right)$$

$$T_{i,N_j+1}^{k+1} = T_{i,N_j-1}^k - \frac{2hH}{k} (T_{i,N_j}^k - T_s)$$

bağıntılarıyla hesaplanır.

Aşırı gevşetme çarpanının $\omega=1.43$ değeri için 59 iterasyon sonucunda 0.0001 hassasiyetli yakınsama ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6		45.930	61.816	71.962	76.876	76.876	71.962	61.816	45.930	
5	20	73.510	107.915	128.859	138.826	138.826	128.859	107.915	73.510	20
4	20	90.195	137.476	166.733	180.743	180.743	166.733	137.476	90.195	20
3	20	99.793	155.061	189.855	206.669	206.669	189.855	155.061	99.794	20
2	20	103.918	163.119	200.956	219.409	219.409	200.956	163.119	103.918	20
1	20	102.762	162.539	201.442	220.603	220.603	201.442	162.539	102.762	20
0	20	94.589	152.834	191.669	210.958	210.958	191.669	152.834	94.589	20
-1		72.762	132.539	171.442	190.603	190.603	171.442	132.539	72.762	

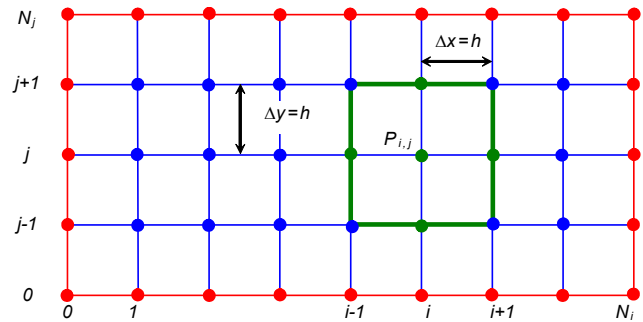
2.2.6. Değişen yönlü kapalı formülasyon (ADI) yöntemi

Bu bölümün başında kısmi diferansiyel denklemler sonlu farklarla doğrudan çözülmeye çalışıldığında katsayılar matrisi seyrek olan denklem sistemleri ortaya çıkmıştı. Kullanılan ağ noktası sayısı arttırıldıkça bu seyreklik oransal olarak artacaktır. Örneğin 21 düğüm noktası halinde katsayılar matrisinin elemanlarının %81'i sıfır iken düğüm sayısı 105 olduğunda sıfır eleman sayısı %96 ya çıkmaktadır. $30 \times 30 \times 30$ düğüm noktalı üç boyutlu bir problemde ise sıfırdan farklı eleman sayısı sadece %0.012 dir.

İki- ve üç-boyutlu problemlerde katsayılar matrisi sadece seyrek olmayıp ayrıca bant şeklindedir. Yani sıfır olmayan elemanlar diyagonale paralel belli genişlikteki bir bant bölgenin içinde kalmaktadır. Bant matrisleri çözen özel yöntemler geliştirilmiştir. Ancak bazı hallerde bant genişliği büyük olmakta ve çözüm güçleşmektedir. Sadece üç-diyagonalli sistemlerin basit ve etkin bir çözümü mümkündür.

İki- ve üç-boyutlu problemleri üç-diyagonalli denklem sistemlerine indirgeyerek çözümlerin bir yolu değişen yönlü kapalı formülasyon (Alternate Direction Implicit - ADI) yöntemi kullanmaktır.

Yöntemi açıklamak için Laplace denklemi örnek olarak alınır. Şekildeki gibi bir ağ yapısında herhangi bir $P_{i,j}$ noktası etrafındaki sonlu fark ayrıklaştırması



$$\Delta^2 T = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

şeklinde yapılabilir. $\Delta x = \Delta y = h$ alınması halinde bu büyüklükler denklemden atılarak

$$(T_{i-1,i} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) = 0$$

yazılabilir. Bu denklemin iteratif çözümünde herhangi bir iterasyon adımı iki aşamalı olarak gerçekleştirilebilir.

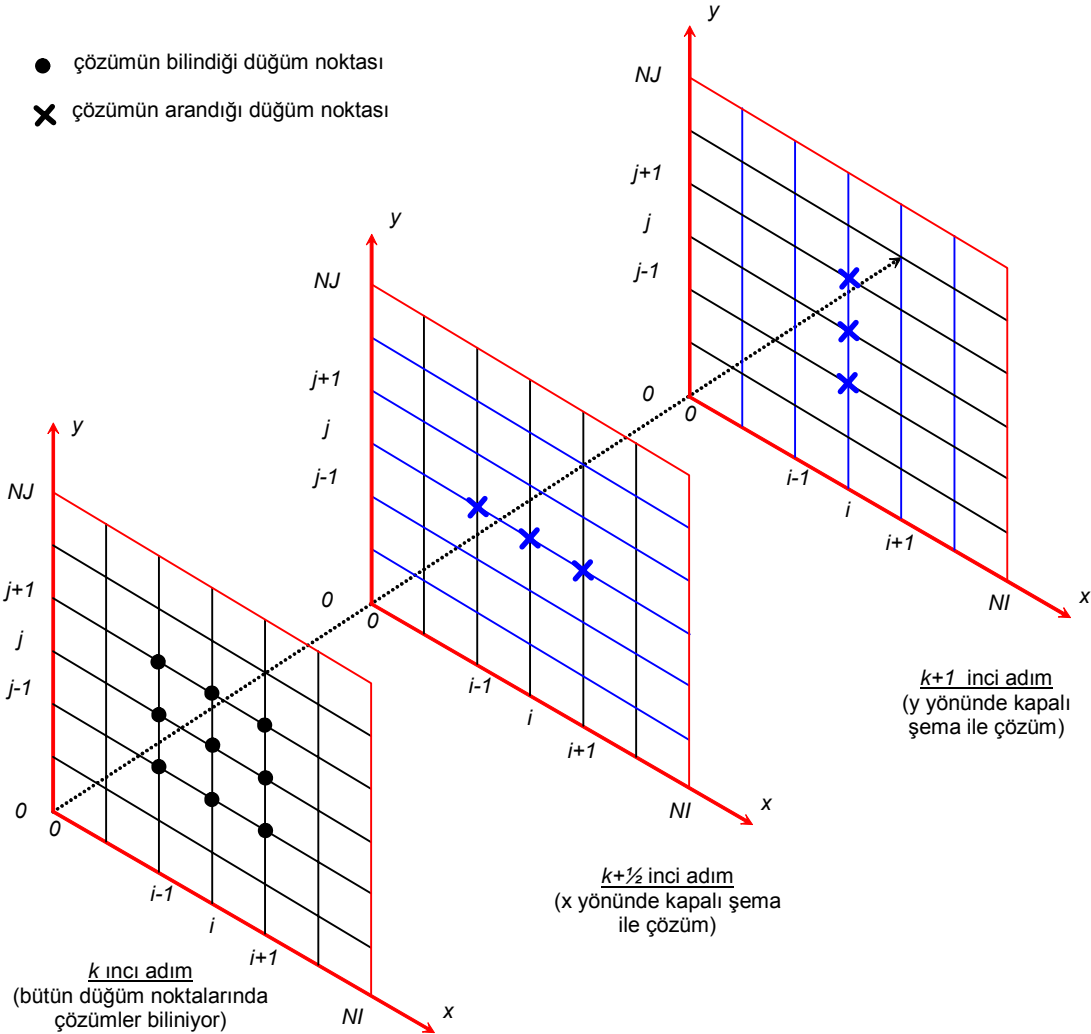
Önce y doğrultusundaki türev önceki adımdan bilinen değerlerle ve x doğrultusundaki türev de yeni adımda hesaplanacak olan değerlerle ifade edilerek

$$(T_{i-1,i} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^{k+1/2} = -(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^k \quad (i = 1, 2, \dots, NI - 1)$$

şeklinde bir denklem sistemi, daha sonra da bunun tersi yapılarak

$$(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^{k+1} = -(T_{i-1,i} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^{k+1/2} \quad (j = 1, 2, \dots, NJ - 1)$$

şeklinde bir diğer denklem sistemi elde edilir. Dikkat edilirse her iki denklem sistemi de üç-diagonal denklemlerdir. İki sınırdaki (birinci sistem için $i=0$ ve $i=NI$ de, ikinci sistem için $j=0$ ve $j=NJ$ de) sınır değerleri verildiğinde Thomas yöntemi kullanılarak çözülebilirler.



Bu denklem sistemlerinden ilki x doğrultusunda aynı sıradaki düğüm noktalarında yazılmış denklemleri ifade etmektedir. Denklem sistemi önce sınıra komşu ilk sırada ($j=1$) yazılıp Thomas yöntemiyle çözülür. Aynı işlem ikinci, üçüncü ve daha sonraki sıralar için, diğer sınıra komşu en son sıraya ($j=NJ-1$) kadar gerçekleştirilir.

Daha sonra yön değiştirilerek benzeri işlemler y yönündeki denklem sistemi için tekrarlanır. Yani önce sınıra komşu sıra ($i=1$) için, ardından ikinci, üçüncü ve diğer sınıra komşu sıraya ($i=NI-1$) varıncaya kadar bütün sıralar için denklem sistemi yazılıp çözülür.

Bu iki-aşamalı iteratif çözüm tekniği yeterli bir yakınsama elde edilinceye kadar tekrarlanır.

Örnek:

6 cm × 8 cm boyutlarındaki bir düz levhanın uzun olan üst kenarı 100°C, sağ kenarı 50°C ve diğer iki kenarı da sıfır derece sıcaklıkta tutulmaktadır. Levha yüzeyi izole edilmiş olup, çevre ile ısı alışverişi yoktur. Daimi-durum sıcaklık dağılımını ADI yöntemini kullanarak 1 cm aralıklarla hesaplayınız.

13 iterasyon adımı sonucunda 0.001 hassasiyetle yakınsamış çözüm sonuçları tabloda sunulmuştur.

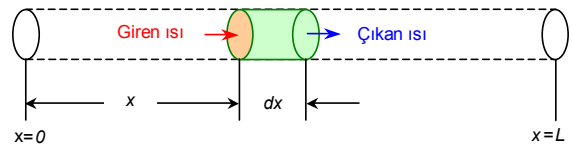
$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
6		100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	
5	0	48.523	66.828	74.669	78.204	79.342	77.985	71.464	50
4	0	27.262	44.122	53.644	58.804	61.178	61.132	57.873	50
3	0	16.404	28.754	36.983	42.189	45.435	47.495	48.894	50
2	0	9.599	17.508	23.344	27.535	30.878	34.519	40.210	50
1	0	4.484	8.336	11.352	13.728	16.024	19.492	27.425	50
0		0	0	0	0	0	0	0	

2.3. Parabolik denklemler:

Kısmi-diferansiyel denklemlerin parabolik karakterdeki ikinci sınıfı, tipik örnekleri madde yayılımı veya bölge içinde ısı akışı olduğundan genellikle yayılım denklemi veya ısı denklemi olarak adlandırılır. Buradaki incelemelerde de örnek olarak ısı problemleri ele alınacaktır. Bunların daha öncekilerden farkı artık daimi durum problemi olmayıp, zamana bağlı, yani sıcaklığın zamanla değiştiği problemler olmasıdır.

İlk olarak bir çubuk boyunca bir-boyutlu ısı akışı problemi ele alınacaktır. Şayet zaman yeterince uzun tutulur ve sıcaklıklar daimi-durum şartlarına erişirse bu problem de daha önceki eliptik problem örneğiyle özdeş olur.

Şekilde L uzunluğundaki bir çubuk üzerinde dx genişlikli bir çubuk elemanı işaretlenmiştir. Çubuğun çevresinin izole olduğu ve bu yüzden çevreyle ısı alışverişi olmadığı varsayılmaktadır. x eksenini çubuk boyunca soldan sağa doğru yönlenmiş olup x eksenini boyunca



$$-kA \frac{dT}{dx}$$

formülü uyarınca akmakta olan ısı [cal/s] olarak ölçülmektedir. Buradaki eksi işaretinin ısının sıcaktan soğuğa doğru akmasıyla ilgili olduğu bilinmektedir. dx uzunluğundaki çubuk elemanının sağ tarafından çıkan ısı da

$$-kA \frac{d}{dx} \left(T + \frac{dT}{dx} dx \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Daimi-durumda bu çubuk elemanına giren ve çıkan ısılar eşit olur. Zamana bağlı olayda ise çubuk elemanına birim zamanda giren ısı ile çıkan ısı arasındaki fark bu süreçte çubuk elemanın bünyesinde depolanan ısıya eşit olacaktır. Depolanan bu ısı da çubuk elemanın sıcaklığını arttıracaktır. Çubuk elemanın sıcaklık değişimiyle ilgili olarak birim zamanda depolanan ısı miktarı elemanın hacmi ($A \cdot dx$), malzemenin yoğunluğu (ρ) ve malzemenin ısı kapasitesine (c - birim kütle ve birim sıcaklık başına depolayabildiği ısı - $cal/gr^{\circ}C$) bağlıdır:

$$c \rho (A dx) \frac{dT}{dt}$$

Bu üç ifade kullanılarak

$$-kA \frac{dT}{dx} - \left[-kA \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) \right] = c \rho (A dx) \frac{dT}{dt}$$

veya bu eşitlik düzenlenerek

$$k \frac{d^2T}{dx^2} = c \rho \frac{dT}{dt} \quad (2.21)$$

denklemini elde edilir. İki- veya üç-boyutlu halde de bu denkleme eşdeğer

$$k \nabla^2 T = c \rho \frac{dT}{dt} \quad (2.22)$$

denklemini elde edilir.

Bazı hallerde malzeme homojen olmayabilir. Böylece ısıl özellikler konuma bağlı olarak değişebilir. Bazı hallerde de malzeme içinde Q [$cal/s \cdot cm^3$] büyüklüğünde bir ısı üretimi olabilir. Bu gibi durumlar için de yukarıdaki denklemler yerine

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = c(x, y, z) \rho(x, y, z) \frac{dT}{dt}$$

şeklinde bir denklem yazmak mümkündür.

Buradaki örnekler basit tutularak sadece (2.21) ve (2.22) denklemleriyle ilgilenilecektir.

Yukarıdaki bütün denklemler de konum dışında ayrıca zamana bağlıdır. Bu denklemlerin belli bir başlangıç zamanında verilen başlangıç şartlarıyla başlatılması gereklidir. Ayrıca sınır değerlerinin bilinmesine de ihtiyaç vardır. Dolayısıyla bu tip problemler konuma göre sınır değer, zamana göre de başlangıç değer problemi olarak nitelendirilmelidir.

2.3.1 Isı denkleminin çözümü:

Çubuk boyunca ısı akışı nedeniyle sıcaklığın zamanla değişimi problemini çözmek için üç farklı yöntem incelenecektir. Üç yöntemde de benzer nokta olarak konumsal türevler merkezi farklarla ayrıştırılmaktadır. Yöntemlerin farklılıkları ise zamansal türevlerin ayrıştırılma şekline kaynaklanmaktadır.

Önce "açık formülasyon (explicit method)" incelenecektir. Bu yöntemde zamana göre türev ileri farklarla

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad (2.23)$$

şeklinde ayrıklaştırılmaktadır. Bu ifade x_i noktasında t_k anında zamana göre türevi ifade ederken T_k büyüklüğü bu noktada t_k anındaki sıcaklığı T_{k+1} büyüklüğü ise t_{k+1} (veya $t_k + \Delta t$) anındaki sıcaklığı belirtmektedir.

Bu yöntemde konumsal türev ise t_k anında x_i noktası etrafında merkezi farklarla

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (2.24)$$

şeklinde ayrıklaştırılmaktadır.

Yöntem ayrıklaştırma şekli nedeniyle literatürde çoğu zaman FTCS (Forward Time Central Space) yöntemi olarak da adlandırılmaktadır. Zamanda ayrıklaştırma birinci dereceden olduğu için hata $O(\Delta t)$ mertebesinde iken, konumda ayrıklaştırma ikinci dereceden olduğu için hata $O(\Delta x)^2$ mertebesinde olmaktadır. Hata mertebelerindeki bu farklılık yöntemin kararlılığı üzerinde etki yaratmaktadır.

Ayrıklaştırılmış türevler (2.21) denkleminde yerleştirilerek

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = c \rho \frac{dT}{dt} \quad \rightarrow \quad k \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} = c \rho \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

veya düzenlenerek

$$T_i^{k+1} = r T_{i+1}^k + (1 - 2r) T_i^k + r T_{i-1}^k \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada

$$r = \frac{k \Delta t}{c \rho (\Delta x)^2}$$

dir. (2.25) bağıntısı çözümü zamanda Δt adım uzunluğu ile ilerleten bir bağıntı olup, çözüm bir $t=t_0$ başlangıç anında T sıcaklığının bütün x_i noktalarında bilinen başlangıç değerleri ile başlatılmaktadır. Sonraki zaman adımlarında önceki adımda bulunan sıcaklıklar ve sınır koşulları gereği çubuğun iki ucundaki bilinen sıcaklık değerleri kullanılmaktadır.

Yönteme açık (explicit) şema denilmesinin nedeni, x_i noktasındaki sıcaklığın önceki adımdan ve sınır koşullarından bilinen sıcaklık değerleri kullanılarak doğrudan hesaplanabilmesidir.

Örnek

2 cm kalınlığında çok geniş bir çelik levha içindeki sıcaklık dağılımını zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız. Çelik için $k=0.13 \text{ cal/s}\cdot\text{cm}^\circ\text{C}$, $c=0.11 \text{ cal/gr}^\circ\text{C}$ ve $\rho=7.8 \text{ gr/cm}^3$ olarak verilmiştir. Levha çok geniş olduğu için yanal doğrultudaki ısı akışları ihmal edilerek sadece levha yüzeylerine dik doğrultudaki ısı akışı dikkate alınacaktır. $t=0$ anında levha içindeki sıcaklık dağılımı

$$T(x) = 100x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$T(x) = 200 - 100x \quad 1 \leq x \leq 2$$

ve sınır koşulları da

$$T(0) = 0^\circ\text{C} \quad \text{ve} \quad T(2) = 0^\circ\text{C}$$

olarak verilmiştir. Levha kalınlığını 8 e bölerek $\Delta x=0.25$ alınız.

Problemin çözümünde Δt zaman adımının büyüklüğü r büyüklüğünün seçimine bağlıdır. $r=0.5$ alınması halinde (2.25) denklemi

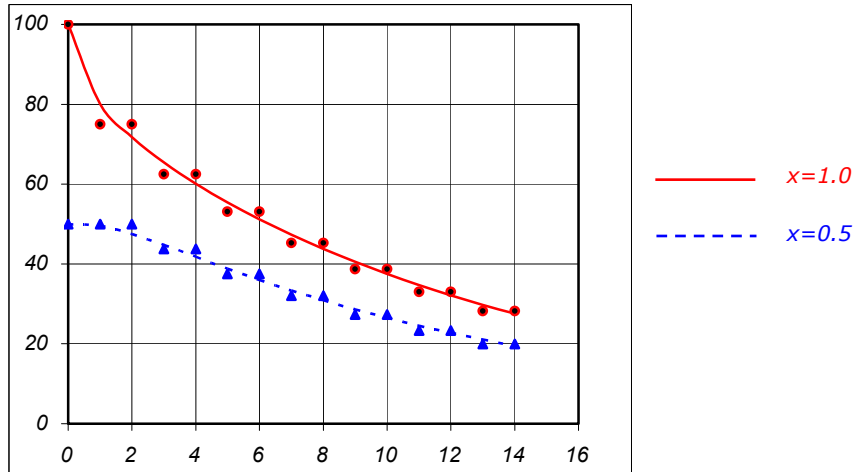
$$T_i^{k+1} = 0.5(T_{i+1}^k + T_{i-1}^k) \quad (2.26)$$

şekline gelir. Zaman adımı da

$$r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \rightarrow \Delta t = \frac{rc\rho(\Delta x)^2}{k} = \frac{0.5 \times 0.11 \times 7.8 \times (0.25)^2}{0.13} = 0.206 \text{ s}$$

olur. (2.26) bağıntısı kullanılarak çeşitli zaman adımlarında elde edilen çözümler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Levhanın alt ve üst yarısındaki çözümlerin simetrik olması nedeniyle tabloda levhanın sadece üst yarısındaki sonuçlara yer verilmiştir.

$r = 0.5$		$x = 0.25$		0.50		0.75		1.00	
zaman adımı	t	sayısal	sayısal	analitik	sayısal	sayısal	sayısal	analitik	
0	0	25.00	50.00	50.00	75.00	100.00	100.00		
1	0.206	25.00	50.00	49.58	75.00	75.00	80.06		
2	0.413	25.00	50.00	47.49	62.50	75.00	71.80		
3	0.619	25.00	43.75	44.68	62.50	62.50	65.46		
4	0.825	21.88	43.75	41.71	53.13	62.50	60.11		
5	1.031	21.88	37.50	38.79	53.13	53.13	55.42		
6	1.238	18.75	37.50	35.99	45.31	53.13	51.18		
7	1.444	18.75	32.03	33.37	45.31	45.31	47.33		
8	1.650	16.02	32.03	30.91	38.67	45.31	43.79		
9	1.856	16.02	27.34	28.63	38.67	38.67	40.52		
10	2.063	13.67	27.34	26.51	33.01	38.67	37.51		
11	2.269	13.67	23.34	24.55	33.01	33.01	34.72		
12	2.475	11.67	23.34	22.73	28.17	33.01	32.15		
13	2.681	11.67	19.92	21.04	28.17	28.17	29.76		
14	2.888	9.96	19.92	19.48	24.05	28.17	27.55		



Bu problemin koşulları gereği $t=\infty$ için daimi-duruma erişileceği ve her yerde sıcaklığın 0°C olacağı açıktır. Tablodaki değerler de bunu doğrulamaktadır. Yapılan inceleme sonucu sıcaklıkların 85 inci zaman adımında 0.1 hassasiyetle sıfıra eriştiği görülmüştür.

Sayısal değerler genel olarak analitik değerleri izlemekte, sadece bir dalgalanma göstermektedir. Bunu yukarıdaki grafikten de fark etmek mümkündür. Bu grafikte sürekli

çizgiler analitik çözümleri, daireler $x=1$ deki, üçgenler ise $x=0.5$ deki sayısal çözümleri belirtmektedir.

Şayet r büyüklüğünün 0.4 ve 0.6 gibi farklı iki değeri için hesaplar tekrarlanırsa (ki bu durumda Δt zaman adımı da değişecektir) ilginç sonuçlar tespit edilebilir.

$r=0.4$ için sayısal değerler çok daha doğru olmakta analitik çözümle farklar başlangıç adımlarında yarı büyüklükte iken ilerleyen adımlarda onda bir büyüklüğe kadar inmektedir.

$r=0.6$ için ise son derece hatalı sonuçlar elde edilmektedir. Sadece 8 zaman adımından sonra bazı çözümler negatif olmaktadır.

Çözümde kararsızlık olmaması için r 'nin alabileceği en büyük değer $r=0.5$ olmaktadır.

2.3.2 Crank-Nicolson yöntemi:

$r>0.5$ olduğundaki kararsızlığın nedeni uzaysal ve zamansal türevlerin sonlu fark ayrıştırılmalarındaki mertebelerin farklı olmasıdır. Crank-Nicolson yöntemi bu sonlu fark açılımlarını aynı mertebeye getiren bir tekniktir.

Zamansal türevin sonlu-fark açılımı

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{k+1/2} = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

şeklinde zaman aralığının ortasında ($t_{k+1/2}$ anında) alınmış bir türev olarak düşünülürse, bu açılım merkezi farklarla yapılmış bir ayrıklaştırma olarak değerlendirilebilir. Bu durumda konumsal türevin ayrıklaştırması da aynı zaman adımında (yani $t_{k+1/2}$ anında) gerçekleştirilebilir. Bunun için $\partial^2 T / \partial x^2$ türevi bir kez zaman adımının başlangıcında ve bir kez de sonunda ayrıklaştırılarak bu ikisinin aritmetik ortalamasından yararlanılır:

$$t_k \text{ anında} \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_k = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}$$

$$t_{k+1} \text{ anında} \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{k+1} = \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$t_{k+1/2} \text{ anında} \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_k = \frac{1}{2} \frac{(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) + (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2}$$

Ayrıklaştırılmış türevler denklemde yerleştirilerek

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho} \frac{1}{2} \frac{(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) + (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2}$$

ve bu denklem düzenlenerek

$$\boxed{-rT_{i-1}^{k+1} + 2(1+r)T_i^{k+1} - rT_{i+1}^{k+1} = rT_{i-1}^k + 2(1-r)T_i^k + rT_{i+1}^k} \quad (2.27)$$

elde edilir. Burada

$$r = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Bu denklem her bir P_{ij} noktasında bir kez yazılarak

$$L_i T_{i-1}^{k+1} + D_i T_i^{k+1} + U_i T_{i+1}^{k+1} = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, NI-1$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Burada

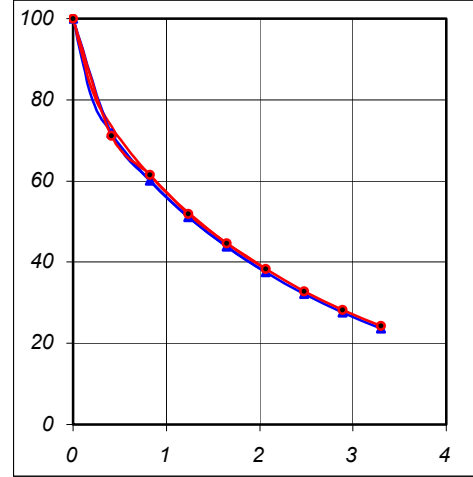
$$\begin{aligned} L_1 &= 0, \quad L_i = -r, \quad (i = 2, 3, \dots, NI-1) \\ D_i &= 2(1+r), \quad (i = 1, 2, \dots, NI-1) \\ U_{NI-1} &= 0, \quad U_i = -r, \quad (i = 1, 2, \dots, NI-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= rT_0^k + 2(1-r)T_1^k + rT_2^k + rT_0^{k+1} \\ R_i &= rT_{i-1}^k + 2(1-r)T_i^k + rT_{i+1}^k, \quad i = 2, 3, \dots, NI-2 \\ R_{NI-1} &= rT_{NI-2}^k + 2(1-r)T_{NI-1}^k + rT_{NI}^k + rT_{NI}^{k+1} \end{aligned}$$

dir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi üç-diagonalidir ve Thomas yöntemiyle çözülebilir. Bu teknik "*kapalı (implicit) formülasyonlu*" bir yöntem olup en önemli avantajı r 'nin herhangi bir değeri için kararlı olmasıdır.

Yöntem örnek olarak bir önceki örnekte ele alınan problem için uygulanmış olup levhanın ortasında ($x=1.0$) çeşitli zaman adımlarında $r=0.5$ ve $r=1.0$ için elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

i	t	r = 0.5			r = 1.0			
		analitik	sayısal	hata	t	analitik	sayısal	hata
0	0	100	100	0	0	100	100	0
1	0.206	80.06	82.32	2.8	0.413	71.80	71.13	0.9
2	0.413	71.80	73.48	2.3	0.825	60.11	61.53	2.4
3	0.619	65.46	66.86	2.1	1.238	51.18	51.97	1.5
4	0.825	60.11	61.34	2.0	1.650	43.79	44.67	2.0
5	1.031	55.42	56.52	2.0	2.063	37.51	38.29	2.1
6	1.238	51.18	52.21	2.0	2.475	32.15	32.88	2.3
7	1.444	47.33	48.30	2.0	2.888	27.55	28.23	2.5
8	1.650	43.79	44.71	2.1	3.300	23.62	24.23	2.6
9	1.856	40.52	41.40	2.2				
10	2.063	37.51	38.36	2.3				



Tabloda ayrıca oransal hatalara da (sayısal sonuçlarla analitik sonuçlar arasındaki farkların analitik sonuçlara oranı) yer verilmiştir. $r=0.5$ için hatalar %2.0-2.7 arasında iken $r=1.0$ için %0.9-2.6 arasındadır. Her iki haldeki hatalar da daha önce açık formülasyonla $r=0.5$ için hesaplanan değerlerden küçüktür.

2.3.3 Teta yöntemi:

Crank-Nicolson yönteminde zamana göre türevin merkezi fark açılımı zaman aralığının ortasında olarak yorumlanmıştı. Teta yönteminde daha genel bir yaklaşım yapılarak bu türev zaman aralığının ortasında değil ama daha farklı bir noktada değerlendirilmektedir. Yani Δt zaman aralığının bir θ kesiri alınarak, zamana göre türevin sonlu fark açılımının bu noktada alındığı varsayılmakta, konuma göre türevin de zaman aralığının başında ve sonundaki açılımlarının bu çarpana göre ağırlıklı ortalamaları alınmaktadır:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho} \frac{(1-\theta)(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) + \theta(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2}$$

Bu bağıntıda $\theta=0.5$ alınması halinde tekrar Crank-Nicolson yöntemine dönüleceği, $\theta=0$ için açık formülasyonun ve $\theta=1$ için de kapalı formülasyonun elde edileceği görülmektedir.

Yukarıdaki bağıntı t_{k+1} zamanındaki bilinmeyenler cinsinden düzenlenerek

$$-r\theta T_{i-1}^{k+1} + (1+2r\theta)T_i^{k+1} - r\theta T_{i+1}^{k+1} = r\theta T_{i-1}^k + [1-2r(1-\theta)]T_i^k + r\theta T_{i+1}^k \quad (2.28)$$

elde edilir. Bu denklem yine Crank-Nicolson yönteminde olduğu gibi bütün noktalar için bir kez yazılarak üç-diyagonal bir denklem sistemi elde edilir ve Thomas yöntemiyle çözülebilir.

Burger (1987) çözüm için optimum bir değer $\theta=2/3$ civarında elde edileceğini belirtmiştir.

Bu yöntem için de örnek olarak yukarıdaki problem ele alınmış olup $r=0.5$ olmak üzere levhanın orta çizgisinde ($x=1.0$) θ 'nın çeşitli değerleri için 10 zaman adımında elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

$r = 0.5$			sayısal çözümler					hatalar				
i	t	analitik	Teta = 2/3	0.878	1.0	0.5	0.0	Teta = 2/3	0.878	1.0	0.5	0.0
0	0	100	100	100	100	100	100	0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.206	80.06	83.63	84.94	85.57	82.32	75.00	3.57	4.88	5.51	2.26	-5.06
2	0.413	71.80	74.28	75.35	75.95	73.48	75.00	2.48	3.55	4.15	1.68	3.20
3	0.619	65.46	67.44	68.25	68.74	66.86	62.50	1.98	2.79	3.28	1.40	-2.96
4	0.825	60.11	61.82	62.48	62.89	61.34	62.50	1.71	2.37	2.78	1.23	2.39
5	1.031	55.42	56.95	57.53	57.88	56.52	53.13	1.53	2.11	2.46	1.10	-2.30
6	1.238	51.18	52.61	53.15	53.47	52.21	53.13	1.43	1.97	2.29	1.03	1.95
7	1.444	47.33	48.68	49.19	49.49	48.30	45.31	1.35	1.86	2.16	0.97	-2.02
8	1.650	43.79	45.09	45.59	45.88	44.71	45.31	1.30	1.80	2.09	0.92	1.52
9	1.856	40.52	41.79	42.28	42.56	41.40	38.67	1.27	1.76	2.04	0.88	-1.85
10	2.063	37.51	38.74	39.23	39.51	38.36	38.67	1.23	1.72	2.00	0.85	1.16

θ 'nin seçilen örnek değerleri arasında en az hatanın $\theta=0.5$ için (Crank-Nicolson çözümü) elde edildiği, yani belirtildiği gibi optimum değer $0 < \theta < 2/3$ aralığında olduğu görülmektedir. Optimum değer tam olarak bulunması için θ 'nin başka değerlerinin denemesi gerekmektedir.

2.4 Hiperbolik denklemler

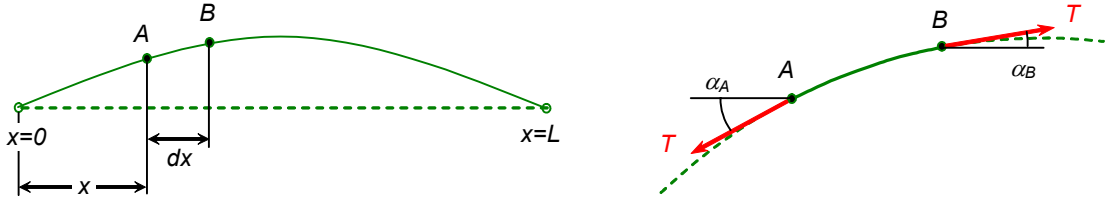
Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin üçüncü bir sınıfı olan hiperbolik denklemler çoğu kez zamana bağlıdır. Bir ortam içerisindeki titreşimlerin ve özellikle dalgaların nasıl yayıldığını tanımlarlar. Bu nedenle de "dalga denklemleri" olarak adlandırılırlar.

Dalga denklemlerinin en basit birisi bir-boyutlu haldeki salınım yapan yay problemine ait olanıdır. İki-boyutlu halde bir davulcunun titreştirdiği davul zarı örnek olarak düşünülebilir. Üç-boyutlu halin hayal edilmesi biraz daha zor olsa da örnek olarak şeffaf bir jelatin içerisinde bir sıvı içerisinde suspansiyon halinde yer alan taneciklerin jelatin zarfa bir çarpma olduğundaki hareketi problemi alınabilir. Her üç haldeki hareketlerin de sürtünme kuvvetlerinin etkisiyle zaman içerisinde sönümleneceği söylenebilir.

2.4.1 Titreşen yay problemi:

Hiperbolik kısmi-diferansiyel denklemlere bir örnek olarak, sabit iki uç noktası arasında gerilmiş olan bir yayın osilasyon hareketlerini modelleyen 1-boyutlu dalga denklemi dikkate alınabilir.

Şekilde bir yay uç noktalarını birleştiren doğruya göre ötelemeleri çok abartılmış olarak gösterilmektedir. Yayın A ve B gibi yakın iki noktası arasında kalan dx uzunluğundaki bir elemanı şekilde ayrıca büyütülmüş olarak gösterilmiştir. A ve B noktalarında teğetlerin eğim açıları sırasıyla α_A ve α_B ile belirtilmiş olup, yayın eğilmelerinin de abartılı olduğuna dikkat edilmelidir. Yayın ötelemeleri iki ucunu birleştiren doğruya dik olarak ölçülmekte olup u ile gösterilecektir. Yaya etkiyen gerilme kuvveti A ve B noktalarında T ile belirtilmiştir.



Yukarı doğru kuvvetler pozitif işaretli olmak üzere yay elemanının her iki ucuna etkiyen kuvvetlerin düşey bileşenleri sırasıyla

$$-T \sin \alpha_A \quad T \sin \alpha_B \quad (2.29)$$

olacaktır. Ötelemelerin şekil üzerinde aşırı abartılı gösterildiği tekrar hatırlatılarak açıların aslında çok küçük olduğu belirtilirse açıların tanjantları ile sinüsleri aynı kabul edilebilir. Buna göre

$$\begin{aligned} -T \sin \alpha_A &= -T \tan \alpha_A = -T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A \\ T \sin \alpha_B &= T \tan \alpha_B = T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_B = T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_A + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right] \end{aligned}$$

ve böylece yay elemanına düşey yönde etkiyen net (bileşke) kuvvet de

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx$$

olur. Şimdi düşey doğrultuda Newton kanunu uygulanarak bu kuvvet yayın kütlesi ile ivmenin çarpımına eşitlenirse, w yayın birim uzunluk başına ağırlığı olmak üzere

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \frac{w dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

veya düzenlenerek

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{Tg}{w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

elde edilir. Bu denklem ikinci-dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin standart biçimi için daha önce tanımlanan denklemle karşılaştırılırsa $A=1$, $B=0$, $C=-Tg/w$ olduğu ve bu büyüklüklerle birlikte bu denklemin hiperbolik denklemler sınıfına girdiği görülür.

Bir yay yerine gerilmiş bir membran (davul zarı gibi) dikkate alınırsa (2.30) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{Tg}{w} \right) \nabla^2 u \quad (2.31)$$

şeklini alır. (2.30) ve (2.31) denklemlerinin çözümü sınır koşullarını ve $t=0$ anındaki başlangıç koşullarını sağlamalıdır. Problem t zamanına göre ikinci dereceden olduğu için başlangıç koşulları yayın bütün noktalarında başlangıç hızlarını ve başlangıç ivmelerini içermelidir.

Titreşen yay probleminin sayısal çözümü

(2.30) denklemi, türevler sonlu-fark yaklaşımıyla ayrıklaştırılarak çözülebilir. Ayrıklaştırmalar uzayda hesaplanmış zaman adımında merkezi farklarla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

şeklinde ve zamanda da hesaplanmış zaman adımı etrafında merkezi farklarla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{(\Delta t)^2}$$

şeklinde yapılarak

$$\frac{u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}}{(\Delta t)^2} = \left(\frac{Tg}{w} \right) \cdot \frac{u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k}{(\Delta x)^2}$$

sonraki zaman adımındaki ötelemeler için

$$u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + 2u_i^k + \left(\frac{Tg}{w} \right) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)$$

veya düzenlenerek

$$u_i^{k+1} = \frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} (u_{i-1}^k + u_{i+1}^k) - u_i^{k-1} + 2 \left[1 - \frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} \right] u_i^k$$

elde edilir. Şayet

$$\frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{w}{Tg}} \Delta x$$

alınırsa (ki bu değer kararsızlığın olmayacağı en büyük değerdir) denklem

$$u_i^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1} \quad (2.32)$$

şekline gelir.

Bu son denklem zamanda nasıl ilerleneceğini açık bir biçimde göstermektedir. Buna göre yayın bir x_i noktasında ötelemenin yeni bir zaman adımında hesaplanması için komşu noktaların bir önceki zaman adımındaki ötelemeleri toplanarak hesap noktasında iki zaman adımı önceki ötelemenin değeri bundan çıkartılmaktadır. Yani herhangi bir zaman adımındaki hesaplamalar için daha önceki iki zaman adımına ait değerlere gereksinim olmaktadır.

Yukarıdaki hesaplama tekniğinin ancak ikinci zaman adımından itibaren yürütülebileceği açıktır. Bunun için de $t=0$ anındaki ve $t=\Delta t$ ilk zaman adımındaki ötelemelerin bilinmesi gerekir. Ancak burada $t=\Delta t$ ilk zaman adımındaki ötelemelerin nasıl elde edileceği hususu açık değildir. Zira yukarıdaki hesaplama tekniğine göre ilk zaman adımında hesaplama yapılabilmesi için $t=0$ anındaki ve bundan daha önceki bir $t=-\Delta t$ anında (!) ötelemelerin bilinmesi gerekir.

Aslında titreşen bir yayın salınımlarının zamana göre periyodik bir fonksiyon olduğu dikkate alınır ise ortada önemli bir sorun olmadığı görülür. Buna göre problemin başlangıç anı keyfi bir an olup çözüm için bu andaki hızların ve ivmelerin bilinmesi gerekmektedir. Başlangıç anında hızlar verildiği takdirde $t=-\Delta t$ anındaki ötelemeler bulunabilir.

Hızlar ötelemelerin zamana göre türevi olup başlangıç koşullarından birisi olarak hızların

$$t=0 \text{ da} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 = g(x)$$

olarak verildiği varsayılırsa bu türev için merkezi farklarla ayrıklaştırma yapılarak

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} = g(x)$$

veya

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2g(x)\Delta t$$

ve bu ifade de (2.32) denkleminde kullanılarak

$$u_i^{+1} = \frac{u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0}{2} + g(x)\Delta t \quad (2.33)$$

elde edilir.

Buna göre, ilk zaman adımı için (2.33) denklemi ve daha sonraki bütün zaman adımları için de (2.32) denklemi kullanılarak çözüm gerçekleştirilebilir.

Örnek:

Bir banjo yayı 80 cm uzunluğunda ve 1 gr ağırlıkta olup 40000 gr lık bir kuvvetle gerilmiştir. Bir ucundan 20 cm mesafedeki bir noktadan denge konumuna kıyasla 0.6 cm çekilerek bırakılmıştır. Yay boyunca ötelemeleri zamanın fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Çözüm için ilk adımda (2.33) ve daha sonraki adımlarda da (2.32) denklemini kullanınız. Hesaplamalarda $\Delta x=10$ cm alınız. Yay çekildikten hemen sonra bırakıldığı için başlangıç hızları sıfır alınacaktır. Ötelemelerin her 16 adımda bir tekrarlandığını gösteriniz.

Verilen büyüklüklerle zaman adımı

$$\Delta t = \sqrt{\frac{w}{Tg}} \Delta x = \sqrt{\frac{1/80}{40000 \times 980}} \times 10 = 0.000179 \text{ s}$$

ve başlangıç hızları sıfır olup

$$g(x) = 0$$

ilk zaman adımındaki ötelemeler

$$u_i^{+1} = \frac{u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0}{2}$$

ve sonraki zaman adımlarındaki ötelemeler

$$u_i^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1}$$

şeklinde hesaplanacaktır. Başlangıçtaki ötelemeler için $x=20$ de $u=0.6$ cm verilmiş olup buna göre diğer hesap noktalarındaki ötelemeler

$$x < 20 \text{ için} \quad u = 0.03x$$

$$x > 20 \text{ için} \quad u = 0.6 - 0.03(x-20)$$

şeklinde hesaplanabilir. Çeşitli zaman adımları için elde edilen sonuçlar tabloda yer almıştır.

çeşitli x_i konumlarındaki u_i değerlerinin zamanla değişimi									
k	x = 0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	0.00	0.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
1	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
2	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
3	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
4	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00
5	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.00
6	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
7	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.40	-0.30	0.00
8	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.60	-0.30	0.00
9	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.50	-0.40	-0.30	0.00
10	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.40	-0.30	-0.20	-0.10	0.00
11	0.00	-0.10	-0.20	-0.30	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.00
12	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00
13	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
14	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
15	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
16	0.00	0.30	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
17	0.00	0.30	0.40	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
18	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
19	0.00	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.20	0.10	0.00
20	0.00	-0.10	-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.10	0.00

Tablodan görüldüğü gibi yay $16\Delta t$ zaman adımından sonra tekrar eski konumuna gelmekte ve daha sonra da aynı hareketi tekrar etmektedir. Buna göre hareketin frekansı hesaplanırsa

$$f = \frac{1}{16 \times 0.000179} = 350 \text{ hz}$$

elde edilir. Fizikte bu dalga hareketi için verilen standart formül uygulanırsa

$$f = \left(\frac{1}{2L} \right) \sqrt{\frac{Tg}{w}} = \left(\frac{1}{2 \times 80} \right) \sqrt{\frac{40000 \times 980}{1/80}} = 350 \text{ hz}$$

şeklinde aynı sonuç elde edilir.

Görüldüğü gibi uygulanan sayısal yöntem frekanslar için tam (exact) sonuç vermiştir. Çözüm yönteminin kararlı olduğu da anlaşılmaktadır. Ötelemeler için bulunan çözümlerin ne kadar doğru olduğu ise izleyen bölümdeki analitik çözümle daha iyi anlaşılacaktır.

2.4.2 D'Alembert çözümü

Titreşen yay problemi aslında analitik çözümü elde edilebilen bir problemdir. Bu analitik çözüm *D'Alembert çözümü* olarak bilinir.

Yayın ötelemeleri için çözümün, F ve G keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \quad (2.34)$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Bu ifadenin zamana ve konuma göre ikinci türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial(x+ct)} \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = F'c - G'c$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(F'' + G'')$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial(x+ct)} \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} = F' + G'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F'' + G''$$

ve yayın osilasyon hareketi için daha önceden çıkartılan (2.30) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{Tg}{w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad c^2 (F'' + G'') = \frac{Tg}{w} (F'' + G'')$$

denklemin
$$c^2 = \frac{Tg}{w}$$

için sağlandığı görülür. Bu sonuç, F ve G fonksiyonlarının başlangıç ve sınır koşulları sağlanacak biçimde bulunması halinde (2.30) denkleminin çözümünün elde edileceği anlamına gelmektedir.

Başlangıç koşullarının

$$u(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

şeklinde verildiğini varsayalım. Çözüm için

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \left(\frac{1}{2c} \right) \int_{x-ct}^{x+ct} g(v) dv \quad (2.35)$$

şeklindeki bir kombinasyonun (2.34) bağıntısıyla aynı biçimde olduğu ve sınır koşullarını sağladığı gösterilebilir. Nitekim (2.35) bağıntısında $t=0$ konduğunda

$$u(x,0) = \frac{1}{2}[f(x) + f(x)] + \frac{1}{2c} \int_x^x g(v)dv = f(x)$$

elde edilmekte olup hızlar için başlangıç koşullarının sağlandığı görülmektedir. Ayrıca (2.35) bağıntısının t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x-ct}^{x+ct} g(v)dv \right]$$

ilk terim için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [f(x+ct) + f(x-ct)] &= \frac{1}{2} [c \cdot f'(x+ct) + (-c) \cdot f'(x-ct)] \\ &= \frac{c}{2} [f'(x+ct) - f'(x-ct)] \end{aligned}$$

ve integral terimi için de $I(v)$ fonksiyonu $g(v)$ fonksiyonun integrali olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x-ct}^{x+ct} g(v)dv \right] &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} [I(v)]_{x-ct}^{x+ct} = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} [I(x+ct) - I(x-ct)] \\ &= \frac{1}{2c} [c \cdot g(x+ct) - (-c) \cdot g(x-ct)] \\ &= \frac{1}{2} [g(x+ct) + g(x-ct)] \end{aligned}$$

olup bu iki bağıntıda $t=0$ konarak başlangıç anında türev için

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{c}{2} [f'(x) - f'(x)] + \frac{1}{2} \cdot [g(x) + g(x)] = g(x)$$

elde edilir. Böylece ivme için de başlangıç koşullarının sağlandığı görülmektedir.

Bu şekilde (2.35) denkleminin titreşen yay probleminin analitik çözümü olduğu gösterilmiştir. Şimdi daha önce (2.32) bağıntısıyla önerilen sayısal çözümün yukarıdaki örnek problem için (2.35) denklemini ne ölçüde karşıladığını görmeye çalışalım. Öncelikle

$$\frac{Tg}{w} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta x = c \Delta t$$

olup şayet herhangi bir $t=t_k=k\Delta t$ anında herhangi bir $x=x_i=i\Delta x$ konumundaki öteleme u_i^k ile gösterilirse

$$c t_k = c(k \Delta t) = k(c \Delta t) = k \Delta x$$

olup bu öteleme için (2.34) bağıntısından

$$\begin{aligned} u_i^k &= F(x_i + ct_k) + G(x_i - ct_k) = F(i\Delta x + k\Delta x) + G(i\Delta x - k\Delta x) \\ &= F[(i+k)\Delta x] + G[(i-k)\Delta x] \end{aligned} \tag{2.36}$$

bulunur. Bu bağıntı yardımıyla

$$u_i^{k+1} = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1} \quad (2.32)$$

denklemindeki her bir terim yazılırsa

$$u_{i+1}^k = F[(i+1+k)\Delta x] + G[(i+1-k)\Delta x]$$

$$u_{i-1}^k = F[(i-1+k)\Delta x] + G[(i-1-k)\Delta x]$$

$$u_i^{k-1} = F[(i+k-1)\Delta x] + G[(i-k+1)\Delta x]$$

$$u_i^{k+1} = F[(i+k+1)\Delta x] + G[(i-k-1)\Delta x]$$

Verilen örnekte F ve G fonksiyonları x değişkeninin lineer fonksiyonları olup

$$F(a) + F(b) = F(a+b) \quad G(a) + G(b) = G(a+b)$$

özellikleri geçerlidir. Bu koşulla yukarıdaki ilk üç bağıntı (2.32) denkleminin sağ tarafında yerleştirildiği takdirde

$$\begin{aligned} u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1} &= F[(i-1+k)\Delta x] + G[(i-1-k)\Delta x] \\ &\quad + F[(i+1+k)\Delta x] + G[(i+1-k)\Delta x] \\ &\quad - F[(i+k-1)\Delta x] - G[(i-k+1)\Delta x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1} &= F[(i-1+k)\Delta x + (i+1+k)\Delta x - (i+k-1)\Delta x] \\ &\quad + G[(i-1-k)\Delta x + (i+1-k)\Delta x - (i-k+1)\Delta x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i-1}^k + u_{i+1}^k - u_i^{k-1} &= F[(i+k+1)] + G[(i-k-1)\Delta x] \\ &= u_i^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (2.32) eşitliği sağlanmaktadır.

Bu incelemeden elde edilen sonuç basit (2.32) bağıntısının ilk zaman adımı için tam (exact) sonuç verdiği şeklindedir. Buna göre daha sonraki adımlar da tam (exact) sonuç verecektir.

2.4.3 Başlangıç anında hızların sıfır olmaması hali

Önceki örnekte başlangıç hızları sıfır olmak üzere bir yayın osilasyon hareketi incelenmişti. Şimdi başlangıç hızının sıfır olmaması halinde ne yapılabileceğini görmeye çalışalım. (2.33) denklemini hesapların başlatılması için hayli basit bir denklem olmakla birlikte verdiği sonuçların doğruluğu önceki örnekte sadece $g(x)=0$ hali için gösterilmiştir. İzleyen örnekte $g(x)$ sıfır olmadığı takdirde (2.33) denkleminin nasıl doğru olmayan sonuç verdiği gösterilecek, ayrıca başlangıç için daha iyi bir yol ortaya konacaktır.

Örnek:

9 birim uzunluktaki bir yay başlangıçta iki uç noktası arasında bir doğru parçası biçiminde denge durumundadır. Osilasyon hareketi bu yaya çarpılarak başlatılmakta olup bu bakımdan başlangıç anındaki hızlar sıfırdan farklıdır ve $\partial u/\partial t = 3 \sin(\pi x/L)$ şeklinde verilmiştir. Bir Δt zaman adımının sonundaki ötelemeleri hesaplayınız.

Hesaplamalar için $\Delta x = 1$ ve $c^2 = Tg/w = 4$ alınır.

$\Delta x = 1$ ve yayın uzunluğu 9 birim olduğu için yay üzerinde 9 aralık ve 8 adet iç hesap noktası bulunacaktır.

Hesaplamalarda $c^2 = \frac{Tg}{w} = 4$ alınması öngörülmüş olup, ayrıca $\frac{Tg(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} = 1$ olduğundan

$$c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = 1 \rightarrow \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{c^2} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{c} = \frac{1}{2} = 0.5$$

elde edilir.

Birinci zaman adımındaki ötelemelerin hesaplanması için daha önce (2.33) denklemi kullanılmıştı. Ancak (2.35) denklemi dikkate alınarak hesaplar için bir başka yol daha olduğu görülebilir. Nitekim (2.35) denkleminde $t = \Delta t$ konursa ve $c\Delta t = \Delta x$ olduğu dikkate alınır

$$u(x_i, \Delta t) = \frac{1}{2} [f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x)] + \left(\frac{1}{2c} \right) \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} g(v) dv$$

$$u(x_i, \Delta t) = \frac{1}{2} [u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0] + \frac{1}{2c} \left[\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} g(v) dv \right] \quad (2.37)$$

elde edilir. Bu denklemin (2.33) denkleminde tek farkı sonuncu terimidir. Şayet $g(x) = Sb$ alınır bu terimler de aynı olacaktır. Ancak şimdiki örnekte olduğu gibi $g(x)$ sabit olmadığında (2.37) denklemindeki integralin bir şekilde hesaplanması gerekmektedir.

Aşağıdaki tabloda yayın sadece sol yarısındaki 4 nokta için her iki teknikle (2.33 ve 2.37) denklemleri kullanılarak elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla birlikte verilmiştir. Yayın sağ yarısındaki çözümler simetrik olacaktır. Başlangıç konumları sıfır olduğu için bu iki denklem doğrudan

$$\boxed{u(x_i, \Delta t) = g(x_i) \cdot \Delta t} \quad \text{ve} \quad \boxed{u(x_i, \Delta t) = \frac{1}{2c} \left[\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} g(v) dv \right]}, \quad g(x) = 3 \sin\left(\frac{\pi v}{L}\right)$$

şeklinde uygulanmıştır. (2.37) denklemindeki integralin sayısal hesabında Simpson 1/3 yöntemi kullanılmış

$$u(x_i, \Delta t) = \frac{1}{2c} \left[\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} g(v) dv \right] = \frac{1}{2c} \cdot \frac{\Delta x}{3} [g(x_{i-1}) + 4g(x_i) + g(x_{i+1})]$$

analitik integral ise

$$u(x_i, \Delta t) = \frac{1}{2c} \left[\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} g(v) dv \right] = \frac{1}{2c} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} 3 \sin\left(\frac{\pi v}{L}\right) dv = \frac{1}{2c} \cdot \frac{3L}{\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{L} x_{i+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{L} x_{i-1}\right) \right]$$

şeklinde hesaplanmıştır.

x	u _i (x,0)	g(x _i)	(2.33) denklemi	(2.35) denklemi	
				Simpson 1/3 integrali	Analitik integral
0.0	0.0	0.00000			
1.0	0.0	1.02606	0.51303	0.50272	0.50267
2.0	0.0	1.92836	0.96418	0.94480	0.94472
3.0	0.0	2.59808	1.29904	1.27292	1.27282
4.0	0.0	2.95442	1.47721	1.44752	1.44739
5.0	0.0	2.95442			

Bu sonuçlar göstermektedir ki sayısal integral kullanılarak (2.35) denklemi ile elde edilen sonuçlar analitik sonuçlarla hemen hemen aynı iken (2.33) denklemiyle elde edilen sonuçlar daha az doğrudur. (2.33) denklemi kullanılırken Δx in (ve sonuç olarak Δt nin) küçültülmesiyle hassasiyet artırılabilir.

2.4.4 İki boyutlu dalga denklemi

Sonlu fark yöntemi iki- veya üç-boyutlu hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için de uygulanabilir. İki-boyutlu hal için tipik bir problem bir membranın titreşim hareketidir.

Dikdörtgensel bir çerçeve içine gerilmiş ince, bükülebilir bir membranın titreşimi problemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad c^2 = \frac{Tg}{w}$$

hiperbolik denklemiyle modellenir. Burada x ve y koordinatları, t zamanı ve u da ötelemeleri belirtmektedir. T birim uzunluk başına üniform gerilme, g yer çekimi ivmesi, w de birim alan başına ağırlıktır.

$\Delta x = \Delta y = h$ olmak üzere merkezi farklarla ayrıklaştırma yapılarak

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k}{h^2} \quad (2.38)$$

ve yeni zaman adımı için düzenleme yapılarak

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{c^2 (\Delta t)^2}{h^2} (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) - u_{i,j}^{k-1} + 2u_{i,j}^k \left[1 - 2 \frac{c^2 (\Delta t)^2}{h^2} \right] \quad (2.39)$$

elde edilir. Şayet

$$\frac{c^2 (\Delta t)^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

alınırsa sonucu terim yok olur

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) - u_{i,j}^{k-1} \quad (2.40)$$

Birinci zaman adımındaki çözüm için başlangıç anında zamana göre merkezi farklarla

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 = \frac{u_{i,j}^{+1} - u_{i,j}^{-1}}{2\Delta t} = g(x_i + y_i) \quad \rightarrow \quad u_{i,j}^{-1} = u_{i,j}^{+1} - 2\Delta t g(x_i, y_i)$$

yazılıp son denklemde kullanılarak

$$u_{i,j}^{+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0 + u_{i,j+1}^0 + u_{i,j-1}^0) + (\Delta t)g(x_i, y_j) \quad (2.41)$$

bulunur.

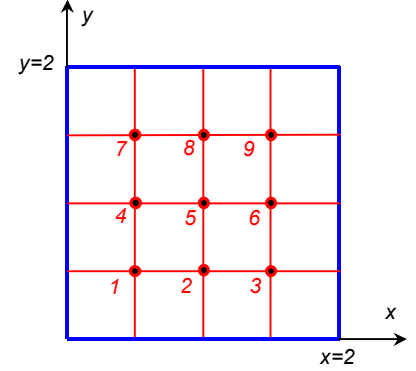
Örnek:

xy-Düzleminde $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ kare bölgesinde bir çerçeve içerisine gerilmiş olan membran için $c^2 = Tg/w = 3$ olup membranın çeşitli noktalarındaki ilk hızlar ve ötelemeler

$$g(x, y) = 0, \quad u = x(2-x)y(2-y)$$

olarak verilmiştir. Ötelemelerin zamanla değişimini hesaplayınız. Hesaplamalar için $\Delta x = \Delta y = h = 1/2$ alınız.

Seçilen hücre genişliği ile 9 adet iç nokta (hesap noktası) elde edilir.



Zaman adımı $\frac{c^2(\Delta t)^2}{h^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta t = \frac{h}{c\sqrt{2}} = \frac{0.5}{\sqrt{3 \times 2}} = 0.2041$

İlk hızlar $g_{i,j} = 0$ olup

ilk zaman adımında $u_{i,j}^{+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0 + u_{i,j+1}^0 + u_{i,j-1}^0)$

sonraki zaman adımlarında $u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) - u_{i,j}^{k-1}$

ile hesap yapılacaktır.

Problemin analitik bir çözümü $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ bölgesinde dikdörtgensel bir çerçeveye gerilmiş membran için başlangıç koşullarında ötelemeler $u = Ax(a-x)y(a-y)$ olmak üzere

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \cos \left(c\pi t \sqrt{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}} \right)$$

$$B_{mn} = \frac{16a^2b^2A}{\pi^3 m^3 n^3} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

şeklinde verilmektedir.

Aşağıdaki tabloda çeşitli zaman adımlarında elde edilmiş çözümler yer almaktadır. Aynı tabloya 1, 2 ve 5 numaralı noktalardaki analitik çözümler de konulmuştur.

Nokta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Analitik çözüm		
x	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.5	0.5	1.0	1.0
y	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	0.5	0.5	1.0
t												
0.000	0.563	0.750	0.563	0.750	1.000	0.750	0.563	0.750	0.563	0.563	0.750	1.000
0.204	0.375	0.531	0.375	0.531	0.750	0.531	0.375	0.531	0.375	0.380	0.536	0.755
0.408	-0.031	0.000	-0.031	0.000	0.063	0.000	-0.031	0.000	-0.031	-0.044	-0.009	0.083
0.612	-0.375	-0.531	-0.375	-0.531	-0.750	-0.531	-0.375	-0.531	-0.375	-0.352	-0.539	-0.813
0.816	-0.500	-0.750	-0.500	-0.750	-1.125	-0.750	-0.500	-0.750	-0.500	-0.502	-0.746	-1.114
1.021	-0.375	-0.531	-0.375	-0.531	-0.750	-0.531	-0.375	-0.531	-0.375	-0.407	-0.535	-0.691
1.225	-0.031	0.000	-0.031	0.000	0.063	0.000	-0.031	0.000	-0.031	-0.015	0.008	0.030
1.429	0.375	0.531	0.375	0.531	0.750	0.531	0.375	0.531	0.375	0.410	0.534	0.688

Sonlu-fark çözümlerinde bir simetri mevcut olup belli frekanslarla tekrarlanmaktadır. Analitik çözümlerle tam bir uyum yoktur.

$$\frac{c^2(\Delta t)^2}{h^2} = \frac{1}{2}$$

oranının azaltılması ortalama hassasiyette bir iyilik yaratmaz. Analitik çözümlere yaklaşmak için h hücre genişliğinin azaltılması gereklidir. Bu durumda Δt de azalacak olup böylece daha fazla zaman adımında hesap yapılması gerekecektir. Bu da bilgisayar süresi açısından olumsuz bir durumdur. Bu bakımdan Crank-Nicolson veya ADI gibi kapalı yöntemlerin kullanılması önerilebilir.