

BÖLÜM 4

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

4.1 Giriş

4.2 Taylor serisi yöntemi

4.3 Euler yöntemi ve değişik uygulamaları

4.4 Runge-Kutta yöntemleri

4.5 Çok adımlı yöntemler

4.6 Yüksek-dereceden denklemler ve denklem sistemleri

4.7 Sınır değer problemleri

BÖLÜM 4

ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

4.1 Giriş

Gerçek hayattaki bir çok problem, türevler arasındaki ilişkiyi görmek daha kolay olduğundan diferansiyel denklemlerle modellenir. Örneğin Newton'un ikinci kanunu

$$f = Ma$$

ivmenin hızın zamanla değişimi olduğu hatırlanarak

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{f}{M}$$

şeklinde birinci dereceden, veya hızın da mesafenin türevi olduğu hatırlanarak

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a = \frac{f}{M}$$

şeklinde ikinci dereceden bir adi diferansiyel haline getirilebilir. İvmenin sabit olması halinde bu denklemlerin analitik çözümleri sırasıyla

$$v(t) = at + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$$

şeklinde olup, çözümlerde yer alan v_0 ve s_0 sabitleri sırasıyla hız ve konumun başlangıç değerleridir. Bu denklemler kullanılarak, bağımsız değişken olan t zamanının herhangi bir değerinde v hızının ve s konumunun sayısal değerleri elde edilebilir.

Birçok diferansiyel denklem analitik olarak çözülebilir ve bulunan genel çözümde denklemin derecesine eşit sayıda keyfi integral sabiti yer alır. Şayet sabit sayısınca koşul ortaya konulursa sabitlerin değerlerini elde etmek mümkün olur.

Bütün koşulların bağımsız değişkenin aynı değeri için belirlenmesi halinde problem "*başlangıç değer problemi*" olarak adlandırılır. Koşullar bağımsız değişkenin iki farklı değerinde, özellikle ilgilenilen bir bölgenin sınırlarında verildiği takdirde problem "*sınır değer problemi*" olarak nitelendirilir.

Bu bölümde adi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan sayısal teknikler ele alınacaktır. Problemin sayısal olarak çözümü için gerekli sayıda koşulun bilinmesi ve bu koşulların sayısal çözümde kullanılması gereklidir.

Çözüm tekniklerine Taylor-serisi yöntemi ile başlanacaktır. Taylor serisi kendi başına iyi bir yöntem olmakla kalmayıp diğer başka birçok yöntemin esasını teşkil eder.

Önce birinci-dereceden başlangıç-değer problemleri incelenecek, daha sonra yüksek-dereceden problemler ve sınır değer problemleri ele alınacaktır.

Başlangıç-değer probleminde sayısal çözüm bir başlangıç noktasında başlar. Bu noktadan itibaren bağımsız değişkenin değeri arttırılarak çözüm adım adım devam ettirilir. Sınır değer

probleminde ise çözüm bir sınırdan başlatılarak diğer sınıra doğru ilerletilir ve bu sınırdaki koşul sağlanmaya çalışılır. Bu da ancak iteratif olarak gerçekleştirilir.

Bir diferansiyel denklem çözülmek istendiğinde gerçekten bir çözümü olduğundan ve bu çözümün tek olduğundan emin olunmalıdır. Bu husus $dy/dx = f(x,y)$ eşitliğindeki $f(x,y)$ fonksiyonunun Lipschitz şartının sağlanmasını gerekli kılar:

$f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasını içine alan bir R bölgesinde tanımlı ve sürekli olduğunu varsayalım. Bölgenin kapalı ve bir dikdörtgenle sınırlı olduğunu kabul edelim. Şayet R bölgesindeki bütün x, y_1 ve y_2 ler için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

eşitsizliğini sağlayacak bir L varsa $f(x,y)$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. Bu bölümdeki bütün örneklerde ve problemlerde bu koşul sağlanmaktadır.

Bir sınır-değer probleminin çözümünün var ve tek olması için benzeri koşullar söz konusudur. p, q ve r büyüklüklerinin sadece x in fonksiyonu olduğu

$$\frac{d^2u}{dx^2} = pu' + qu + r, \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a) = uL, \quad u(b) = uR$$

biçimindeki bir lineer problemin, şayet:

- p, q ve r büyüklükleri $[a,b]$ aralığında sürekli ise ve

$[a,b]$ aralığında $q > 0$

ise çözümü vardır ve tektir.

4.2 Taylor-serisi yöntemi

Bilindiği gibi Taylor serisi çoğu fonksiyonu kuvvet serisi şeklinde ifade etmenin bir yoludur. $x=a$ civarındaki Taylor açılımında $(x-a)$ büyüklüğünün üslerinden oluşan terimlerin katsayıları fonksiyonun türevlerinin $x=a$ daki değerlerini içerir. Bunun anlamı, bir fonksiyonun ve türevlerinin $x=a$ noktasındaki değerleri biliniyorsa bu fonksiyonun bütün x noktalarındaki değerleriyle aynı değerleri verecek bir kuvvet serisinin yazılabileceği demektir. Buradaki incelemelerde $x=a$ yerine x_0 kullanılacaktır.

Bir $y(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $y' = f(x,y)$ şeklinde ve fonksiyonun başlangıç değeri de $y(x_0)$ şeklinde verilmiş olsun. Bu bilgiler kullanılarak $y(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ civarındaki Taylor açılımı yazılabilir. Bu açılım için gerekli olan $y' = f(x,y)$ büyüklüğünün istenilen dereceden türevleri alınabilir ve $x=x_0$ da değerleri hesaplanabilir. Ancak $y'(x)$ türevinde x yanında değeri bilinmeyen y büyüklüğünün de yer alması halinde türevin değerinin hesaplanması pek kolay olmayacaktır. Bu gibi durumlarda yüksek dereceden türevler x cinsinden ve y nin daha küçük dereceden türevleri cinsinden ifade edilir.

Örnek olarak

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1 \quad (4.1)$$

problemini ele alalım. Bu denklemin analitik çözümü

$$y(x) = -3e^{-x} - 2x + 2$$

şeklinde olup, $x=x_0$ daki Taylor açılımı yapılırsa

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Şayet $x - x_0 = h$ denilirse
$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3 + \dots \quad (4.2)$$

Burada $y(x_0)$ terimini değeri başlangıç şartından $y(0) = -1$ olarak bilinmektedir. (Açılım $x=0$ da yapıldığından bu örnekteki seri aslında bir Maclaurin serisidir).

Serideki ikinci terimin katsayısı (4.1) denkleminde $x=0$ ve $y=-1$ konularak

$$y'(x_0) = y'(0) = -2 \cdot (0) - (-1) = 1$$

şeklinde elde edilebilir.

İkinci- ve daha yüksek dereceden türevler, birinci türev için verilen (6.1) eşitliğinden ardarda türevler alınarak elde edilecektir. Bu türevlerin değerleri $x=0$ da hesaplanarak serinin yüksek dereceden terimlerinin katsayıları elde edilir:

$$\begin{aligned} y''(x) = -2 - y' & \rightarrow y''(0) = -2 - 1 = -3 \\ y'''(x) = -y'' & \rightarrow y'''(0) = 3 \\ y^{(4)}(x) = -y''' & \rightarrow y^{(4)}(0) = -3 \end{aligned}$$

Böylece $x=h$ noktasında fonksiyonun değerini elde etmek için seri çözümü

$$y(x) = -1 + 1.0 h - 1.5 h^2 + 0.5 h^3 - 0.125 h^4 + \text{hata}$$

şeklinde yazılır. Aşağıdaki tabloda $x=0$ ile $x=0.6$ arasındaki sayısal ve analitik çözümler yer almaktadır.

x	Analitik	4. türevelere kadar sayısal		5. türevelere kadar sayısal	
		y(x)	Hata	y(x)	Hata
0,00	-1,00000	-1,00000	0,00000	-1,00000	0,00000
0,10	-0,91451	-0,91451	0,00000	-0,91451	0,00000
0,20	-0,85619	-0,85620	-0,00001	-0,85619	0,00000
0,30	-0,82245	-0,82251	-0,00006	-0,82245	0,00000
0,40	-0,81096	-0,81120	-0,00024	-0,81094	-0,00002
0,50	-0,81959	-0,82031	-0,00072	-0,81953	-0,00006
0,60	-0,84643	-0,84820	-0,00177	-0,84626	-0,00018

Görüldüğü gibi $x < 0.3$ için uyum iyi iken $x > 0.3$ halinde fark giderek artmaktadır. Seride daha fazla terim alınması halinde uyumlu bölgenin genişleyeceği açıktır. Örneğin seride

$$y(x) = -1 + 1.0 h - 1.5 h^2 + 0.5 h^3 - 0.125 h^4 + 0.025 h^5 + \text{hata}$$

Şeklinde beşinci dereceye kadar türevlerin alınması halindeki sonuçlar tablonun sağ kolonlarında görülmektedir.

Bu hesaptaki hata serideki kullanılan en son terimden sonraki terimin değeri 0 ile x arasındaki herhangi bir noktada hesaplanarak elde edilebilir:

$$\text{hata} = \frac{x^5}{120} y^{(5)}(\xi) = \frac{x^5}{120} \times 3, \quad 0 < \xi < x$$

Son noktada hatanın en büyük olacağı düşüncesiyle hatanın tahmini değeri $x=0.6$ noktasında

$$hata = \frac{(0.6)^5}{120} \times 3 = 0.00194$$

olarak elde edilir ki tabloda mevcut hata değerine yakındır.

$y'(x)$ türevini ifade eden fonksiyonun yukarıdaki gibi basit olmadığı hallerde yüksek dereceden türevlerin hesaplanması da kolay olmaz.

Örneğin

$$y'(x) = \frac{x}{y-x^2}$$

Bilgisayarlar bu gibi türevleri hesaplayacak şekilde programlanmamakla birlikte Maple ve Mathematica gibi yazılımlarla türevleri elde etmek mümkündür.

Örnek

Diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

Analitik çözümü

$$\int_{y(x_0)}^{y(x_0+h)} dy = \int_{x_0}^{x_0+h} x^2 dx = \frac{1}{3} [x^3]_{x_0}^{x_0+h} = \frac{1}{3} [(x_0+h)^3 - (x_0)^3]$$

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h x_0^2 + h^2 x_0 + \frac{h^3}{3}$$

x_0 noktasında ardarda türevler

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = x_0^2, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_0} = 2x_0, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x_0} = 2, \quad \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{x_0} = 0$$

olup, Taylor açılımı

$$y(x_0+h) = y(x_0) + h x_0^2 + h^2 x_0 + \frac{h^3}{3}$$

Örnek

Diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

Analitik çözümü

$$y(x_0+h) = y(x_0) e^{2h}$$

x_0 noktasında türevler

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} (2y) = 2 \frac{dy}{dx} = 4y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx} (4y) = 4 \frac{dy}{dx} = 8y$$

.....

Taylor açılımı

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + 2h y(x_0) + \frac{4h^2 y(x_0)}{2!} + \frac{8h^3 y(x_0)}{3!} + \dots$$

$$= y(x_0) \left[1 + 2h + \frac{(2h)^2}{2!} + \frac{(2h)^3}{3!} + \dots \right]$$

Analitik çözümdeki eksponansiyel ifadenin seri açılımı $e^{2h} = 1 + 2h + \frac{(2h)^2}{2!} + \frac{(2h)^3}{3!} + \dots$

olup Taylor açılımının analitik çözümle aynı çözümü verdiği görülmektedir. Ancak çözümün seri olarak verilmesi halinde hassasiyet seride alınacak terim sayısına bağlı olacaktır.

Örnek

Diferansiyel denklem $\frac{dy}{dx} = x + y$

Analitik çözümü $y = -(x + 1) + C e^x$

Başlangıç şartı $y(x_0)$ olmak üzere C hesaplanarak $y = -x - 1 + [1 + x_0 + y(x_0)] e^{-x_0} e^x$

Veya $x_0 + h$ noktasındaki değer $y(x_0 + h) = -x_0 - h - 1 + [1 + x_0 + y(x_0)] e^h$

Türevler

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x + y) = 1 + x + y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(1 + x + y) = 1 + x + y$$

...

Taylor açılımı

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + 2h [x_0 + y(x_0)] + \frac{h^2 [1 + x_0 + y(x_0)]}{2!} + \frac{h^3 [1 + x_0 + y(x_0)]}{3!} + \dots$$

Veya $y(x_0 + h) = -x_0 - h - 1 + [1 + x_0 + y(x_0)] \left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots \right]$

Buradaki köşeli parantez içinde yer alan terim aslında e^h eksponansiyel büyüklüğünün açılımı olup yine Taylor açılımıyla analitik çözümün aynının elde edildiği, sadece çözümün seri formda verildiği görülmektedir.

4.3 Euler yöntemi

Euler yöntemi Taylor-serisinin sadece birinci dereceden terimini kullanan bir yöntemdir:

$$\boxed{y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + hata}, \quad hata = \frac{h^2}{2} y''(\xi) = O(h^2)$$

Bu ifade
$$\frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = y'(x_0)$$

şeklinde düzenlenirse fonksiyonun x noktasındaki değerinin $[x_0, y(x_0)]$ noktasından çizilen bir teğet ile elde edilmekte olduğu ve bu bakımdan bir miktar hata içereceği kolaylıkla görülebilir.

Şayet $h=x-x_0$ artımı yeterince küçük tutulursa hata küçük olacaktır. Bir kez $x=x_0+h$ noktasında y değeri elde edildikten sonra yeni bir adımda aynı hesap tekrar edilebilir:

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + O(h^2) \quad (4.3)$$

Buradaki hata lokal hata olup, çok sayıda adım atıldıktan sonraki hata $O(h)$ mertebesinde olacaktır.

Yöntemin, $y_0 = y(x_0)$ başlangıç değeri ile verilmiş bir $y'(x) = f(x, y)$ fonksiyonu için programlanması gayet kolaydır. Örneğin önceki paragrafta da incelenen

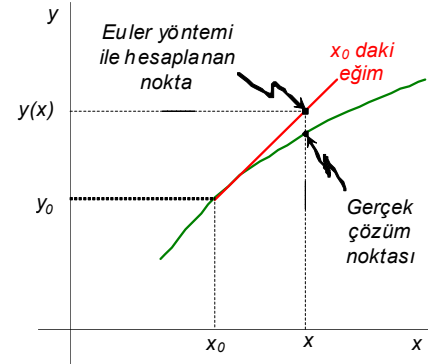
$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

denkleminin $h=0.1$ için çözümleri aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

x_n	y_n	y_n'	$h y_n'$	Analitik	Hata
0,0	-1,00000	1,00000	0,10000	-1,00000	0,00000
0,1	-0,90000	0,70000	0,07000	-0,91451	-0,01451
0,2	-0,83000	0,43000	0,04300	-0,85619	-0,02619
0,3	-0,78700	0,18700	0,01870	-0,82245	-0,03545
0,4	-0,76830	-0,03170	-0,00317	-0,81096	-0,04266

Bu tabloda y_n nin her bir satırdaki değeri, bir önceki satırda yer alan y_n değerine önceki satırda hesaplanmış olan $h y_n'$ değeri eklenerek elde edilmiştir. Görüldüğü gibi $x=0.4$ noktasındaki fonksiyon değeri 0.04266 hata ile elde edilmiştir. Bunun nedeni h adım uzunluğunun çok büyük olmasıdır. Hata h ile orantılı olduğuna göre virgülden sonra dördüncü hanede hassasiyetle çözüm elde etmek için adım uzunluğunu 426 kat küçültmek gerekmektedir. Örneğin adım uzunluğu yarı azaltılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda görülmektedir.

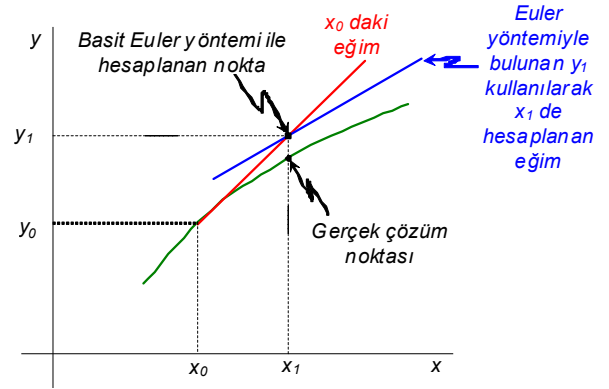
x_n	y_n	y_n'	$h y_n'$	Analitik	Hata
0,00	-1,00000	1,00000	0,05000	-1,00000	0,00000
0,05	-0,95000	0,85000	0,04250	-0,95369	-0,00369
0,10	-0,90750	0,70750	0,03538	-0,91451	-0,00701
0,15	-0,87213	0,57213	0,02861	-0,88212	-0,01000
0,20	-0,84352	0,44352	0,02218	-0,85619	-0,01267
0,25	-0,82134	0,32134	0,01607	-0,83640	-0,01506
0,30	-0,80528	0,20528	0,01026	-0,82245	-0,01718
0,35	-0,79501	0,09501	0,00475	-0,81406	-0,01905
0,40	-0,79026	-0,00974	-0,00049	-0,81096	-0,02070



4.3.1 Basit Euler yönteminin iyileştirilmesi

Çoğu basit yöntemin sorunu adım uzunluğunun son derece küçük olmasına gereksinim duyulması ve büyük adım uzunluğunda yeterince doğru sonuç vermemesidir. Şekilde basit Euler yönteminin küçük bir ilave çabayla nasıl bir miktar iyileştirilebileceği görülmektedir.

Euler yönteminde x_0 başlangıç noktasında hesaplanan birinci dereceden türev aslında gerçek fonksiyonun temsil ettiği eğrinin bu noktadaki teğettir. Bu teğet üzerinde x doğrultusunda h kadar ilerlenerek bulunan y_1 noktası, h adımının büyüklüğüne bağlı olarak eğrinin uzağına düşmektedir. Bu noktayı eğriye yaklaştırmamızın, yani daha doğru çözüm elde etmenin bir yolu x_0 daki türev yerine ortalama bir türev kullanmaktır.



Euler yönteminde iyileştirme herhangi bir x_n noktasındaki eğim yerine, bununla bir sonraki x_{n+1} noktasında elde edilecek türevin ortalamasını kullanarak

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2} \quad (4.4)$$

şeklinde yapılabilir. Ancak formülün bu şekilde doğrudan uygulanması mümkün değildir. Zira buradaki y'_{n+1} türevi x_{n+1} noktasındaki türev olup, türevin değeri aynı zamanda y_{n+1} büyüklüğüne bağlı olabilir ki çözümün bu aşamasında henüz y_{n+1} bilinmemektedir. Dolayısıyla çözüm iki aşamada gerçekleştirilecektir. Birinci aşamada basit Euler yöntemi ile yaklaşık bir y_{n+1} değeri elde edilecek, bu değer ve x_{n+1} birlikte kullanılarak y'_{n+1} türevi hesaplanacak, daha sonra (4.4) formülüyle y_{n+1} in yeni değeri hesaplanacaktır.

Aslında bu yöntemin birinci aşamasında elde edilen y_{n+1} değeri hata içerdiğinden bunun kullanılmasıyla elde edilen y'_{n+1} türevi de bir miktar hatalı olacaktır. Dolayısıyla ortalama türevle yapılan hesaplamada da hata söz konusu olacaktır. Ancak basit Euler yöntemine kıyasla bu hata daha küçük olacaktır.

Ortalama türevle elde edilen y'_{n+1} değeri tekrar kullanılarak türevin yeniden hesaplanması ve bunun da bir önce hesaplanan türevle ortalaması alınarak y_{n+1} değeri için daha iyi bir tahmin yapılması, hatta bu işlemin iteratif olarak devam ettirilerek çözümün çok daha iyileştirilmesi mümkündür. Ancak ileriki paragraflarda izah edilecek gelişmiş yöntemler dikkate alınırsa bu yöntemin zahmetine gerek olmadığı görülür.

Örnek olarak önceki paragraflarda ele alınan

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

problemi için bu iyileştirilmiş yöntem iki aşamalı olarak uygulanmış ve sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x_n	y_n	$h y_n'$	y_{n+1}	$h y_{n+1}'$	$h y_{ort}'$	y_{n+1}	Analitik	Hata
0,0	-1,00000	0,10000	-0,90000	0,07000	0,08500	-0,91500	-1,00000	0,00000
0,1	-0,91500	0,07150	-0,84350	0,04435	0,05793	-0,85708	-0,91451	0,00049
0,2	-0,85708	0,04571	-0,81137	0,02114	0,03342	-0,82365	-0,85619	0,00088
0,3	-0,82365	0,02237	-0,80129	0,00013	0,01125	-0,81241	-0,82245	0,00120
0,4	-0,81241	0,00124	-0,81117	-0,01888	-0,00882	-0,82123	-0,81096	0,00145
0,5	-0,82123	-0,01788	-0,83910	0,08391	0,03302	-0,78821	-0,81959	0,00164

İyileştirilmiş Euler yönteminin hatası, Taylor seri yöntemiyle karşılaştırılarak elde edilebilir.

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{1}{2} y_n'' h^2 + \frac{y_n'''(\xi)}{6} h^3, \quad x_n < \xi < x_n + h$$

Buradaki ikinci türev yerine

$$y_n'' = \frac{y_{n+1}' - y_n'}{h}$$

şeklinde ileri fark yaklaşımı alınır

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{1}{2} \left[\frac{y_{n+1}' - y_n'}{h} + O(h) \right] h^2 + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[y_n' + \frac{1}{2} y_{n+1}' - \frac{1}{2} y_n' + O(h^3) \right] + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y_n' + y_{n+1}'}{2} + O(h^3)$$

Görüldüğü gibi iyileştirilmiş Euler yönteminin hatası $O(h^3)$ mertebesinde olup, basit yöntemle göre bir mertebe daha iyidir. Ancak bu hata lokal hata olup, adım adım yapılan bir integrasyon sırasında hata birikmesi olacaktır. İntegral aralığındaki toplam hata $O(h^2)$ mertebesinde olacaktır.

4.3.2 Basit Euler yöntemi için farklı bir iyileştirme yöntemi

Yukarıda görüldüğü gibi iyileştirme yöntemi Euler yönteminde kullanılan eğimin ortalama bir değerini x_n ve x_{n+1} noktalarındaki eğimler yardımıyla bulma esasına dayanmaktadır. Bunun yukarıdakinden başka bir yolu da orta-nokta yöntemidir. Bu yöntemde integral adımının orta noktasındaki eğim ortalama eğim olarak kullanılır. Bunun için basit Euler yöntemiyle $x+h/2$ noktasında y değeri hesaplanır. Bu noktada eğim hesaplanarak kullanılır.

4.4. Runge-Kutta yöntemleri

Basit Euler yöntemi Taylor serisinde bir terim alınarak çıkartılmıştı. Değiştirilmiş Euler yöntemi de Taylor serisinde iki terim kullanılarak çıkartılabilir:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot h + y''(x_0) \frac{h^2}{2}$$

Şayet ikinci türev bir geri fark yaklaşımı ile temsil edilirse

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot h + \frac{y'(x_0 + h) - y'(x_0)}{h} \frac{h^2}{2}$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{y'(x_0) + y'(x_0 + h)}{2} h$$

şeklinde önceki paragrafta çıkarılan iyileştirilmiş Euler yöntemiyle aynı formülasyon elde edilir.

Alman matematikçiler Runge ve Kutta Taylor serisinde ikiden fazla terim alarak Euler yönteminin daha da iyileştirilebileceğini görmüşlerdir. İyileştirilmiş Euler yöntemi ikinci dereceden bir Runge-Kutta yöntemidir. Bu paragrafta sadece dördüncü- ve beşinci-dereceden Runge-Kutta yöntemleri incelenecektir.

İkinci-dereceden Runge-Kutta yöntemlerinde fonksiyonun bir x_0 noktasındaki $y(x_0)$ değerine k_1 ve k_2 gibi iki büyüklüğün ağırlıklı ortalamaları ilave edilmektedir.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + ak_1 + bk_2 \\ k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Buradaki k_1 ve k_2 büyüklüklerini x değişkeni h kadar artığında y de görülen değişimler olarak düşünebiliriz. Çünkü bunlar x deki h değişimi ile eğrinin çeşitli yerlerde alınmış dy/dx türevinin çarpımlarından oluşmaktadır.

Runge-Kutta yöntemleri y deki artımın ilk terimi olarak hep Basit Euler yöntemiyle elde edilen değeri (k_1) kullanmaktadır. Artımdaki ikinci terim (k_2) ise x ve y değerlerinin, h adımının sırasıyla α ve β çarpanları oranında arttırılmasıyla elde edilen yeni x ve y değerleriyle bulunan eğimle ilgilidir. a , b , α ve β parametrelerinin seçimine bağlı olarak değişik Runge-Kutta şemaları elde edilir.

$$\text{Taylor serisi} \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + \dots$$

$$f(x, y) \text{ nin türevi} \quad f' = \frac{df}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f$$

$$\text{olup, yukarıda kullanılarak} \quad y_{n+1} = y_n + hf_n + h^2 \left(\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} f_y f \right)_n + \dots \quad (4.9)$$

$$\text{Genel Runge-Kutta şeması (4.8)} \quad y_{n+1} = y_n + ahf(x_n, y_n) + bhf[x_n + \alpha h, y_n + \beta hf(x_n, y_n)] \quad (4.10)$$

Bu son bağıntıyı (4.9) ile karşılaştırabilmek için son terimi birinci mertebeden Taylor serisine açılırsa

$$f[x_n + \alpha h, y_n + \beta hf(x_n, y_n)] \approx (f + f_x \alpha h + f_y \beta hf)_n \quad (4.11)$$

$$\text{ve bu açılım (4.10) da yerleştirilirse} \quad y_{n+1} = y_n + ahf(x_n, y_n) + bh(f + f_x \alpha h + f_y \beta hf)_n$$

$$\text{Bu son bağıntı düzenlenerek} \quad y_{n+1} = y_n + (a + b)hf_n + h^2 (f_x \alpha bh + f_y \beta bhf)_n \quad (4.12)$$

Şimdi (4.12) bağıntısı (4.9) ile karşılaştırılırsa bu iki bağıntının eşdeğer olması için

$$a + b = 1, \quad \alpha b = \frac{1}{2}, \quad \beta b = \frac{1}{2}$$

olması gerektiği görülür. Ancak bu üç bağıntıya karşılık belirlenmesi gereken dört parametre mevcuttur. Bir parametre keyfi seçilerek ikinci-dereceden çeşitli Runge-Kutta formülasyonları elde edilebilir: Örneğin

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{Orta-nokta yöntemini}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1 \quad \text{İyileştirilmiş Euler yöntemini}$$

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{3}{4} \quad \text{bir başka yöntem}$$

verir.

En çok kullanılan Runge-Kutta yöntemleri dördüncü-dereceden yöntemlerdir. Bu yöntemlerin formülasyonunun elde edilmesi için de yukarıdakine benzer işlemler yapılır ve 13 parametrelilik, 11 denklemlilik bir sistem elde edilir. İki parametre keyfi seçilerek diğer parametreler hesaplanır. En çok kullanılan dördüncü-derece Runge-Kutta formülasyonlarından birisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= h f(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

Bu formülasyon, örnek olarak birinci-dereceden

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

denkleminde $h=0.1$ olmak üzere $[0.0-0.6]$ aralığında uygulanmış olup sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	k_{ort}	Analitik	Hata
0,0	-1,00000	0,10000	0,08500	0,08575	0,07143	0,08549	-1,00000	0,00000
0,1	-0,91451	0,07145	0,05788	0,05856	0,04560	0,05832	-0,91451	0,00000
0,2	-0,85619	0,04562	0,03334	0,03395	0,02222	0,03374	-0,85619	0,00000
0,3	-0,82246	0,02225	0,01113	0,01169	0,00108	0,01149	-0,82245	0,00000
0,4	-0,81096	0,00110	-0,00896	-0,00846	-0,01806	-0,00863	-0,81096	0,00000
0,5	-0,81959	-0,01804	-0,02714	-0,02668	-0,03537	-0,02684	-0,81959	0,00000
0,6	-0,84644	-0,03536	-0,04359	-0,04318	-0,05104	-0,04332	-0,84643	0,00000

Görüldüğü gibi sayısal sonuçlar analitik sonuçlarla virgülden sonra beşinci haneye kadar uymakta olup, daha önceki izah edilen yöntemlere kıyasla hayli tatminkar sonuçlar elde edilmektedir.

Dördüncü-dereceden Runge-Kutta yönteminin lokal hatası $O(h^5)$ ve global hatası $O(h^4)$ da mertebesindedir. İkinci-dereceden yöntemlere kıyasla çok daha etkin olması daha yüksek dereceden yöntemlerin de daha avantajlı olabileceğini akla getirmekle birlikte, derece büyüdükçe fonksiyon hesaplama sayısının da artacağı unutulmamalıdır.

4.4.1 Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi

Runge-Kutta yöntemiyle yapılan integrasyonun doğruluğunu tespit etmenin bir yolu bir adımda hesaplanan sonuç ile bu adım ikiye bölünerek iki adımda yapılan yeni bir hesapla elde edilen sonucun karşılaştırılmasıdır. İki sonuç arasındaki fark yeterince küçükse yapılan hesabın doğru ve seçilen adım uzunluğunun uygun olduğu kabul edilir. Fark büyükse adım uzunluğu tekrar ikiye bölünür ve aynı işlem tekrar edilir. Ancak bu yöntem yapılan işlem sayısını hayli arttırır.

Farklı bir yaklaşım da farklı dereceden Runge-Kutta yöntemlerinin uygulanmasıdır. Bu tip yaklaşımlarla işlem sayısında tasarruf sağlanabilir. Örneğin, dördüncü- ve beşinci-dereceden birer Runge-Kutta formülasyonu ile hesap yapıp sonuçlar karşılaştırılabilir ki Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi bu tipte bir yaklaşımdır.

Runge-Kutta-Fehlberg formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= h f\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right) \\
 k_3 &= h f\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right) \\
 k_4 &= h f\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right) \\
 k_5 &= h f\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right) \\
 k_6 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_{n+1} &= y_n + \left(\frac{25k_1}{216} + \frac{1408k_3}{2565} + \frac{2197k_4}{4104} - \frac{k_5}{5}\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right)
 \end{aligned}$$

global hata $\begin{cases} O(h^4) \\ O(h^5) \end{cases}$

Hata:

$$E = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}$$

Runge-Kutta-Fehlberg şeması, h ve $h/2$ adımlarıyla hesap yapmak yerine farklı hata mertebesinde dördüncü- ve beşinci dereceden iki Runge-Kutta formülasyonu ile hesap yapıp sonuçları karşılaştırma esasına dayanmaktadır. Bu yöntemin avantajı her iki hesaplamada da aynı k ların kullanılması suretiyle işlem sayısında tasarruf sağlamaktır.

Örnek olarak bir kez daha

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

denklemi ele alınmış olup, $h=0.1$ olmak üzere atılan bir adımla elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

$x_n = 0.0$	$k_1 = 0.1000000$	$y_{n+1} \text{ (RK4)} = -0.914512212$	$\text{hata (RK4)} = -0.000000043$
$y_n = -1.0$	$k_2 = 0.0925000$	$y_{n+1} \text{ (RK5)} = -0.914512251$	$\text{hata (RK4)} = -0.000000003$
$h = 0.1$	$k_3 = 0.0889609$		
	$k_4 = 0.0735157$	$\text{tam çözüm} = -0.914512254$	$E = -0.000000040$
	$k_5 = 0.0713736$		
	$k_6 = 0.0853872$		

Görüldüğü gibi dördüncü-dereceden Runge-Kutta şemasıyla elde edilen sonuç tam sonuca virgülden sonra yedinci haneye kadar uyarken, beşinci-dereceden şemayla bulunan sonuç virgülden sonra sekizinci haneye kadar uymaktadır. Bunun için ilave iki hesap (k_5 ve k_6) yetmiştir.

4.4.2 Runge-Kutta-Merson yöntemi

Runge-Kutta-Merson yöntemi 5 farklı k değerinin hesaplandığı bir başka dördüncü-dereceden Runge-Kutta şemasıdır:

$k_1 = h f(x_n, y_n)$ $k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{3}\right)$ $k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right)$ $k_4 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right)$ $k_5 = h f\left(x_n + h, y_n + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right)$	$k = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5) + O(h^5)$ $y_{n+1} = y_n + k$ <p>Hata:</p> $E = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$
--	--

4.4.3 Runge-Kutta-Gill algoritması

4. mertebeden yöntemler arasında en çok tercih edilen birisi de Runge-Kutta-Gill algoritmasıdır:

$k_1 = h f(x_i, y_i)$ $k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$ $k_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2\right)$ $k_4 = h f\left(x_i + h, y_i - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3\right)$
$k = \frac{1}{6} \left[k_1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) k_2 + 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) k_3 + k_4 \right]$
$y_{i+1} = y_i + k$

4.5 Çok adımlı yöntemler

Euler ve Runge-Kutta yöntemleri, bir adımdaki integral değerini hesaplamak için sadece en son adımda bulunan değerleri kullandıklarından “*tek-adımlı yöntemler*” olarak nitelendirilmektedir. Bu özelliklerinden dolayı her bir adımdaki hesabı farklı bir adım uzunluğu kullanarak yapabilmekte ve ayrıca başlangıç şartlarının bir noktada verilmesi halinde çözümü başlatabilmektedirler.

Diferansiyel denklem çözümü bir noktada başlatılıp ilk adımlar atıldıktan sonra çözüm yapılmış olan noktalarda fonksiyon ve türevleri hakkında bir bilgi sağlanmış olmaktadır. Bu bilgiler bilgisayar hafızasında saklanarak integrasyonun devamı için kullanılabilir. Bu şekilde önceki noktalarda elde edilen bilgileri sonraki noktalarda integrasyon için kullanan yöntemler “*çok adımlı yöntemler*” olarak adlandırılır.

Çok adımlı yöntemler, daha açık bir ifadeyle, y ve y' nün önceki değerlerini kullanarak türev fonksiyonuna bir polinom uydurup, bu polinomu sonraki adım için ekstrapole ederek integral alma esasına dayanırlar. Bu tipteki çoğu yöntemde polinomun oluşturulmasını kolaylaştırmak açısından eşit adım uzunluğu kullanması tercih edilir. Kullanılan geçmiş noktaların sayısı polinomun derecesini ve dolayısıyla kesme hatasının mertebesini belirler. Yöntemin derecesi global hata terimindeki h büyüklüğünün üssüne eşit olup polinomun derecesinden bir büyüktür.

4.5.1 Üçüncü-dereceden Adams-Bashford yöntemi

Çok adımlı tipik bir yöntem “*Adams-Bashford yöntemi*”dir. Bu yöntemle ait formülasyonu çıkartmak için birinci dereceden bir diferansiyel denklemi

$$dy = f(x,y)dx$$

şeklinde düzenleyelim ve x_n ile x_{n+1} aralığında integralini alalım:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx$$

Bu eşitliğin sağ tarafının integralini alabilmek için $f(x,y)$ fonksiyonu x bağımsız değişkeni cinsinden bir polinomla yaklaşık olarak ifade edilecektir. Polinom, hesaplanan son üç noktadan yararlanılarak hesaplanırsa kuadrik, dört nokta kullanılırsa kübik olur. Ne kadar çok nokta kullanılırsa (yuvarlatma hataları önemli olmadığı müddetçe) çözümün doğruluğu da o kadar artacaktır.

İnterpolasyon polinomların nasıl elde edilebileceği daha önce görülmüştü. İnterpolasyon polinomlarını *Mathematica* yazılımı vasıtasıyla da kolaylıkla elde etmek mümkündür.

Kuadrik yaklaşım için interpolasyon polinomu x_n noktası başlangıç noktası olmak üzere tanımlanan bir eksen takımında genel olarak

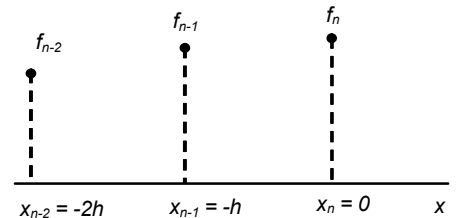
$$f(x,y) \approx P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

şeklinde ifade edilirse, üç noktanın koordinatları bu polinomu sağlayacağı için

$$a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = f_n$$

$$a_0 + a_1(-h) + a_2(-h)^2 = f_{n-1}$$

$$a_0 + a_1(-2h) + a_2(-2h)^2 = f_{n-2}$$



Birinci denklemden

$$a_0 = f_n$$

İkinci ve üçüncü denklemlerden

$$-a_1h + a_2h^2 = f_{n-1} - f_n$$

$$-2a_1h + 4a_2h^2 = f_{n-2} - f_n$$

Katsayılar çözümlenerek

$$a_1 = \frac{1}{2h}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})$$

$$a_2 = \frac{1}{2h^2}(3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

Böylece interpolasyon polinomu için

$$f(x,y) = \frac{1}{2h^2}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2})x^2 + \frac{1}{2h}(3f_n - 4f_{n-1} + f_{n-2})x + f_n$$

ve bu fonksiyon da $x_n = 0 - x_{n+1} = h$ aralığında integre edilerek

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) + O(h^4) \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu formül tek-adımlı formülleri andırmakla birlikte türevin atılan adımdaki bazı noktalarda hesaplanan değerleri yerine daha önceki adımlarda hesaplanan değerlerinden yararlanılmaktadır.

Örnek olarak daha önce olduğu gibi

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

denklemini ele alarak $x=0.6$ daki y değerini hesaplayalım.

Bu denklemin $x=0.2$ ve $x=0.4$ deki çözümleri tek-adımlı bir yöntemle elde edilerek bu değerler yardımıyla Adams-Bashford yöntemi uygulanabilir. Tek-adımlı yöntem olarak Runge-Kutta-Fehlberg yönteminin kullanıldığı hesap sonuçları aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

x	y	Analitik	$f(x,y)$	Hata
0.0	-1.0000000	-1.0000000	1.0000000	0.0000000
0.2	-0.8561921	-0.8561923	0.4561921	0.0000002
0.4	-0.8109599	-0.8109601	0.0109599	0.0000003
0.6	-0.8450765	-0.8464349		0.0013584

Hatayı azaltmak için adım uzunluğu küçültülebilir. $h=0.1$ için sonuçlar aşağıdaki tabloda sunulmuştur:

x	y	Analitik	$f(x,y)$	Hata
0.0	-1.0000000	-1.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	-0.9145123	-0.9145123	0.7145123	0.0000000
0.2	-0.8561923	-0.8561923	0.4561923	0.0000000
0.3	-0.8224547	-0.8224547	0.2224547	0.0000000
0.4	-0.8109601	-0.8109601	0.0109601	0.0000000
0.5	-0.8195920	-0.8195920	-0.1804080	0.0000000
0.6	-0.8463626	-0.8464349	-0.3536374	0.0000723

4.5.2 Dördüncü-dereceden Adams-Bashford yöntemi

Adi diferansiyel denklemin çözümünde geçmiş dört noktadaki değerlerden yararlanılması halinde kübik polinoma eşdeğer bir integral söz konusu olup bu durumda Adams-Bashford yöntemi dördüncü-derecedendir. Bu yöntemin formülasyonu "belirlenmemiş katsayılar yöntemiyle elde edilebilir. Bunun için

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = c_0 f_{n-3} + c_1 f_{n-2} + c_2 f_{n-1} + c_3 f_n$$

eşitliğindeki C_j sabitlerinin değerleri araştırılacaktır. Bu amaçla yapılacak işlemleri kolaylaştırmak için eksen takımı $x_n=0$ olacak şekilde kaydırılırsa, $x_{n+1}-x_n=h$ olmak üzere

$$\int_0^h f(x) dx = c_0 f(-3h) + c_1 f(-2h) + c_2 f(-h) + c_3 f(0)$$

yazılabilir. Formülasyon, polinom kübik veya daha küçük dereceden iken geçerli olacağından $f(x)$ yerine sırasıyla x^3 , x^2 , x ve 1 fonksiyonları alınarak katsayılar araştırılacaktır:

$$f(x) = x^3 \quad \text{için} \quad \int_0^h x^3 dx = \frac{h^4}{4} = c_0(-3h)^3 + c_1(-2h)^3 + c_2(-h)^3 + c_3(0)^3$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{için} \quad \int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3} = c_0(-3h)^2 + c_1(-2h)^2 + c_2(-h)^2 + c_3(0)^2$$

$$f(x) = x \quad \text{için} \quad \int_0^h x dx = \frac{h^2}{2} = c_0(-3h) + c_1(-2h) + c_2(-h) + c_3(0)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{için} \quad \int_0^h 1 dx = h = c_0(1) + c_1(1) + c_2(1) + c_3(1)$$

Denklemler matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -27 & -8 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h/4 \\ h/3 \\ h/2 \\ h \end{bmatrix}$$

ve çözümlürse

$$c_0 = -\frac{9}{24}h, \quad c_1 = \frac{37}{24}h, \quad c_2 = -\frac{59}{24}h, \quad c_3 = \frac{55}{24}h$$

elde edilir. Böylece dördüncü dereceden Adams-Bashford yönteminin formülasyonu için

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + O(h^5)} \quad (4.15)$$

bulunur. Bu yöntemin hatası da kübik interpolasyon polinomu integre edilerek:

$$E = \frac{251}{750} h^2 y^{(5)}(\xi)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek olarak yine daha önceki $\frac{dy}{dx} = -2x - y$, $y(0) = -1$

problemi ele alınmış olup, $x=0.2$; 0.3 ; 0.4 ; ve 0.5 noktalarında hesaplanan değerler yukarıdaki formülde kullanılarak $x=0.6$ noktasında elde edilen fonksiyon değeri aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Hatanın ne kadar azaldığını göstermek üzere aynı tabloda üçüncü-dereceden Adams-Bashford yöntemi ile elde edilen sonuca da yer verilmiştir.

x	Analitik	y	Hata	
0.6	-0.8464349	-0.8463626	-0.0000723	(3. Derece)
		-0.8464420	0.0000071	(4. Derece)

4.5.3 Adams-Multon yöntemi

Adams yönteminin iyileştirilmiş bir şekli Adams-Multon yöntemidir. Bu yöntem Adams-Bashford yöntemini "öngörücü - predictor" olarak kullanırken, ilaveten bir de "düzeltici - corrector" şeması kullanır. Düzeltici aşaması bir başka kübik polinom kullanılmasına dayanmaktadır.

$$\text{Öngörücü aşaması} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (4.16)$$

$$\text{Düzeltici aşaması} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] - \frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (4.17)$$

Bu formüller kullanılarak $dy/dx = -2x - y$, $y(0) = -1$

problemi için $x=0.4$ ve $x=0.5$ de elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda yer almaktadır. Bu noktalardan önceki çözümler Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

x	y	f(x,y)			
0.0	-1.0000000	1.0000000	Runge-Kutta-Fehlberg		
0.1	-0.9145123	0.7145123			
0.2	-0.8561923	0.4561923			
0.3	-0.8224547	0.2224547			
	Öngörülüş	Düzeltilmiş	Analitik	Hata	
0.4	-0.8109688	-0.8109592	0.0109688	-0.8109601	0.0000009
0.5	-0.8195991	-0.8195903	-0.1804009	-0.8195920	0.0000017

Görüldüğü gibi öngörülen değerle düzeltilmiş değer virgülden sonra beşinci haneye kadar uymaktadır.

(4.16) ve (4.17) bağıntılarındaki hata terimleri, bunlardaki beşinci türevlerin aynı olduğu varsayılarak birbiriyle karşılaştırılırsa gerçek değer öngörülen ve düzeltilmiş değerler arasında olacağı görülür. Düzeltilmiş değerdeki hata da, düzeltilmiş değerle öngörülüş değer arasındaki farkın

$$\frac{19/720}{251/720 + 19/720} = \frac{19}{251 + 19} = \frac{1}{14.2}$$

katı civarında olacaktır.

Öngörülmuş ve düzeltilmiş değerler arasındaki fark istenen doğruluktan daha küçük ise adım uzunluğu artırılarak işlem sayısında tasarruf sağlanabilir. Veya aksi durumda adım uzunluğu azaltılır.

Adams-Multon yöntemi, Runge-Kutta-Fehlberg ve Runge-Kutta yöntemlerine kıyasla iki kat daha etkindir.

4.6 Yüksek-dereceden denklemler ve denklem sistemleri

Mühendislikte karşılaşılan adi diferansiyel denklemler çoğu zaman yüksek derecedendir. Bölümün başında verilen Newton kanunu örneği hatırlanırsa, bu kanunu temsil eden denklem zaman değişkeni cinsinden düzenlendiğinde ikinci dereceden bir adi diferansiyel denklem şekline gelmişti:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f}{m}$$

Bu denklemi iki adet birinci dereceden adi-diferansiyel denkleme dönüştürerek sayısal çözümünü yapmak mümkündür. Bunun için

$$\frac{dx}{dt} = y$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanırsa yukarıdaki denklem

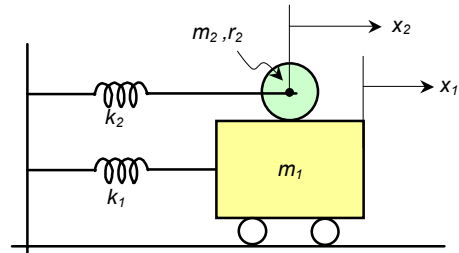
$$\frac{dy}{dt} = \frac{f}{m}$$

şekline gelir. Böylece ikinci-dereceden olan orijinal denklem yerine birinci-dereceden olan bu son iki denklem çözülür. Bu denklemlerin çözümü için, x_0 başlangıç konumu ve x'_0 başlangıç hızı gibi iki adet başlangıç koşuluna ihtiyaç vardır. Böylece dx/dt denkleminin çözümü $x=x_0$ ile ve dy/dt denkleminin çözümü de $y=y_0=x'_0$ ile başlatılır.

İkinci bir örnek olmak üzere şekildeki yay-kütle sistemini ele alalım. 1 kütlesi k_1 yayının kontrolü altında yatay yüzey üzerinde sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. r_2 yarıçaplı tekerlek şeklindeki 2 kütlesi ise k_2 yayına bağlıdır.

Bu sistemin hareket denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} (m_1 + 0.5m_2) \frac{d^2x_1}{dt^2} - 0.5m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + k_1x_1 &= 0 \\ -0.5m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + 1.5m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} + k_2x_2 &= 0 \end{aligned}$$



şeklinde yazılabilir. Bu denklemler ikinci-dereceden iki adi-diferansiyel denklemlerli bir denklem takımı oluşturmaktadır. Bu sistemi sayısal yolla çözmek için dört adet birinci-dereceden adi diferansiyel denkleme dönüştürülmesi gerekir.

4.6.1 Birinci-dereceden denklem sistemleri:

Yüksek dereceden denklemler de sonuçta birinci dereceden denklem sistemine dönüştürülerek çözüldüğüne göre öncelikle birinci-dereceden adi diferansiyel denklem sistemlerinin nasıl çözüleceği üzerinde durmak gerekir. Bunun için örnek olarak

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1 y_2 + x, & y_1(0) &= 1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= x y_2 + y_1, & y_2(0) &= -1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin $x=0.1$ deki gerçek çözümü $y_1=0.913936$, $y_2=-0.909217$ olarak bilinmektedir.

4.6.2 Taylor-serisi yöntemi:

Yukarıdaki örnek problemde bu yöntemin uygulanması için y_1 ve y_2 fonksiyonlarının çeşitli derecelerdeki türevlerinin $x=0$ daki değerlerine ihtiyaç vardır.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 y_2 + x, & y_1'(0) &= 1 \times (-1) + 0 = -1 \\ y_2' &= x y_2 + y_1, & y_2'(0) &= 0 \times (-1) + 1 = 1 \\ y_1'' &= y_1 y_2' + y_1' y_2 + 1, & y_1''(0) &= 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 = 3 \\ y_2'' &= y_2 + x y_2' + y_1', & y_2''(0) &= -1 + 0 \times 1 + 1 = -2 \\ y_1''' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' + y_1'' y_2 + y_1' y_2', & y_1'''(0) &= -7 \\ y_2''' &= y_2' + y_2 + x y_2'' + y_1'', & y_2'''(0) &= \dots \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{27}{24}x^4 - \frac{124}{120}x^5 + \dots \\ y_2(t) &= -1 + x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{13}{24}x^4 + \frac{47}{120}x^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Bu bağıntılar kullanılarak $x=0.1$ deki çözüm için de $y_1=0.9139$ ve $y_2=-0.9092$ bulunur.

Yukarıdaki (4.21) bağıntılarını elde edebilmek amacıyla x ve y fonksiyonlarının herhangi bir derecedeki türevlerini hesaplariken bu fonksiyonların daha düşük dereceden türevlerinin daha önceden hesaplanmış olması gerektiği dikkat çekicidir. Yani birinci türevler hesaplanmadan ikinci türevlerin veya üçüncü dereceye kadar türevler hesaplanmadan dördüncü dereceden türevlerin hesaplanması mümkün değildir.

Taylor-serisi yönteminin hata mertebesi serilerde kaç terim alındığına bağlı olacaktır.

4.6.3 Euler öngörücü-düzeltilici yöntemi:

Bu yöntemde önce her iki denkleme öngörücü algoritması ve ardından da düzeltilici algoritması uygulanacaktır. Bu aşamalar sırasıyla

Öngörü algoritması:

$$y_{(1)n+1} = y_{(1)n} + h y'_{(1)n}$$

$$y_{(2)n+1} = y_{(2)n} + h y'_{(2)n}$$

Düzeltilici algoritması

$$y_{(1)n+1} = y_{(1)n} + h \frac{y'_{(1)n} + y'_{(1)n+1}}{2}$$

$$y_{(2)n+1} = y_{(2)n} + h \frac{y'_{(2)n} + y'_{(2)n+1}}{2}$$

şeklindedir.

$x=0$ da

$$y_{(1)n} = y_{(1)}(0) = 1 \quad y'_{(1)n} = y_{(1)n} y_{(2)n} + x_n = 1 \times (-1) + 0 = -1$$

$$y_{(2)n} = y_{(2)}(0) = -1 \quad y'_{(2)n} = x_n y_{(2)n} + y_{(1)n} = 0 \times (-1) + 1 = 1$$

olup öngörü aşamasından

$$y_{(1)n+1} = 1 + 0.1 \times (-1) \quad y_{(1)n+1} = 0.9$$

$$y_{(2)n+1} = -1 + 0.1 \times 1 \quad y_{(2)n+1} = -0.9$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler diferansiyel denklemlerde ve düzeltilici algoritmalarda sırayla kullanılarak

$$y'_{(1)n+1} = y_{(1)n+1} y_{(2)n+1} + x_{n+1} = 0.9 \times (-0.9) + 0.1 = -0.71$$

$$y_{(1)n+1} = y_{(1)n} + h \frac{y'_{(1)n} + y'_{(1)n+1}}{2} = 1 + 0.1 \times \frac{-1 - 0.71}{2} \rightarrow \boxed{y_{(1)n+1} = 0.9145}$$

ve

$$y'_{(2)n+1} = x_{n+1} y_{(2)n+1} + y_{(1)n+1} = 0.1 \times (-0.9) + 0.9145 = 0.8245$$

$$y_{(2)n+1} = y_{(2)n} + h \frac{y'_{(2)n} + y'_{(2)n+1}}{2} = -1 + 0.1 \times \frac{1 + 0.8245}{2} \rightarrow \boxed{y_{(2)n+1} = -0.9088}$$

elde edilir. Burada düzeltilici aşamasında $y_{(2)n+1}$ in hesabında gereken $y'_{(2)n+1}$ hesaplanırken $y_{(1)n+1}$ in en son bulunan düzeltilmiş değeri kullanılmıştır. Düzeltilmiş değerleri tekrar türev hesabında kullanıp bir kez daha düzeltilici algoritmaları kullanarak daha iyi değerler elde etmek mümkündür:

$$y'_{(1)n+1} = y_{(1)n+1} y_{(2)n+1} + x_{n+1} = 0.9145 \times (-0.9088) + 0.1 = -0.7311$$

$$y_{(1)n+1} = y_{(1)n} + h \frac{y'_{(1)n} + y'_{(1)n+1}}{2} = 1 + 0.1 \times \frac{-1 - 0.7311}{2} \rightarrow \boxed{y_{(1)n+1} = 0.9135}$$

$$y'_{(2)n+1} = x_{n+1} y_{(2)n+1} + y_{(1)n+1} = 0.1 \times (-0.9088) + 0.9135 = 0.8226$$

$$y_{(2)n+1} = y_{(2)n} + h \frac{y'_{(2)n} + y'_{(2)n+1}}{2} = -1 + 0.1 \times \frac{1 + 0.8226}{2} \rightarrow \boxed{y_{(2)n+1} = -0.9089}$$

Ancak izlenen bu yol daha kuvvetli bir yöntem kadar etkin değildir.

4.6.4 Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi:

Burada da $y_{(1)}$ ve $y_{(2)}$ için ardarda dönüşümlü olarak yürütülen bir hesaplama söz konusudur. Aynı zamanda her defasında en son hesaplanan k değerleri kullanılmaktadır. Yani hesaplarda $k_{(1)1}, k_{(1)2}, k_{(2)1}, k_{(2)2}, \dots$ şeklinde bir sıra izlenmektedir.

Örnek problemdeki denklemlerin

$$\begin{aligned} \frac{dy_{(1)}}{dx} &= f(x, y_{(1)}, y_{(2)}) = y_{(1)}y_{(2)} + x, & y_{(1)}(0) &= 1 \\ \frac{dy_{(2)}}{dx} &= g(x, y_{(1)}, y_{(2)}) = xy_{(2)} + y_{(1)}, & y_{(2)}(0) &= -1 \end{aligned}$$

olduğu hatırlanarak Runge-Kutta-Fehlberg yöntemindeki k katsayılarına ait formüller

$$\begin{aligned} k_{(1)i} &= h f(x_i, y_{(1)i}, y_{(2)i}) = h (y_{(1)i}y_{(2)i} + t_i) \\ k_{(2)i} &= h g(x_i, y_{(1)i}, y_{(2)i}) = h (x_i y_{(2)i} + y_{(1)i}) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0, & y_{(1)1} &= y_{(1)0}, & y_{(2)1} &= y_{(2)0} \\ x_2 &= x_0 + \frac{h}{4}, & y_{(1)2} &= y_{(1)0} + \frac{k_{(1)1}}{4}, & y_{(2)2} &= y_{(2)0} + \frac{k_{(2)1}}{4} \\ x_3 &= x_0 + \frac{3h}{8}, & y_{(1)3} &= y_{(1)0} + \frac{3k_{(1)1}}{32} + \frac{9k_{(1)2}}{32}, & y_{(2)3} &= y_{(2)0} + \frac{3k_{(2)1}}{32} + \frac{9k_{(2)2}}{32} \\ x_4 &= x_0 + \frac{12h}{13}, & y_{(1)4} &= y_{(1)0} + \frac{1932k_{(1)1}}{2197} - \frac{7200k_{(1)2}}{2197} + \dots, & y_{(2)4} &= y_{(2)0} + \frac{1932k_{(2)1}}{2197} - \dots \\ x_5 &= x_0 + h, & y_{(1)5} &= y_{(1)0} + \frac{439k_{(1)1}}{216} - 8k_{(1)2} + \dots, & y_{(2)5} &= y_{(2)0} + \frac{439k_{(2)1}}{216} - 8k_{(2)2} + \dots \\ x_6 &= x_0 + \frac{h}{2}, & y_{(1)6} &= y_{(1)0} - \frac{8k_{(1)1}}{27} + 2k_{(1)2} - \dots, & y_{(2)6} &= y_{(2)0} - \frac{8k_{(2)1}}{27} + 2k_{(2)2} - \dots \end{aligned}$$

dir. Bu durumda yöntemin beşinci dereceden formülasyonu da $y_{(1)}$ ve $y_{(2)}$ fonksiyonları için sırasıyla

$$\begin{aligned} y_{(1)n+1} &= y_{(1)n} + \left(\frac{16}{135}k_{(1)1} + \frac{6656}{12825}k_{(1)3} + \frac{28561}{56430}k_{(1)4} - \frac{9}{50}k_{(1)5} + \frac{2}{55}k_{(1)6} \right) \\ y_{(2)n+1} &= y_{(2)n} + \left(\frac{16}{135}k_{(2)1} + \frac{6656}{12825}k_{(2)3} + \frac{28561}{56430}k_{(2)4} - \frac{9}{50}k_{(2)5} + \frac{2}{55}k_{(2)6} \right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $h=0.1$ olmak üzere $x=0.1$ için yapılan hesap sonuçları aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

i	x	$y_{(1)}$	$y_{(2)}$	$k_{(1)}$	$k_{(2)}$
0	0.000000	1.000000	-1.000000		
1	0.000000	1.000000	-1.000000	-0.100000	0.100000
2	0.025000	0.975000	-0.975000	-0.092563	0.095063
3	0.037500	0.964592	-0.963889	-0.089226	0.092845
4	0.092308	0.919098	-0.915273	-0.074892	0.083461
5	0.100000	0.912618	-0.908424	-0.072904	0.082178
6	0.050000	0.953911	-0.952579	-0.085868	0.090628
	0.1	0.913936	-0.909217		

Bu denklem sisteminin $x=0.1$ deki tam çözümünü daha önce de $y_{(1)}=0.913936$, $y_{(2)}=-0.909217$ olarak belirtilmiş olup, öngörücü-düzeltilici Euler yöntemiyle elde edilen sonuçlar virgülden sonra sadece üçüncü haneye kadar doğru iken Runge-Kutta-Fehlberg yöntemiyle elde edilen sonuçların virgülden sonra beşinci haneden bile daha sonrasına kadar doğru olduğu görülmektedir.

Runge-Kutta-Fehlberg algoritmasının bir adımında elde edilen sonuçlar bir sonraki adım için başlangıç değerini oluşturacaktır. Böylece çözümde adım adım ilerlemek mümkündür. Aşağıdaki tabloda bu şekilde dört adımda gerçekleştirilen işlemlerin sonuçları yer almaktadır.

	x	$y_{(1)}$	$y_{(1)'}'$	$y_{(2)}$	$y_{(2)'}'$
	0.000	1.000000	-1.000000	-1.000000	1.000000
Runge-Kutta-Fehlberg şeması	0.025	0.975920	-0.927119	-0.975612	0.951529
	0.050	0.953611	-0.858218	-0.952399	0.905991
	0.075	0.932979	-0.792940	-0.930290	0.863207
Adams-Moulton şeması	0.100	0.913937	-0.730967	-0.909217	0.823015
		0.913936		-0.909217	

4.6.5 Adams-Moulton yöntemi:

Başlangıçtaki dört adımda hesaplamalar herhangi bir yöntemle yapıldıktan sonra Adams-Moulton yöntemi yine $y_{(1)}$ ve $y_{(2)}$ için dönüşümlü işlemlerle uygulanabilir.

Öngörücü aşaması

$$y_{(1)_{n+1}} = y_{(1)_n} + \frac{h}{24} [55f_{(1)_n} - 59f_{(1)_{n-1}} + 37f_{(1)_{n-2}} - 9f_{(1)_{n-3}}]$$

$$y_{(2)_{n+1}} = y_{(2)_n} + \frac{h}{24} [55f_{(2)_n} - 59f_{(2)_{n-1}} + 37f_{(2)_{n-2}} - 9f_{(2)_{n-3}}]$$

Düzeltilici aşaması

$$y_{(1)_{n+1}} = y_{(1)_n} + \frac{h}{24} [9f_{(1)_{n+1}} + 19f_{(1)_n} - 5f_{(1)_{n-1}} + f_{(1)_{n-2}}]$$

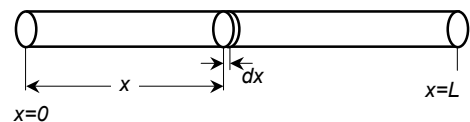
$$y_{(2)_{n+1}} = y_{(2)_n} + \frac{h}{24} [9f_{(2)_{n+1}} + 19f_{(2)_n} - 5f_{(2)_{n-1}} + f_{(2)_{n-2}}]$$

Yukarıdaki tabloda Runge-Kutta-Fehlberg şemasıyla hesaplanmış ilk dört noktadaki değerler Adams-Moulton şemasında kullanılarak elde edilen sonuçlar görülmektedir.

4.7 Sınır değer problemleri

Daha önce de görüldüğü gibi ikinci dereceden bir adi diferansiyel denklemin veya birinci-dereceden iki adi-diferansiyel denklemlerle bir sistemin çözümü için iki sınır koşuluna gereksinim vardır. Şimdiye kadarki bütün örneklerde bu koşullar başlangıçta verildi. Bu problemler sınır koşullarının başlangıç noktasında verilmesi nedeniyle "başlangıç değer problemi" olarak adlandırıldı. Bazı hallerde sınır koşullarının bir kısmı başlangıç noktasında verilirken kalan kısmı başka noktada (çoğu zaman diğer sınırda) verilir. Bu tip problemlere de "sınır değer problemi" adı verilir.

Bu paragrafta sınır değer problemlerinin nasıl çözülebileceği izah edilecektir. Bu amaçla şekilde gösterilen üniform kesit dağılımına sahip çubuk üzerinde bir uçtan diğer uca doğru ısı iletimi problemi ele alınacaktır. Çubuğun çevresinin ısı



için izole edildiği varsayılmaktadır. Çubuğun sol ucundan x kadar uzaklıkta dx genişliğindeki bir çubuk elemanını dikkate alarak çubuk boyunca herhangi bir noktadaki sıcaklığı verecek bir denklem çıkartılabilir.

Bilindiği gibi ısı iletimi

- kesit alanına A - $[m^2]$
- malzemenin ısı iletkenlik özelliğine k - $[cal/s.m^2]$
- sıcaklık gradyanına dT/dx - $[°C/m]$

bağlı belli bir hızla (cal/s) gerçekleşir. dx genişliğindeki çubuk elemanına giren ısının iletim hızı için

$$-kA \frac{dT}{dx}$$

yazılabilir. Buradaki eksi işareti, dT/dx türevi x yönünde sıcaklık artışını belirtirken ısının sıcak ortamdan daha soğuk ortama doğru akışıyla ilgilidir.

Elemanı terk eden ısı için de yukarıdakine benzer bir ifade yazılabilir. Bu kez sıcaklık gradyanı $x+dx$ kesitinde belirtilecektir.

$$-kA \left[\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx \right]$$

Buradaki ikinci terim sıcaklık gradyanının x kesitinden $x+dx$ kesitine gelinceye kadarki değişimini belirtmektedir.

Çubuk elemanına x ve $x+dx$ deki dik kesitler haricinde bir ısı ilave edilmedikçe (veya çıkartılmadıkça) bu kesitlerden giren ve çıkan ısılardan eşit olması gerekir. (Aksi halde sıcaklığın zamanla değişmesi gerekir ki bu örnekteki ısı iletimi olayının zamandan bağımsız olduğu kabul edilmektedir).

$$-kA \frac{dT}{dx} = -kA \left[\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx \right]$$

Bu denklem düzenlenerek

$$kA \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad k \neq 0, \quad A \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = 0}$$

şekline gelir. Bu ikinci-dereceden adi-diferansiyel denklemin çözümü kolaylıkla

$$T = ax + b$$

şeklinde elde edilebilir. Böylece çubuk boyunca sıcaklığın sol uçtaki bir T_L değerinden sağ uçtaki bir T_R değerine kadar lineer olarak değiştiği görülmektedir.

Şayet çubuk elemanı çevresel yüzeyinden de ısı kaybetseydi, birim alan başına birim zamanda kaybedilen ısı Q [cal/m²s] olmak üzere bu ısı, çubuk elemanının iki dik yüzünden giren ve çıkan ısılardan farkı olacaktır:

$$-kA \frac{dT}{dx} = -kA \left[\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx \right] + Qpdx$$

Burada p elemanın çevre uzunluğunu belirtmektedir. (Q büyüklüğü çubuğun sıcaklığıyla çevre sıcaklık arasındaki farka da bağlı olabilir. Ancak bu husus ihmal edilmiştir).

Bu denklem düzenlenerek

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{Qp}{kA}} \quad (4.24)$$

elde edilir. Bu denklemdeki Q büyüklüğü x in fonksiyonu olabilir ki bu durumda denklem daha komplike hale gelmektedir.

Problemi daha da zorlaştıracak başka hususlar da olabilir ki bunlardan birisi çubuğun kesit alanının x boyunca değişmesi, bir diğeri k büyüklüğünün x boyunca malzeme değişimine bağlı olarak değişmesidir. Kesit değişimi halinde çubuk elemanını terk eden ısı

$$-k[A + A' dx][T' + T'' dx]$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade ısı iletimi denkleminde kullanılarak

$$kAT'' dx + kA'T' dx + kA'T'' dx^2 = Qpdx$$

veya ikinci mertebeden olan üçüncü terim ihmal edilerek

$$kAT'' + kA'T' = Qp \quad (4.25)$$

Isıl iletkenlik katsayısının $k(x)$ şeklinde değişmesi halinde bu denklem

$$kAT'' + (kA' + k'A)T' = Qp \quad (4.26)$$

şekline gelir.

Şayet çubuğun çevresel yüzeyinden oluşan ısı kaybı, çubukla çevre arasındaki sıcaklık farkıyla

$$Q = q(T - T_s)$$

şeklinde doğru orantılı ise bu kez ısı iletimi denklemini için

$$kAT'' + (kA' + k'A)T' - q \cdot pT = -q \cdot pT_s \quad (4.27)$$

elde edilir.

Bu bölümde yukarıda örneklenen tipteki denklemlerin çözümü için iki farklı teknik incelenecektir.

4.7.1 Shooting yöntemi:

(4.27) denklemini tekrar

$$A \frac{d^2T}{dx^2} + B \frac{dT}{dx} + CT = D \quad (4.28)$$

şeklinde yazalım. Buradaki A , B , C ve D katsayıları aslında yukarıdaki ısı problemleri için x değişkeninin fonksiyonu olup bu bağımlılık nedeniyle denklemin çözümünü zorlaştırmaktadırlar. Bu katsayılar T sıcaklığının da fonksiyonu olabilirler.

(4.28) denkleminin çözümü için iki sınır koşuluna ihtiyaç vardır. Şayet T ve T' nün değerleri x in başlangıç noktasında verilirse bir başlangıç değer problemi söz konusu olur. Buradaki örnekte ise T nin iki değeri, bir sınır değer problemi teşkil etmek üzere farklı iki x konumunda verilecektir. Burada, başlangıç değer problemini çözmek için kullanılan prosedürün sınır değer problemine nasıl adapte edilebileceği izah edilecektir i aslında izlenen yol basittir.

T sıcaklığının değerlerinin $x=a$ ve $x=b$ gibi farklı iki noktada bilindiğini varsayalım. Problemin bir başlangıç değer problemi olması için $x=a$ noktasında T' değerinin de bilinmesi gerekir. T' nün bu noktadaki değeri bilinmemekle birlikte tam doğru olmasa da tahmini yaklaşık bir değer, problemin genel bilgilerine dayanarak seçilebilir. Hatta buna imkan yoksa rastgele bir seçimle problemin çözümüne girişmek mümkündür. Bu şekilde oluşturulan başlangıç değer problemi bilinen tekniklerden birisiyle çözümlenerek $x=b$ de hesaplanan T değerinin verilen değerle aynı olup olmadığına bakılır. Hesaplanan değer verilen değerden az veya çok olmasına bağlı olarak $x=a$ daki T' eğimi değiştirilerek aynı işlemler verilen değere yaklaşıncaya kadar iteratif biçimde tekrarlanır.

Örnek:

$$T'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right)T = x, \quad T(1) = 2, \quad T(3) = -1$$

sınır değer problemini Runge-Kutta-Fehlberg yöntemini ve shooting tekniğini birlikte kullanarak çözünüz.

Verilen denklem ikinci dereceden olup öncelikle

$$\begin{aligned} T &= T_0 & T'_0 &= T'_1 \\ T' &= T_1 & \Rightarrow & T'_1 = T'' = \left(1 - \frac{x}{5}\right)T_0 + x \end{aligned}$$

değişken dönüşümüyle bu denklemi birinci dereceden iki adi-diferansiyel denkleme dönüştürmek gereklidir. Ayrıca verilen sınır şartlarına göre $T(x)$ fonksiyonun giderek azaldığını dikkate alarak başlangıç noktasındaki türevi için $T'(1) = -1.5$ gibi bir tahminde bulunabiliriz.

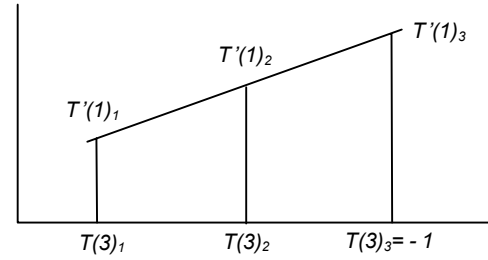
Bu ilk tahminle, Runge-Kutta-Fehlberg yöntemi kullanılarak yapılmış hesap sonuçları aşağıdaki tabloda yer almaktadır. Görüldüğü gibi $T(3)$ için hesaplanan değer sınır koşulunda verilen değerden farklıdır.

$T'(1) =$	-1.5		-3.0		-3.4950	
x	T	T'	T	T'	T	T'
1.0	1.0000	-1.5000	1.0000	-3.0000	1.0000	-3.4950
1.2	1.7514	-0.9886	1.4498	-2.5118	1.3503	-3.0145
1.4	1.6043	-0.4814	0.9921	-2.0719	0.7900	-2.5967
1.6	1.5597	0.0389	0.6192	-1.6598	0.3088	-2.2204
1.8	1.6218	0.5876	0.3275	-1.2580	-0.0997	-1.8671
2.0	1.7976	1.1783	0.1163	-0.8512	-0.4385	-1.5209
2.2	2.0967	1.8227	-0.0118	-0.4259	-0.7076	-1.1679
2.4	2.5309	2.5310	-0.0520	0.0299	-0.9043	-0.7955
2.6	3.1139	3.3116	0.0029	0.5266	-1.0237	-0.3925
2.8	3.8608	4.1706	0.1620	1.0732	-1.0586	0.0511
3.0	4.7876	5.1119	0.4360	1.6773	-1.0000	0.5439

İkinci tahmin olarak seçilen $T'(1)=-3$ değeri ile yapılan hesap sonuçları da aynı tabloda yer almakta olup, görüldüğü gibi $T(3)$ değeri halen verilen değerden farklıdır. Elde edilen sonuçlardan interpolasyonla üçüncü bir tahminde bulunmak mümkündür. Nitekim

$$T'(I)_3 = T'(I)_2 + \frac{T'(I)_2 - T'(I)_1}{T(3)_2 - T(3)_1} [T(3)_3 - T(3)_2]$$

şeklinde elde edilen üçüncü tahmini değerle yapılan hesaplama sonuçları da tabloda yerleştirilmiş olup, görüldüğü gibi $T(3)=-1$ şeklinde istenilen sınır koşulu sağlanmıştır.



Sonucun bu şekilde ilk iki tahmin sonuçlarından interpolasyon yaparak çok hızlı bir biçimde elde edilmesi bir rastlantı değildir. Aslında verilen denklem lineer bir denklem olup, lineer denklemlerin shooting yöntemiyle aranan tam çözümleri, kesme ve yuvarlatma hataları hariç, iki tahmin sonuçlarının lineer bir kombinasyonudur.

Örnek:

$$T'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right) T T' = x, \quad T(1) = 2, \quad T(3) = -1$$

sınır değer problemini Runge-Kutta-Fehlberg yöntemini ve shooting tekniğini birlikte kullanarak çözünüz.

Bu kez denklemdeki T' türevinin önündeki katsayıda T büyüklüğü yer almakta olup bu nedenle denklem non-lineerdir. Çözüm için yapılan hesaplama sonuçları aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

$T'(1)$	$T(3)$
-1.5000	-0.0282
-3.0000	-2.0705
-2.2137	-1.2719
-1.9460	-0.8932
-2.0215	-1.0080
-2.0162	-1.0002
-2.0161	-1.0000

x	T	T'
1.0000	1.0000	-3.4950
1.2000	1.5552	-2.4130
1.4000	1.0459	-2.6438
1.6000	0.5138	-2.6352
1.8000	0.0082	-2.3832
2.0000	-0.4272	-1.9472
2.2000	-0.7640	-1.4110
2.4000	-0.9896	-0.8441
2.6000	-1.1022	-0.2848
2.8000	-1.1048	0.2569
3.0000	-1.0000	0.7909

Soldaki sütunlarda $T'(1)$ için kullanılan tahmin değerleri ve $T(3)$ için hesaplanan değerler yer almaktadır. İlk iki tahmin keyfi seçilmiş, sonraki tahminler ise önceki örnekte olduğu gibi lineer interpolasyonla hesaplanmıştır. Görüldüğü gibi iterasyon bu kez üç adımda yakınsamamıştır. Ancak yedinci tahmin değeriyle $T(3)$ sınır şartı sağlanabilmiştir. Bunun nedeni denklemin non-lineer oluşudur. Sağdaki sütunlarda dış sınır şartı sağlandıktan sonraki doğru çözüm görülmektedir.

4.7.2 Sonlu farklar yardımıyla çözüm:

Sınır değer problemlerini çözmenin bir diğer yolu da türevlerin sonlu fark yaklaşımlarını kullanarak denklemleri ayrıklaştırmak suretiyle çözmektir. Bu yöntem bazen shooting

yöntemine tercih edilir. Ancak yöntem lineer denklemler için kullanılır. Yöntemin non-lineer denklemler için kullanılmaya çalışılması halinde ayrıklaştırılmış non-lineer denklemler ortaya çıkar ki bunların çözümü de hayli güçlük yaratır.

Örnek:

$$T'' - \left(1 - \frac{x}{5}\right)T = x, \quad T(1) = 2, \quad T(3) = -1$$

sınır değer problemini, türevlerde merkezi sonlu-fark açılımlarını kullanarak çözünüz.

Çözüm için $x=1$ ile $x=3$ sınır noktaları arasındaki çözüm havzasını dört eşit aralığa bölelim. Bu durumda düğüm noktaları $x_0=1.0$, $x_1=1.5$, $x_2=2.0$, $x_3=2.5$ ve $x_4=3.0$ olacaktır. Sınır noktalarında fonksiyonun çözümü verilmiş olup iç düğüm noktalarındaki fonksiyon değerlerinin çözümü verilen diferansiyel denklem yardımıyla yapılacaktır.

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun bir x_i düğüm noktası civarındaki ikinci dereceden türevinin merkezi-sonlu-fark açılımı

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

şeklinde olup, problemde verilen denklem x_1 , x_2 ve x_3 noktalarında ayrıklaştırılarak yazılırsa sırasıyla

$$x_1 \text{ noktasında} \quad \frac{T_0 - 2T_1 + T_2}{h^2} - \left(1 - \frac{x_1}{5}\right)T_1 = x_1$$

$$x_2 \text{ noktasında} \quad \frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{h^2} - \left(1 - \frac{x_2}{5}\right)T_2 = x_2$$

$$x_3 \text{ noktasında} \quad \frac{T_2 - 2T_3 + T_4}{h^2} - \left(1 - \frac{x_3}{5}\right)T_3 = x_3$$

elde edilir. Bu denklemler herhangi bir x_i noktası için geliştirilerek

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{h^2} - \left(1 - \frac{x_i}{5}\right)T_i = x_i$$

yazılabilir. Veya T_i bilinmeyenlerine göre düzenlenerek

$$T_{i-1} - \left[2 + h^2 \left(1 - \frac{x_i}{5}\right)\right]T_i + T_{i+1} = h^2 x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

şekline getirilebilir. Seçilen düğüm noktası koordinatları kullanılarak denklemlerin katsayıları hesaplanırsa

$$T_0 - 2.175T_1 + T_2 = 0.375$$

$$T_1 - 2.150T_2 + T_3 = 0.5$$

$$T_2 - 2.125T_3 + T_4 = 0.625$$

$T_0=2$ ve $T_4=-1$ sınır değerleri yerleştirilerek

$$\begin{aligned} -2.175T_1 + T_2 &= -1.625 \\ T_1 - 2.150T_2 + T_3 &= 0.5 \\ T_2 - 2.125T_3 &= 1.625 \end{aligned}$$

veya matris biçimde düzenlenerek

$$\begin{bmatrix} -2.175 & 1 & 0 \\ 1 & -2.150 & 1 \\ 0 & 1 & -2.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.625 \\ 0.5 \\ 1.625 \end{Bmatrix}$$

üç-diyagonalı denklemler sistemi elde edilir. Çözüm havzasının daha çok sayıda aralığa bölünmesi halinde benzeri bir üç-diyagonalı denklemler sistemi daha fazla sayıda denklemler içererek kaydıyla elde edilir.

Bu denklemler sisteminin çözümü $T_1=0.552$, $x_2=-0.424$, $x_3=-0.964$ olarak elde edilebilir.

Aynı problemin $h=0.2$ için elde edilen çözümü aşağıdaki tabloda sunulmuştur.

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
SF	2.0000	1.3513	0.7918	0.3110	-0.0974	-0.4362	-0.7055	-0.9025	-1.0224	-1.0579	-1.0000
RKF	2.0000	1.3503	0.7900	0.3088	-0.0997	-0.4385	-0.7076	-0.9043	-1.0237	-1.0586	-1.0000

Aynı tabloya karşılaştırma amacıyla Runge-Kutta-Fehlberg yönteminin sonuçları da konulmuştur. Görüldüğü gibi sonuçlar birbirine hayli yakındır.

Örnek:

$$T'' = T, \quad T(1) = 1.17520, \quad T(3) = 10.01787$$

sınır değer problemini, sonlu-fark yöntemiyle çözünüz. Sonuçları shooting yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırınız..

Sonlu fark denklemleri $T_{i-1} - (2 + h^2)T_i + T_{i+1} = 0$

Olup, $h=1$; 0.5 ; 0.25 için sonlu fark ve shooting yöntemleriyle yapılan çözüm sonuçları aşağıdaki tabloda sunulmuştur. Denklemin analitik çözümü $T(x)=\sinh(x)$ olup buna ait değerler ikinci sütunda verilmiştir. Tablonun en altında ise $x=2$ noktasındaki hatalara yer verilmiştir. Bu noktadaki hata verilen aralıktaki maksimum hatadır.

x	Analitik	h = 0.25		h = 0.50		h = 1.00	
		Shooting	Sonlu fark	Shooting	Sonlu fark	Shooting	Sonlu fark
1.00	1.17520	1.17520	1.17520	1.17520	1.17520	1.17520	1.17520
1.25	1.60192	1.60192	1.60432				
1.50	2.12928	2.12928	2.13372	2.12931	2.14670		
1.75	2.79041	2.79041	2.79647				
2.00	3.62686	3.62686	3.63400	3.62691	3.65488	3.62814	3.73102
2.25	4.69117	4.69117	4.69866				
2.50	6.05020	6.05020	6.05698	6.05025	6.07678		
2.75	7.78935	7.78935	7.79387				
3.00	10.01787	10.01787	10.01787	10.01787	10.01787	10.01787	10.01787
x=2 de hata		0.00000	-0.00714	-0.00005	-0.02802	-0.00128	-0.10416

Görüldüğü gibi shooting yöntemi aynı aralık sayısında sonlu fark yöntemine göre 80 ila 500 kat daha az hata vermektedir. Sonlu fark yöntemi adım uzunluğu yarıya indirildiğinde 4 kat daha az hatalı sonuç vermektedir.