BÖLÜM 2

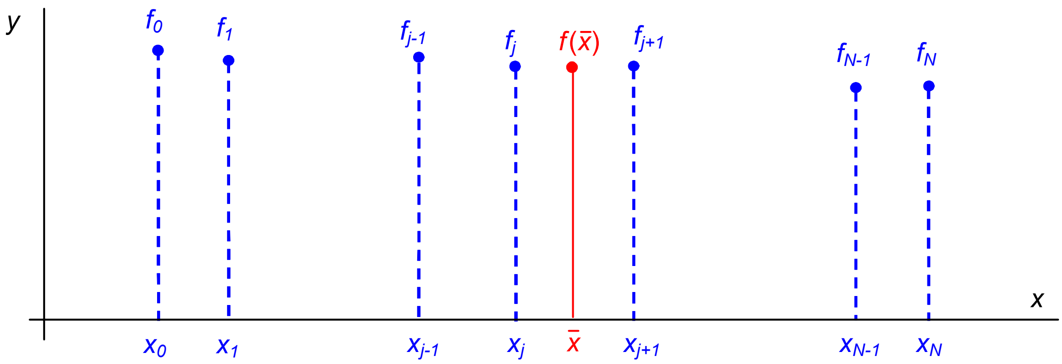
EĞRİ UYDURMA VE İNTERPOLASYON

BÖLÜM 2

EĞRİ UYDURMA VE İNTERPOLASYON

2.1 Giriş

Bir fonksiyonun $x_i\,(i=0,1,...N)$ noktalarında bilinen $f_i\,(i=0,1,...N)$ değerlerinden hareketle herhangi bir $\bar{x}$ ara noktasında bilinmeyen $f\,(\bar{x})$ ara değerinin bulunması anlamına gelen interpolasyon teknikleri aynı zamanda sayısal türev ve integrasyon, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü gibi başka sayısal yöntemlerin de esasını teşkil eder.



İnterpolasyon yöntemleri genellikle mevcut $(x_i\,,f_i)$ veri noktalarına eğri veya eğriler uydurulması yoluyla uygulanır. Bu amaçla kullanılan fonksiyonlara *interpolasyon fonksiyonları* denir.

İnterpolasyon fonksiyonu olarak çoğu zaman çeşitli mertebeden polinomlar kullanılır. Ancak bazı hallerde logaritmik, eksponansiyel, hiperbolik gibi daha özel fonksiyonlar, periyodik veri değerleri için trigonometrik fonksiyonlar kullanılabilir.

Veri noktaları eşit aralıklı olarak dağılmışsa sonlu fark esaslı interpolasyon yöntemleri, eşit aralıklı değilse doğrusal interpolasyon, Lagrange interpolasyonu vb yöntemler daha uygun olur.

Bu bölümde eğri uydurma ve interpolasyon için kullanılan teknikler genel olarak tanıtılacaktır.

2.2 İnterpolasyon polinomları

Düzlemde $N+1$ adet noktadan N 'inci dereceden bir polinom geçirmek mümkündür. Örneğin

$$P_0\begin{pmatrix} x_0 = 3.2 \\ f_0 = 22.0 \end{pmatrix},\quad P_1\begin{pmatrix} x_1 = 2.7 \\ f_1 = 17.8 \end{pmatrix},\quad P_2\begin{pmatrix} x_2 = 1.0 \\ f_2 = 14.2 \end{pmatrix},\quad P_3\begin{pmatrix} x_3 = 4.8 \\ f_3 = 38.3 \end{pmatrix},\quad P_4\begin{pmatrix} x_4 = 5.6 \\ f_4 = 51.7 \end{pmatrix},$$

noktalarını dikkate alalım. Bu noktaların ilk dördünden

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

şeklinde üçüncü dereceden bir polinom (kübik) geçirmek mümkündür. Herbir noktanın koordinatları bu denklemi sağlayacağı için

$$a_0+(3.2)a_1+(3.2)^2a_2+(3.2)^3a_3=22.0$$
$$a_0+(2.7)a_1+(2.7)^2a_2+(2.7)^3a_3=17.8$$
$$a_0+(1.0)a_1+(1.0)^2a_2+(1.0)^3a_3=14.2$$
$$a_0+(4.8)a_1+(4.8)^2a_2+(4.8)^3a_3=38.3$$

şeklinde dört denklem elde edilir. Bu lineer denklem takımı matris formda

$$\begin{bmatrix}1 & 3.2 & 10.24 & 32.768\\ 1 & 2.7 & 7.29 & 19.683\\ 1 & 1.0 & 1.00 & 1.000\\ 1 & 4.8 & 23.04 & 110.592\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22.0\\ 17.8\\ 14.2\\ 38.3\end{Bmatrix}$$

şeklinde düzenlenip, örneğin Gauss-eliminasyon yöntemiyle çözülürse kübik katsayıları

$$a_0=24.3499\ ;\quad a_1=-16.1177\ ;\quad a_2=6.4952\ ;\quad a_3=-0.5275$$

olarak bulunur. Yani interpolasyon fonksiyonu

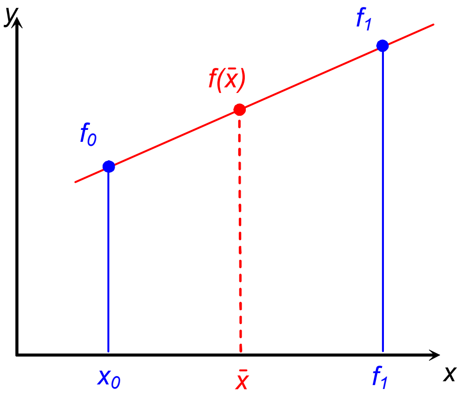
$$f(x)=24.3496-16.1176x+6.4952x^2-0.5275x^3$$

şeklindedir. Buna göre örneğin $x=3.0$ noktasındaki ara değer için $y=20.212$ elde edilir. Veri değerlerinin ilk dördü yerine son dördünün kullanılması halinde aynı noktadaki ara değer muhtemelen bir miktar farklı elde edilecektir.

Doğrusal interpolasyon

Bir grup noktadan bir polinom geçirerek interpolasyon yapmak için yukarıda olduğu gibi bir lineer denklem takımı çözmek yerine, elde edilen formülleri, uygun düzenlemeler yaparak doğrudan interpolasyon yapmaya uygun bir biçime sokmak mümkündür.

Örneğin (x_0,f_0) ve (x_1,f_1) gibi iki noktadan



$$f(x)=a_0+a_1x$$

şeklinde bir doğru geçirerek yukarıdaki yönteme göre interpolasyon yapmak istenirse, nokta koordinatları doğru denklemini sağlayacağı için

$$f_0=a_0+a_1x_0$$
$$f_1=a_0+a_1x_1$$

gibi iki denklem elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek katsayılar için

$$a_0=\frac{f_0x_1-f_1x_0}{x_1-x_0}\ ;\qquad a_1=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

elde edilir. Böylece doğru denklemi

$$f(x)=\frac{f_0x_1-f_1x_0}{x_1-x_0}+\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}x$$

şekline gelir. Bu denklem f_0 ve f_1 için düzenlenerek

$$\boxed{f(x) = L_0 f_0 + L_1 f_1} \qquad \boxed{L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\ ; \qquad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

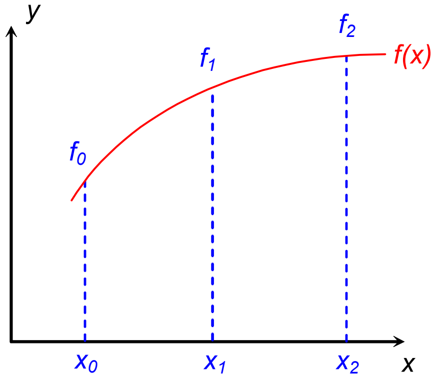
şeklinde de yazılabilir.

Lagrange polinomları

Şayet (x_0,f_0), (x_1,f_1) ve (x_2,f_2) gibi üç noktadan

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

şeklinde bir parabol geçirilerek interpolasyon yapılmak istenirse bu defa nokta koordinatları yardımıyla



$$f_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2$$
$$f_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$$
$$f_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

denklem sistemi elde edilir ki bu denklem sisteminin çözümü sonucunda katsayılar

$$a_0 = \frac{f_0\left(x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2\right) + f_1\left(x_2 x_0^2 - x_0 x_2^2\right) + f_2\left(x_0 x_1^2 - x_1 x_0^2\right)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_2 - x_1)}$$

$$a_1 = \frac{f_0\left(x_1^2 - x_2^2\right) + f_1\left(x_2^2 - x_0^2\right) + f_2\left(x_0^2 - x_1^2\right)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_2 - x_1)}$$

$$a_2 = \frac{f_0(x_2 - x_0) + f_1(x_0 - x_2) + f_2(x_1 - x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_2 - x_1)}$$

olarak bulunur. Bu durumda parabol denklemi f_0, f_1 ve f_2 için düzenlenerek yine

$$\boxed{f(x) = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2}$$

şeklinde daha basit bir biçime sokulabilir. Buradaki L_i büyüklükleri

$$\boxed{L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\ ; \qquad L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}\ ; \qquad L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}}$$

şeklinde olup bu büyüklüklere *Lagrange polinomları* adı verilmektedir.

Bu iki örnekten hareketle daha yüksek dereceden eğriler için

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{N} L_k f_k}$$

şeklinde bir genelleştirme yapmak mümkündür. Buradaki Lagrange polinomu da yukarıdaki örneklere bakılarak

$$\boxed{L_k = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots\ldots(x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots\ldots(x_k - x_N)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek:

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=0,1,2$ noktalarındaki değerleri sırasıyla $f=1,2,4$ olarak verilmiş olsun. $N=2$ alınması halinde Lagrange fonksiyonları

$$L_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}; \qquad L_1 = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}; \qquad L_2 = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

olarak hesaplanabilir. Bu durumda interpolasyon fonksiyonu

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(-1)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{2} \times 4$$

şeklinde olup, bu fonksiyon x için düzenlenirse

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

şekline getirilebilir. Aynı fonksiyonu $N=2$ inci dereceden polinomu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

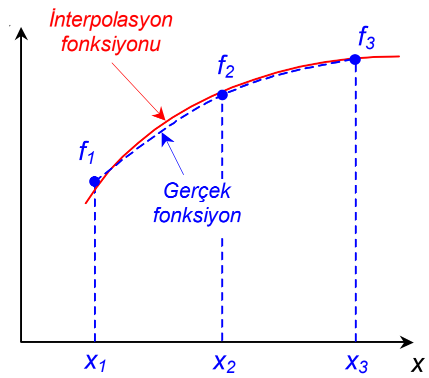
şeklinde tanımlayıp, veri noktaları yardımıyla yazılacak

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 + a_1 0 + a_2 0 \\ 2 &= a_0 + a_1 1 + a_2 1 \\ 4 &= a_0 + a_1 2 + a_2 4 \end{aligned}$$

lineer denklem takımını çözerek de elde etmek mümkündür.

Uyarı

Bir veri dağılımına uydurulan eğriler, yani kullanılan interpolasyon fonksiyonları genellikle veri noktalarını üreten gerçek fonksiyondan farklıdır. Bu bakımdan interpolasyon fonksiyonunun isabetli seçilmesi son derece önemlidir.



Örneğin interpolasyon için yukarıda izah edilen polinomik yaklaşımlar kullanıldığı taktirde polinomun derecesi gereğinden küçük seçilirse interpolasyon değerinde hata oluşur. Polinomun değeri gereğinden büyük seçilirse interpolasyon fonsiyonunda umulmadık ve gerçek fonksiyonda bulunmayan dalgalanmalar ortaya çıkar. İnterpolasyon değeri yine hatalı elde edilir.

Neville Yöntemi (Aitken yöntemi)

Neville yöntemi Lagrange yönteminin kapalı formda farklı bir uygulaması olup, Lagrange yönteminin zaaflarını gidermesi beklenen bir yöntemdir.

Bu yöntemde interpolasyon değeri, polinomun derecesi ardarda arttırılarak hesaplanır. Polinomun değeri her arttırıldığında elde edilen interpolasyon değerinin bir önceki değerle yakınsayıp yakınsamadığı kontrol edilir.

Yöntemin iyi anlaşılabilmesi için bir örnek olmak üzere (x_0, x_1, x_2) gibi üç veri noktasında bir fonksiyonun değerlerinin sırasıyla (f_0, f_1, f_2) olarak verildiğini varsayalım.

Şayet ilk iki nokta arasında doğrusal interpolasyon yapılırsa Lagrange formülü

$$f(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f_1$$

şeklinde yazılabilir. Doğrusal interpolasyon son iki nokta arasında yapılırsa Lagrange formülü için bu kez

$$f(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f_2$$

elde edilir.

Üç nokta arasından parabolik bir eğri geçirilerek interpolasyon yapılırsa Lagrange formülü

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

şeklinde yazılabilir. Bu formüldeki ikinci terimin katsayısı

$$\begin{aligned}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}&=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot\frac{(x_0-x_2)}{(x_0-x_2)}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\cdot\frac{(x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\\&=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\cdot\left[\frac{1}{(x_1-x_0)}-\frac{1}{(x_1-x_2)}\right]\\&=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_0)}+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_1-x_2)}\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenerek Lagrange formülü

$$f(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_0)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

şekline getirilebilir. Bu formülü

$$f(x)=\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f_1\right]+\frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\left[\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}f_2\right]$$

şeklinde düzenlemek mümkündür. Burada köşeli parantezlerin içinde yer alan terimlerin daha önceki doğrusal interpolasyonla bulunan değerler olduğu dikkati çekmektedir. Buna göre:

Veri noktalarındaki fonksiyon değerleri

$$\boxed{P_{00} = f_0\ ; \qquad P_{10} = f_1\ ; \qquad P_{20} = f_2}$$

Ve ilk doğrusal interpolasyonla bulunan değerler

$$\boxed{P_{01} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} P_{00} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} P_{10}} \qquad \boxed{P_{11} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} P_{10} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} P_{20}}$$

şeklinde yeniden isimlendirilirse parabolik yaklaşım sonucu elde edilen son formül de kısaca

$$\boxed{P_{02} = \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} P_{01} + \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} P_{11}}$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu ifade, açıkça görüldüğü gibi ilk doğrusal interpolasyonlarla bulunan değerler arasında yapılmış yeni bir doğrusal interpolasyondan ibarettir.

Sonuç olarak, Neville yönteminin esasını doğrusal interpolasyon için yazılmış Lagrange formülü teşkil etmektedir. Lagrange polinomunun derecesini arttırmak için bir önceki derecede bulunmuş interpolasyon değerleri arasında yeni bir doğrusal interpolasyon yapılmaktadır.

Örnek:

Yandaki veri noktaları yardımıyla *x=27.5* noktasındaki interpolasyon değeri bulunmak istensin.

x	*f(x)*
10.1	*0.17537*
22.2	*0.37784*
32.0	*0.52992*
41.6	*0.66393*
50.5	*0.63608*

Önce noktaları interpolasyon noktasına olan uzaklıklarına göre sıralayalım:

i	*x-x$_i$*	*x$_i$*	*f(x)*
0	*4.5*	*32.0*	*0.52992*
1	*5.3*	*22.2*	*0.37784*
2	*14.1*	*41.6*	*0.66393*
3	*17.4*	*10.1*	*0.17537*
4	*23.0*	*50.5*	*0.63608*

Yukarıda izah edildiği gibi ardışık doğrusal interpolasyonlar uygulayarak aşağıdaki gibi bir tablo elde etmek mümkündür:

i	*x-x$_i$*	*x$_i$*	*P$_{i0}$*	*P$_{i1}$*	*P$_{i2}$*	*P$_{i3}$*	*P$_{i4}$*
0	*4.5*	*32.0*	*0.52992*	*0.46009*	*0.46200*	*0.46174*	*0.45754*
1	*5.3*	*22.2*	*0.37784*	*0.45600*	*0.46071*	*0.47901*	
2	*14.1*	*41.6*	*0.66393*	*0.44524*	*0.55843*		
3	*17.4*	*10.1*	*0.17537*	*0.37329*			
4	*23.0*	*50.5*	*0.63608*				

Burada en üstteki satır interpolasyon noktasında çeşitli derecelerden Lagrange formülleriyle elde edilecek interpolasyon değerlerini içermektedir. İnterpolasyon değerinin 3. dereceden bir Langrange formülasyonuna kadar belli bir değere yakınsadığı, ancak dördüncü dereceden Lagrange formülünün kullanılması halinde interpolasyon değerinde bir ıraksama oluştuğu dikkati çekmektedir. O halde bu interpolasyon noktasında hesaplama için 3. dereceden yaklaşımın yeterli olduğu anlaşılmaktadır.

Nitekim, aslında bu örnekte verilen değerler derece cinsinden açılara karşılık sinüs fonksiyonunun değerleri olup interpolasyon noktası olan *$x=27.5$* açısında sinüs fonksiyonunun gerçek değeri de *$\sin(27.5°)=0.46175$* dir.

2.3 Bölünmüş farklar

Lagrange ve Neville yöntemlerinin bazı olumsuz yanları vardır:

- *İşlem sayısı çok fazladır* (bazı başka yöntemlere kıyasla)
- *Data setinde bir nokta ilavesi veya çıkartılması halinde bütün hesapların baştan yenilenmesi gerekmektedir*.
- *Her bir interpolasyon noktası için benzeri hesapların tekrarlanması gerekmektedir*.

Bölünmüş fark tabloları bu olumsuzlukları gidermekte yararlı olmaktadır.

(x_0,f_0); (x_1,f_1); (x_2,f_2); (x_3,f_3);...

şeklinde bir data seti verilmiş olsun. *N* 'inci dereceden bir polinomun özel olarak

$$P_N(x)=a_0+(x-x_0)a_1+(x-x_0)(x-x_1)a_2+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_N)a_N$$

şeklinde düzenlenmiş olduğunu varsayalım. Buradaki a_i katsayıları uygun seçildiği taktirde yukarıdaki bütün data noktaları bu fonksiyonu sağlayabilir. İşte bu katsayılar bölünmüş fark tabloları yardımıyla elde edilecektir.

<u>Bölünmüş fark tabloları</u>

İki komşu nokta arasında

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0},\qquad f[x_1,x_2]=\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1},\qquad f[x_2,x_3]=\frac{f_3-f_2}{x_3-x_2},\qquad \ldots$$

şeklinde tanımlanan işlemler "birinci-dereceden bölünmüş fark" olarak adlandırılmaktadır. Yüksek dereceden bölünmüş farklar küçük-dereceden bölünmüş farklar yardımıyla elde edilir.

Örneğin:
$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_N]=\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_N]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{N-1}]}{x_N-x_0}$$

Bu kavram sıfırıncı-derece için $f[x_k]=f_k$ şeklinde uygulanır.

Buna göre örnek bir bölünmüş fark tablosunu sembolik olarak aşağıdaki gibi oluşturabiliriz:

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
x_0	f_0	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	f_1	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_2	f_2	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	
x_3	f_3	$f[x_3,x_4]$		
x_4	f_4			

Şayet örnek sayısal değerler kullanılırsa aşağıdaki gibi bir tablo elde edilebilir:

x_i	f_i	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,\ldots,x_{i+2}]$	$f[x_i,\ldots,x_{i+3}]$	$f[x_i,\ldots,x_{i+3}]$
3.2	22.0	8.400	2.856	-0.528	0.256
2.7	17.8	2.118	2.012	0.0865	
1.0	14.2	6.342	2.263		
4.8	38.3	16.750			
5.6	51.7				

Polinom katsayılarının bulunması

Yukarıda özel olarak

$$P_N(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + (x-x_0)(x-x_1)a_2 + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_N)a_N$$

şeklinde düzenlenen *N* 'inci dereceden polinomda *x* yerine sırasıyla veri noktalarının x_i koordinatları konulduğunda $P_N(x_i) = f_i$ $(i=0,1,\ldots,N)$ eşitliğini sağlaması beklenmektedir. Buna göre

$$\begin{aligned}
x = x_0 &\rightarrow P_N(x_0) = f_0 = a_0 \\
x = x_1 &\rightarrow P_N(x_1) = f_1 = a_0 + (x_1 - x_0)a_1 \\
x = x_2 &\rightarrow P_N(x_2) = f_2 = a_0 + (x_2 - x_0)a_1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)a_2 \\
&\ldots \\
x = x_N &\rightarrow P_N(x_N) = f_N = a_0 + (x_N - x_0)a_1 + \ldots + (x_N - x_0)(x_N - x_1)\ldots(x_N - x_N)a_N
\end{aligned}$$

olup, buradaki ilk denklemden

$$\boxed{a_0 = f_0 = f[x_0]}$$

ve bu değer kullanılarak ikinci denklemden

$$f_1 = a_0 + (x_1 - x_0)a_1 \quad \rightarrow \quad f_1 = f_0 + (x_1 - x_0)a_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]}$$

bulunur. Bu değerler kullanılarak üçüncü denklem

$$f_2 = f_0 + (x_2 - x_0)\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)a_2$$

şekline gelir ki, bu denklemden a_2 çekilip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a_2 = \frac{f_2 - f_0 - (x_2 - x_0)\dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(f_2 - f_0)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_0)(f_1 - f_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

$$a_2 = \frac{(f_2 - f_1 + f_1 - f_0)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1 + x_1 - x_0)(f_1 - f_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

$$a_2 = \frac{(f_2 - f_1)(x_1 - x_0) + (f_1 - f_0)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1)(f_1 - f_0) - (x_1 - x_0)(f_1 - f_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

$$a_2 = \frac{(f_2 - f_1)(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1)(f_1 - f_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\boxed{a_2 = f[x_0, x_1, x_2]}$$

olduğu görülür.

Diğer katsayılar için de benzeri işlemleri yaparak

$$\boxed{a_i = f[x_0, x_1, x_2, ..., x_i]}$$

olduğunu göstermek mümkündür. Yani polinomun katsayıları bölünmüş fark değerlerine eşittir.

$$\boxed{\begin{aligned} P_N(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \\ ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_N) f[x_0, x_1, x_2, ..., x_N] \end{aligned}}$$

Örnek olmak üzere yukarıdaki sayısal bölünmüş fark tablosu kullanılırsa üçümcü dereceden bir polinom

$$P_N(x) = 22.0 + 8.400(x - 3.2) + 2.856(x - 3.2)(x - 2.7) - 0.528(x - 3.2)(x - 2.7)(x - 1.0)$$

şeklinde elde edilir. $x=3$ noktası için bu polinom yardımıyla interpolasyon yapılırsa

$$\boxed{P_N(3.0) = 20.2120}$$

değeri elde edilir.

Not: Aynı verilerle aynı nokta için interpolasyon Lagrange yöntemiyle veya Neville yöntemiyle yapılmış olsaydı yine aynı sonuç elde edilirdi. Bu durum şaşırtıcı değildir. Zira kullanılan polinomlar aslında aynı olmakla birlikte yöntemler arasında sadece uygulama farklılığı söz konusudur.

Bölünmüş farklar yönteminin genel uygulaması

Bölünmüş farklar yöntemi ile genel bir uygulama yaparken yukarıdaki formülasyonun biraz daha değiştirilerek organize edilmesinde yarar vardır. Bu amaçla n adet noktadan oluşan

(x_0,f_0); (x_1,f_1); … … ;(x_i,f_i); (x_{i+1},f_{i+1}); …… ;(x_n,f_n)

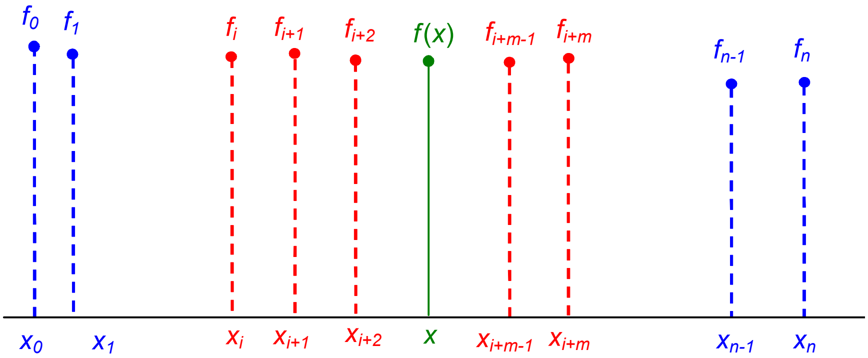
şeklindeki bir veri seti içerisinden bir x noktasını içine alan $m+1$ adet noktayı dikkate alalım.

(x_i,f_i); (x_{i+1},f_{i+1}); (x_{i+2},f_{i+2}); (x_{i+3},f_{i+3});… (x_{i+m},f_{i+m})

Bu noktalardan geçirilen m 'inci dereceden bir polinom

$$P_m(x) = a_0 + (x - x_i)a_1 + (x - x_i)(x - x_{i+1})a_2 + ... + (x - x_i)(x - x_{i+1})...(x - x_{i+m})a_m$$

$$P_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\prod_{j=0}^{k} (x - x_{i+j}) \right] a_k$$



şeklinde düzenlendiği taktirde buradaki a_k katsayılarının bölünmüş farklara eşit olacağı önceki paragrafta gösterilmiştir. Buna göre fonksiyon

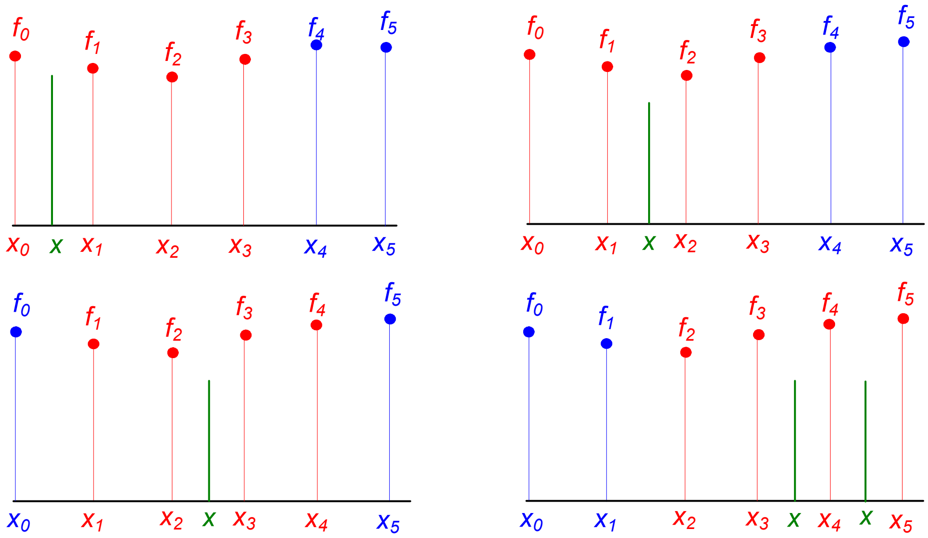
$$P_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[\prod_{j=0}^{k} \left(x - x_{i+j} \right) \right] f_{ik} \left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k} \right]$$

şeklinde yazılabilir. Burada f_{ik} büyüklüğü bölünmüş farkı belirtmekte olup, k indisi bölünmüş farkın hangi mertebeden olduğunu, i indisi ise bölünmüş farkların hangi veri noktasından itibaren hesaplanmış olduğunu ifade etmektedir.

Uygulamada interpolasyon polinomunun derecesi en fazla veri setindeki nokta sayısından bir küçük ($m=n$) olabilir.

$m < n$ olmak üzere yapılan bir uygulama sırasında x interpolasyon noktasının normal olarak $x_i < x < x_{i+m}$ arasında olması gerekir. Ancak interpolasyon için kullanılacak noktaların mümkün mertebe interpolasyon noktası noktaların orta bölgesinde kalacak biçimde seçilmesi uygun olur. Ancak bir veri setinin başlangıç ve bitim bölgelerinde buna imkan yoktur. Bu bakımdan baştan itibaren ileriye veya sondan itibaren geriye doğru yeteri sayıda noktanın, x interpolasyon noktası arada olacak biçimde seçilmesi yeterli olur.

Örnek olmak üzere şekildeki 6 noktalı veri setinde kübik bir polinomla yapılacak interpolasyonlar için interpolasyonda kullanılacak noktaların veri setinin başlangıç bölgesinde nasıl seçilebileceği hakkında fikir verilmektedir.



Buna göre x_0 ile x_1 ve x_1 ile x_2 noktaları arasındaki bütün noktalarda yapılacak interpolasyonlar için ilk dört noktanın alınması mümkün iken, x_2 ve x_3 noktaları arasındaki bölgede yapılacak interpolasyonlar için bu noktaların solunda ve sağında yer alan daha yakın noktaların, yani x_1, x_2, x_3 ve x_4 noktalarının alınması daha uygun olur. x_3 ve x_4 noktaları ile x_4 ve $x5$ noktaları arasındaki interpolasyonlar için de son dört noktanın alınması uygun olacaktır.Bu durumda çeşitli bölgelerdeki interpolasyon formülleri de

$$x_0 < x < x_2 \quad \rightarrow \quad P_3(x) = f_{00} + (x - x_0) f_{01} + (x - x_0)(x - x_1) f_{02} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f_{03}$$

$$x_2 < x < x_3 \quad \rightarrow \quad P_3(x) = f_{10} + (x - x_1) f_{11} + (x - x_1)(x - x_2) f_{12} + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f_{13}$$

$$x_3 < x < x_5 \quad \rightarrow \quad P_3(x) = f_{20} + (x - x_2) f_{21} + (x - x_2)(x - x_3) f_{22} + (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) f_{23}$$

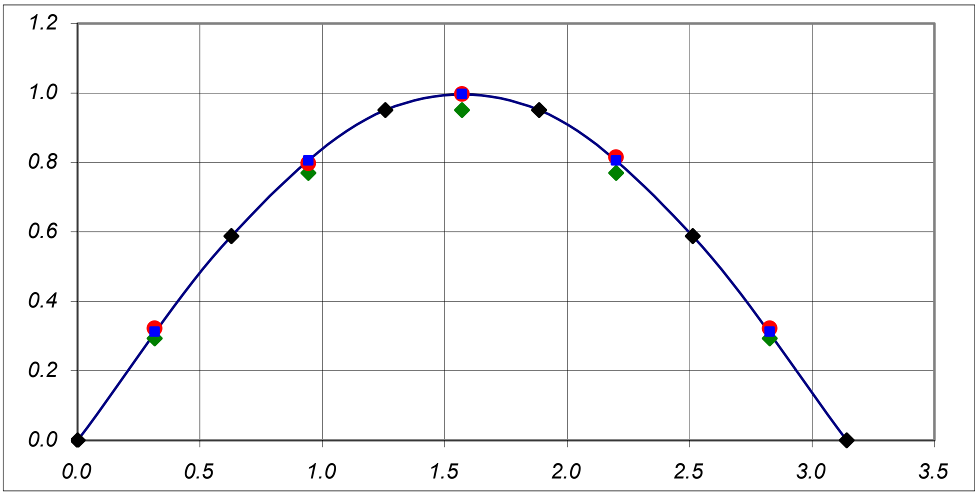
şeklinde uygulanacaktır.

Örnek:

Aşağıda *sinx* fonksiyonunun *0-180* derece arasında verilmiş *5* değerinden yararlanılarak ara noktalarda birinci, ikinci ve üçüncü derece polinomlarla interpolasyon yapılmıştır.

Veri noktaları			*Bölünmüş farklar*		
i	*x*	*f i0*	*f i1*	*f i2*	*f i2*
0	*0.00000*	*0.00000*	*0.93549*	*-0.28435*	*-0.09323*
1	*0.62832*	*0.58779*	*0.57816*	*-0.46009*	*0.00000*
2	*1.25664*	*0.95106*	*0.00000*	*-0.46009*	*0.09323*
3	*1.88496*	*0.95106*	*-0.57816*	*-0.28435*	
4	*2.51327*	*0.58779*	*-0.93549*		
5	*3.14159*	*0.00000*			

İnterpolasyon			
x	*P1(x)*	*P2(x)*	*P3(x)*
0.31416	*0.29389*	*0.32196*	*0.31328*
0.94248	*0.76942*	*0.79749*	*0.80616*
1.57080	*0.95106*	*0.99647*	*0.99647*
2.19911	*0.76942*	*0.81483*	*0.80616*
2.82743	*0.29389*	*0.32196*	*0.31328*



2.4 Eşit aralıklı nokta dağılımları için basit farklar

Veri noktalarının

$$x_1 - x_0 \quad = \quad x_2 - x_1 \quad = \quad \cdots \quad = \quad x_{i+1} - x_i \quad = \quad \cdots \quad = \quad x_N - x_{N-1} \quad = \quad h$$

şeklinde eşit aralıklı olması halinde polinom formülleri daha basit hale gelir. Lagrange formülleri basitleştiği gibi *bölünmüş farklar* yerine de *basit farklar* kullanılır.

Lagrange formülleri:

Farklı aralıklı noktalar için daha önce

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N} L_k f_k \;; \qquad L_k=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

şeklinde verilen Lagrange formülleri eşit aralıklı veri noktaları için

$$\boxed{s=\frac{x-x_0}{h}}$$

$$\begin{aligned}
x_1-x_0&=h &&\rightarrow && x_1=x_0+h\\
x_2-x_1&=h &&\rightarrow && x_2=x_0+2h\\
&\cdots\\
x_j-x_{j-1}&=h &&\rightarrow && x_j=x_0+jh\\
&\cdots\\
x_k-x_{k-1}&=h &&\rightarrow && x_k=x_0+kh\\
&\cdots\\
x_N-x_{N-1}&=h &&\rightarrow && x_N=x_0+Nh
\end{aligned}$$

olmak üzere düzenlenerek

$$\begin{aligned}
x-x_j&=x-(x_0+jh)\\
x_k-x_j&=(x_0+kh)-(x_0+jh)=(k-j)h
\end{aligned}
\qquad
\frac{x-x_j}{x_k-x_j}=\frac{x-x_0-jh}{(k-j)h}=\frac{\dfrac{x-x_0}{h}-j}{k-j}=\frac{s-j}{k-j}$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{N} L_k f_k \;; \qquad L_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N} \frac{s-j}{k-j}}$$

şeklini alır.

Basit farklar:

Eşit aralıklı bir (x_i,f_i), ($i=0,1,...,N$) veri setinde

Birinci-dereceden basit farklar $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i\;;\quad (i=0,1,...,N-1)$

İkinci dereceden basit farklar $\Delta^2 f_i=\Delta(\Delta f_{i+1}-\Delta f_i)=f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i\;;\quad (i=0,1,...,N-2)$

şeklinde hesaplanır. Herhangi bir n 'inci dereceden farklar ise bir önceki $n-1$ 'inci dereceden farklar cinsinden

$$\Delta^n f_i=\Delta\left(\Delta^{n-1}f_{i+1}-\Delta^{n-1}f_i\right)=f_{i+n}-n\,f_{i+n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}f_{i+n-2}-\cdots\pm f_i\;;\qquad (i=0,1,...,N-n)$$

şeklinde elde edilir. Böylece n 'inci dereceden bir interpolasyon formülü bu basit farklar cinsinden

$$\boxed{P_n(x_s)=f_0+s\,\Delta f_0+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0+\cdots+\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\boxed{s = \frac{x - x_0}{h} \; ; \qquad h = \Delta x}$$

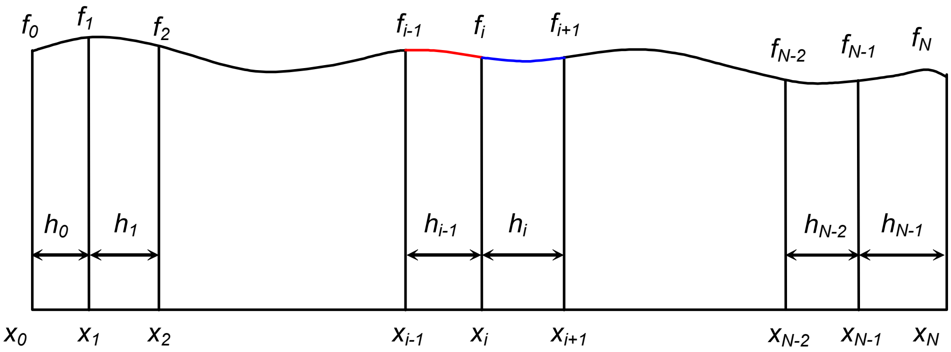
Bu tip interpolasyon polinomu "*Newton-Gregory ileri fark polinomu*" olarak bilinir.

2.5 Kübik spline eğrileri

Bu yöntemde, verilen bir

$$[x_0, f_0], [x_1, f_1], \ldots\ldots, [x_i, x_{i+1}], \ldots\ldots, [x_N, f_N]$$

veri dağılımına birçok noktadan geçen polinomlar uydurmak yerine herbir $[x_j, x_{j+1}]$ aralığından üçüncü dereceden bir polinom geçirilir. Polinomun ve 1. ve 2. türevlerinin x_j ve x_{j+1} noktalarında sürekli olduğu kabul edilir. Yalnız, ileride de belirtileceği gibi x_0 ve x_N uç noktalarında özel uç şartları kullanılır.



Kübik Spline yakınlaşımı

Buna göre, $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında bir kübik polinom

$$\boxed{g_i(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu polinomun bir ve ikinci türevleri de

$$g_i'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_i) + 3a_3(x - x_i)^2$$

$$g_i''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_i)$$

şeklinde olur. İkinci türevin x_i ve x_{i+1} uç noktalarındaki değerlerine sırasıyla M_i ve M_{i+1} denilirse

$$g_i''(x_i) \quad = M_i \quad = 2a_2$$
$$g_i''(x_{i+1}) = M_{i+1} = 2a_2 + 6a_3(x_{i+1} - x_i)$$

bağıntılarından

$$\boxed{a_2 = \frac{M_i}{2}} \qquad \boxed{a_3 = \frac{M_{i+1} - M_i}{6\,h_i}}$$

elde edilir. Burada

$$\boxed{h_i = x_{i+1} - x_i}$$

dir. Öte yandan kübik spline fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} uç noktalarında f_i ve f_{i+1} değerlerini alacağı düşünülürse

$$f_i = a_0$$
$$f_{i+1} = a_0 + a_1 h_i + a_2 h_i^2 + a_3 h_i^3$$

bağıntılarından da sırasıyla

$$\boxed{a_0 = f_i}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_i}$$

bulunur.

Böylece kübik fonksiyonların katsayıları bir tek M_i parametrelerine bağlanmış olmaktadır. Yani M_i bilinmeyenleri bulunduğu taktirde kübik fonksiyonların katsayıları elde edilmiş olacaktır. Bu amaçla kübik fonksiyonların birinci türevlerinin uç noktalarında sürekli olacağı koşulu dikkate alınırsa

$$g_{i-1}'(x_i) = g_i'(x_i)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradaki türevler sırasıyla

$$g_{i-1}'(x_i) = a_{1i-1} + 2a_{2i-1}(x_i - x_{i-1}) + 3a_{3i-1}(x_i - x_{i-1})^2$$
$$= a_{1i-1} + 2a_{2i-1} h_{i-1} + 3a_{3i-1} h_{i-1}^2$$

$$g_i'(x_i) = a_{1i}$$

olup, bunların eşitliğinden

$$a_{1i-1} + 2a_{2i-1} h_{i-1} + 3a_{3i-1} h_{i-1}^2 = a_{1i}$$

ve katsayılar yerleştirilerek

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{2M_{i-1} + M_i}{6} h_{i-1} + 2\frac{M_{i-1}}{2} h_{i-1} + 3\frac{M_i - M_{i-1}}{6} h_{i-1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_i$$

veya M_i büyüklüklerine göre yeniden düzenlenerek

$$h_{i-1} M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) M_i + h_i M_{i+1} = 6\left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right]$$

elde edilir.

Birinci türevlerin eşitliğinden bulunan bu son denklem x_0 ve x_N uç noktaları hariç bütün x_i noktalarında uygulanarak, yeni bir düzenlemeyle

$$\boxed{L_i M_{i-1} + D_i M_i + U_i M_{i+1} = R_i\,, \qquad (i = 1,2,...N-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\boxed{L_i = h_{i-1}\;; \qquad D_i = 2\,(h_{i-1} + h_i)\,; \qquad U_i = h_i\;; \qquad R_i = 6\left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right]}$$

dir. Görüldüğü gibi, toplam N adet M_i bilinmeyenine karşılık sadece (N-2) denklem mevcut olup, çözüm için ilave iki denkleme daha ihtiyaç vardır.

İlave denklemler için uygulanabilecek bir yöntem x_0 ve x_N uç noktalarındaki M_0 ve M_N bilinmeyenlerinin uygun şekilde komşu noktalardaki bilinmeyenlere bağlanmasıdır. İlave denklemleri çeşitli şekillerde elde etmek mümkündür:

Uçlarda lineer spline:

Uç noktalarında kübik eğrilerin birer doğruya dönüştükleri varsayılarak ikinci türevler için

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_N &= 0 \end{aligned}}$$

ilave denklemleri yazılabilir.

Uç noktalarında belirlenmiş birinci türevler:

Uç noktalarında eğrilerin eğimleri başka bir yolla belirlenip empoze edilebilir. Şayet sol ve sağ uçlarda eğimler sırasıyla A ve B ise kübik spline fonksiyonunun 1. türevi için bulunan

$$S_i'(x) = \left[\frac{h_i}{6} - \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i}\right]\cdot M_i + \left[\frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \frac{h_i}{6}\right]\cdot M_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$$

bağıntısından

$$\boxed{\begin{aligned} 2h_0 M_0 + h_0 M_1 &= 6\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - A\right) \\ h_{N-1} M_{N-1} + 2h_{N-1} M_N &= 6\left(B - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}\right) \end{aligned}}$$

ilave denklemleri elde edilebilir.

Uçlarda parabolik spline:

Uç noktalarında kübik eğrilerin birer parabole dönüştükleri varsayılarak ikinci türevler için

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= M_1 \\ M_N &= M_{N-1} \end{aligned}}$$

ilave denklemleri yazılabilir.

Uçlardaki ikinci türevlerin ekstrapolasyonla bulunması:

Uç noktalarında ikinci türevlerin değerleri komşu iki noktadaki değerlerden ekstrapolasyon yoluyla bulunabilir. Buna göre

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= \frac{(h_0+h_1)M_1 - f_0 M_2}{h_1} \\ M_N &= \frac{(h_{N-2}+h_{N-1})M_{N-1} + h_{N-1}M_{N-2}}{h_{N-2}} \end{aligned}}$$

ilave denklemleri elde edilir.

Üçüncü Türevin Sürekliliği:

İkinci türev ifadesinin bir kez daha türevi alınarak

$$S_i'''(x) = -\frac{M_i}{h_i} + \frac{M_{i+1}}{h_i}$$

ve x_1 ve x_{N-1} noktalarında üçüncü türevlerin

$$\begin{aligned} S_0'''(x_1) &= S_1'''(x_1) \\ S_{N-2}'''(x_{N-1}) &= S_{N-1}'''(x_{N-1}) \end{aligned}$$

şeklinde sürekli olacağı kabul edilerek

$$\boxed{\begin{aligned} & M_0 - \left(1+\frac{h_0}{h_1}\right)M_1 + \frac{h_0}{h_1}M_2 = 0 \\ & \frac{h_{N-1}}{h_{N-2}}M_{N-2} - \left(1+\frac{h_{N-1}}{h_{N-2}}\right)M_{N-1} + M_N = 0 \end{aligned}}$$

ilave denklemleri elde edilebilir.

Periyodik Kübik Spline:

Nokta dağılımının periyodik olması halinde ise birinci kübikle sonuncu kübiğin uç noktalarındaki

$$S_0'(x_0) = -\frac{2h_0}{6}M_0 - \frac{h_0}{6}M_1 + \frac{f_1 - f_0}{h_0}$$

$$S_{N-1}'(x_N) = \frac{h_{N-1}}{6}M_{N-1} + \frac{2h_i}{6}M_N + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}}$$

birinci türevleri

$$S_{N-1}'(x_0) = S_{N-1}'(x_N)$$

şeklinde eşitlenerek

$$\boxed{\frac{2h_0}{6}M_0+\frac{h_0}{6}M_1+\frac{h_{N-1}}{6}M_{N-1}+\frac{2h_i}{6}M_N=\frac{f_1-f_0}{h_0}-\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}}$$

ilave denklemi ve ayrıca yine birinci kübikle sonuncu kübiğin uç noktalarındaki ikinci türevleri eşitlenerek

$$\boxed{M_1=M_N}$$

ilave denklemi elde edilebilir.

Kübik spline interpolasyonu

Yukarıdaki ilave denklemlerinde kullanılmasıyla elde edilen denklem sistemi Mi ler için çözüldükten sonra istenilen herhangi bir x noktasındaki interpolasyon için en başta yazılan

$$\boxed{g_i(x)=a_0+a_1(x-x_i)+a_2(x-x_i)^2+a_3(x-x_i)^3}$$

kübik spline fonksiyonları kullanılır. Buradaki kübik spline katsayıları daha önce de belirtildiği gibi

$$\boxed{a_{0i}=f_i}$$

$$\boxed{a_{1i}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{2M_i+M_{i+1}}{6}h_i}$$

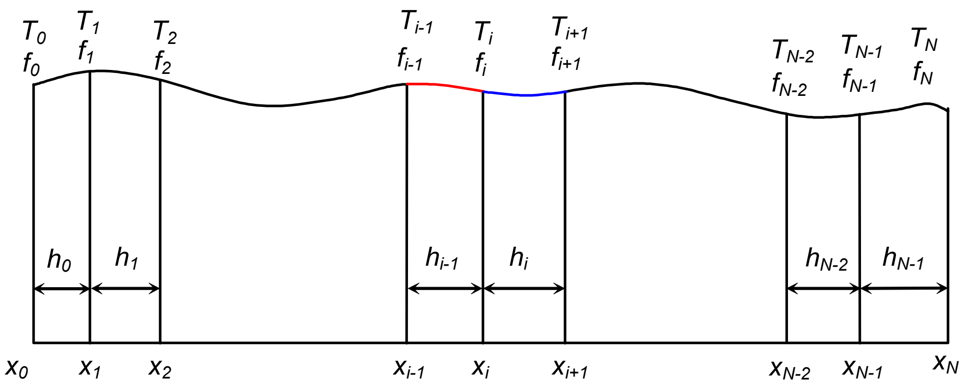
$$\boxed{a_{2i}=\frac{M_i}{2}}$$

$$\boxed{a_{3i}=\frac{M_{i+1}-M_i}{6h_i}}$$

bağıntıları yardımıyla uç noktalarındaki ikinci türevler cinsinden hesaplanacaktır.

2.6 Kısmi kübik spline eğrileri

Kübik spline yakınlaşımı, uç noktalarında *birinci türevlerin daha önceden bir başka yolla bulunması* halinde daha kolay bir probleme dönüşür ve "*kısmi kübik spline yakınlaşımı*" adını alır.



Kısmi kübik spline yakınlaşımı

Herhangi bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında bir kübik spline ve 1. türevi sırasıyla

$$\boxed{g_i(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i) + a_{2i}(x - x_i)^2 + a_{3i}(x - x_i)^3}$$

$$g_i'(x) = a_{1i} + 2a_{2i}(x - x_i) + 3a_{3i}(x - x_i)^2$$

şeklinde tanımlanmıştı. X_i ve x_{i+1} uç noktalarında polinomun değerleri sırasıyla f_i ve f_{i+1} , birinci türevlerin değerleri de T_i ve T_{i+1} olmak üzere

$$\begin{aligned} f_i &= a_{0i} \\ f_{i+1} &= a_{0i} + a_{1i}h_i + a_{2i}h_i^2 + a_{3i}h_i^3 \\ T_i &= a_{1i} \\ T_{i+1} &= a_{1i} + 2a_{2i}h_i + 3a_{3i}h_i^2 \end{aligned} \quad ; \quad i = 0,2,\ldots,N-1$$

denklemleri yazılarak bu denklemlerden kübik spline katsayıları:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{0i} &= f_i \\ a_{1i} &= T_i \\ a_{2i} &= 3\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^2} - \frac{2T_i + T_{i+1}}{h_i} \\ a_{3i} &= -2\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i^3} + \frac{T_i + T_{i+1}}{h_i^2} \end{aligned} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,N}$$

şeklinde elde edilir.

2.7 Bir yüzey üzerinde interpolasyon

Bir çok mühendislik probleminde bir yüzey üzerinde interpolasyon yapma zorunluluğu doğar.

İki değişkene bağlı bir polinomsal fonksiyon

$$\begin{aligned} z = f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^3y \\ + a_{10}x^2y^2 + a_{11}x^3y^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Böyle bir fonksiyon bir yüzey tanımlar. Bazan bağımsız değişken sayısı, örneğin zaman değişkeninin ilavesiyle daha fazla olabilir ve fonksiyon daha da karmaşıklaşabilir. Bu durumda karmaşıklıktan kurtulmak içinher bir değişken ayrı ayrı ele alınabilir.

Örneğin yukarıdaki fonksiyon, $y=sb$ alınırsa

$$z_{y=sb} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

şekline gelir. Buradan, değişkenlerden birini sabit (örneğin $y=y_1$) alarak $(x,y)=(a,b)$ gibi bir noktada z için interpolasyon yapılabileceği anlaşılmaktadır. Bu interpolasyon için daha önce izah edilen herhangi bir teknik kullanılabilir. Bu işlem y nin y_2, y_3,..., y_n gibi başka değerleri için de tekrar edilerek z için $x=a$ da bir tablo elde edilebilir. Bu tablodan da $y=b$ için interpolasyon yapılabilir.

Örnek

Aşağıdaki tablo yardımıyla ($x=1.6$; $y=0.33$) noktasında f değerini tahmin ediniz. Bunun için x yönünde kuadratik, y yönünde kübik interpolasyon kullanınız.

$x \backslash y$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1.5	0.447	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

x doğrultusunda kuadratik interpolasyon önerildiği için bu doğrultuda üç nokta almak yeterli olacaktır. $x=1.6$ noktasında interpolasyon yapılması istendiği için de buna en yakın olan $x=1.0$, $x=1.5$ ve $x=2.0$ noktalarının alınması uygun olur.

y doğrultusunda ise kübik interpolasyon önerildiği için 4 noktaya ihtiyaç vardır. Buna göre $y=0.33$ noktasına en yakın olan $y=0.2$, $y=0.3$, $y=0.4$ ve $y=0.5$ noktalarının alınması uygundur.

İnterpolasyon iki aşamada gerçekleştirilecek olup ilk aşamada x veya y doğrultulardan bir sabit tutulup diğeri için interpolasyon yapılacak, ikinci aşamada ise interpolasyonla bulunan bu değerler arasında diğer yönde interpolasyon yapılacaktır. Önce hangi doğrultudaki değerin sabit tutulacağı hususunun, yuvarlatma hataları dışında önemi yoktur.

Buradaki uygulamada önce sabit x değerleri için interpolasyon yapılacaktır. *x* 'in sabit üç farklı değeri için basit fark tabloları aşağıdadır:

	y	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$
$x=1.0$	0.2	0.640	0.363	-0.007	-0.005
	0.3	1.003	0.356	-0.012	
	0.4	1.359	0.344		
	0.5	1.703			
$x=1.5$	0.2	0.990	0.534	-0.013	-0.004
	0.3	1.524	0.521	-0.017	
	0.4	2.045	0.504		
	0.5	2.549			
$x=2.0$	0.2	1.568	0.816	-0.023	-0.004
	0.3	2.384	0.793	-0.027	
	0.4	3.177	0.766		
	0.5	3.943			

Bu tabloda noktalar eşit aralıklı dağıldığı için Newton-Gregory ileri fark polinomları kullanılmış olup, her bir *x* değerinde $y=0.33$ noktası için yapılan interpolasyonlar sonucu elde edilen sonuçlar ve bunlar kullanılarak y doğrultusunda elde edilen basit farklar aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

	X	z	Δz	$\Delta^2 z$
$y=0.33$	1.0	1.1108	0.5710	0.3717
	1.5	1.6818	0.9427	
	2.0	2.6245		

Bu tablodan yapılan interpolasyonla $f(1.6, 0.33) = 1.8406$ değeri elde edilir.

Aslında bu örnek problemde incelenen veri $f(x,y) = e^x \sin y + y - 0.1$ fonksiyonuna ait olup interpolasyon noktasındaki gerçek değer $f(1.6, 0.33) = 1.8350$ dir. Buna göre interpolasyonda yapılan hata *0.0056* mertebesindedir. Hatanın bu kadar büyük olmasının nedeni x yönünde kuadratik interpolasyonun yeterli olmayışıdır. Bu husus ikinci dereceden farkların büyük olmasından da anlaşılmaktadır. Bu yönde üçüncü dereceden bir fonksiyonla interpolasyon yapılması halinde hata daha küçük olacaktır.

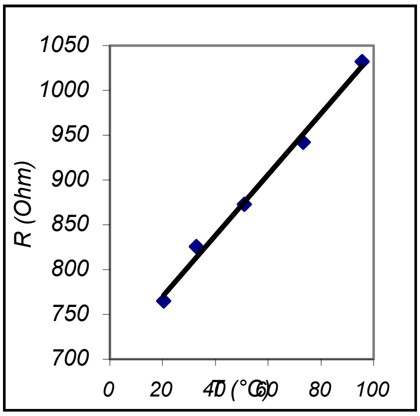
2.8 En-küçük kareler yaklaşımı

Buraya kadar izah edilen yöntemler daha ziyade düzgün dağılımlı veriler için uygundur. Oysa özellikle deneysel çalışmalardan üretilen verilerde çoğu zaman hatalar mevcut olup, bu hatalı verilere önceki yöntemlerin uygulanması halinde çalkantılar ortaya çıkar.

Bu bölümde hata içeren verilere eğri uydurulması için daha uygun bir yöntem olan en küçük kareler yöntemi üzerinde durulacaktır.

Yöntemi tanıtmak için basit bir örneği ele alalım. Bir deneysel çalışma sırasında bir telin sıcaklığı ile direnci farklı öğrenciler tarafından ölçülerek aşağıdaki tabloda verilen değerler elde edilmiştir.

T (°C)	*R (Ohm)*
20.5	*765*
32.7	*826*
51	*873*
73.2	*942*
95.7	*1032*



Veri noktaları aynı zamanda grafik üzerinde de belirtilmiş olup, noktaların tam olmasa da lineere yakın bir dağılıma sahip olduğu görülmektedir. Bu veri dağılımına en uygun doğrunun uydurulması için en küçük kareler yöntemi kullanılacaktır.

Veri noktalarının doğrudan uzaklıkları hata olarak nitelendirilirse en uygun doğru, bu hataların en küçük olduğu doğru olacaktır. Dolayısıyla bu problem bir "hatayı en küçüğe indirme (minimization)" problemidir.

Şayet deneysel çalışmada sıcaklıkların doğru okunduğu varsayılırsa hataların sadece direnç okumalarında yapılmış olduğu kabul edilebilir. Ancak bazı direnç değerleri gerçek değerden büyük okunmuşken bazıları daha küçük okunmuştur. Bu durumda hataların bir kısmı pozitif işaretli iken bazıları negatif işaretlidir. Şayet toplam hatayı bulmak için hatalar bu haliyle toplanırsa negatif ve pozitif işaretli büyüklüklerin bir kısmı birbirini yokedeceğinden, toplam hata olası gerekenden daha küçük bulunacaktır. Bu nedenle hataları toplamak yerine hataların karelerini toplamak ve bulunan bu toplam hata değerini en küçük yapmaya çalışmak daha doğru olur.

Şimdi

- veri dağılımını (x_k, y_k) $k=1,2,\ldots,N$ ile belirtelim

- buna uydurulacak doğruyu $y(x) = a_0 + a_1 x$ şeklinde tanımlayalım.

Buna göre

- Hatalar $e_k = y_k - y(x_k)$

- Hataların kareleri $e_k^2 = [y_k - y(x_k)]^2 = (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2$

- Hataların kareleri toplamı $E = \sum_{k=1}^{N} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2$

olacaktır. En küçük kareler yöntemi bu *E* toplamının en küçük değerinin bulunmasını hedefler ki bunun için problemin iki parametresi olan a_0 ve a_1 büyüklüklerinin en uygun değerinin bulunması gerekir.

E büyüklüğünün minimum olması için bu büyüklüğün a_0 ve a_1 parametrelerine göre türevlerinin sıfır olması gerekir:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{k=1}^{N} 2(y_k - a_0 - a_1 x_k)(-1) = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \sum_{k=1}^{N} 2(y_k - a_0 - a_1 x_k)(-x_k) = 0$$

Bu eşitlikler a_0 ve a_1 için yazılmış birer denklem olup düzenlenerek matris formda

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{k=1}^{N} x_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{N} y_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k y_k \end{Bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu lineer denklem takımı çözülerek a_0 ve a_1 büyüklüklerinin uygun değerleri elde edilir.

Ele alınan örnekte

$$N = 5\ ; \quad \sum_{k=1}^{N} x_k = 273.1\ ; \quad \sum_{k=1}^{N} x_k^2 = 18607.27\ ; \quad \sum_{k=1}^{N} y_k = 4438\ ; \quad \sum_{k=1}^{N} x_k y_k = 254932.5$$

olup denklem takımının çözümünden

$$a_0 = 702.2\ ; \quad a_1 = 3.395$$

elde edilir. Yani veri dağılımına en uygun doğrunun denklemi

$$y = 702.2 + 3.395 \cdot x \qquad \text{veya} \qquad \boxed{R = 702.2 + 3.395 \cdot T}$$

şeklindedir.

Lineer olmayan veriler

Bazı hallerde veri seti non-lineer bir dağılım gösterebilir.

Örneğin: $y = a \cdot x^b$, $y = a \cdot e^{bx}$ gibi

Bu gibi durumlarda en küçük kareler yönteminin uygulanması zor olur. Bu bakımdan non-lineer denklemlerin lineerleştirildikten sonra en küçük kareler yönteminin uygulanması daha doğru olur.

Örneğin yukarıdaki fonksiyonlar logaritma alınarak

$$\ln y = \ln a + b \ln x \,, \qquad \ln y = \ln a + bx$$

şekline getirilebilir. Bu iki fonksiyon artık doğrusaldır.

En küçük kareler polinomları

Daha önceki polinomsal yakınlaşım uygulamalarında N adet noktadan $n=N-1$ inci dereceden bir polinom geçirilebileceği hatırlatılarak bu ilkeye dayanan Lagrange polinomlarından ve çeşitlemelerinde söz edilmişti. Ayrıca $N-1$ inci dereceden polinomun bütün veri noktalarından geçtiği hatırlatılmıştı.

Veri setinin düzgün bir dağılıma sahip olmaması halinde bütün noktalardan geçen bir polinom çalkantı gösterebilir. Veri setine daha düzgün bir eğri uydurulması istenirse polinomun daha düşük dereceden olması gerekir.

Buna göre

yakınlaşım polinomu
$$y = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

şeklinde tanımlanırsa, bu polinomun elde edilebilmesi için bütün a_j ($j=0,1,2,...,n$) katsayılarının değerlerinin bulunması gerekir. Yani problemde bilinmeyen $n+1$ adet parametre mevcuttur.

Bu tanımlamayla

hatalar
$$e_k = y_k - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j$$

hataların kareleri
$$e_k^2 = \left[y_k - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j \right]^2$$

kareler toplamı
$$E = \sum_{k=1}^{N} \left[y_k - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j \right]^2$$

olup, kareler toplamının en küçük değerini elde etmek için E toplamının a_i ($i=0,1,2,\ldots,n$) paremetrelerine göre türevlerinin sıfır olması gerekmektedir:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^{N} 2 \left[y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j \right] \cdot \left[-x_k^i \right] = 0 \,; \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

Bu şekilde elde edilen $n+1$ adet lineer denklem eş-zamanlı olarak çözülerek a_j katsayıları elde edilebilir. Bunun için yukarıdaki denklem sistemi düzenlenerek

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=1}^{N} a_j x_k^j x_k^i \right) = \sum_{k=1}^{N} x_k^i y_k \,; \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

şeklinde veya matris formda açık olarak

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{k=1}^{N} x_k^1 x_k^0 & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 x_k^0 & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 x_k^0 & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^n x_k^0 \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^0 x_k^1 & \sum_{k=1}^{N} x_k^1 x_k^1 & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 x_k^1 & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 x_k^1 & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^n x_k^1 \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^0 x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k^1 x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 x_k^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^n x_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^0 x_k^n & \sum_{k=1}^{N} x_k^1 x_k^n & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 x_k^n & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 x_k^n & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^n x_k^n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{N} x_k^0 y_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^1 y_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^2 y_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^n y_k \end{Bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{k=1}^{N} x_k^1 & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^n \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^1 & \sum_{k=1}^{N} x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 & \sum_{k=1}^{N} x_k^4 & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^{n+1} \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^2 & \sum_{k=1}^{N} x_k^3 & \sum_{k=1}^{N} x_k^4 & \sum_{k=1}^{N} x_k^5 & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^n & \sum_{k=1}^{N} x_k^{n+1} & \sum_{k=1}^{N} x_k^{n+2} & \sum_{k=1}^{N} x_k^{n+3} & \cdots & \sum_{k=1}^{N} x_k^{n+n} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{N} y_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k y_k \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^2 y_k \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{N} x_k^n y_k \end{Bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sistemi Gauss eliminasyon yöntemi ile çözülebilir.

Örnek:

Aşağıdaki veri noktalarına en küçük kareler yaklaşımı ile kuadratik bir eğri uydurunuz

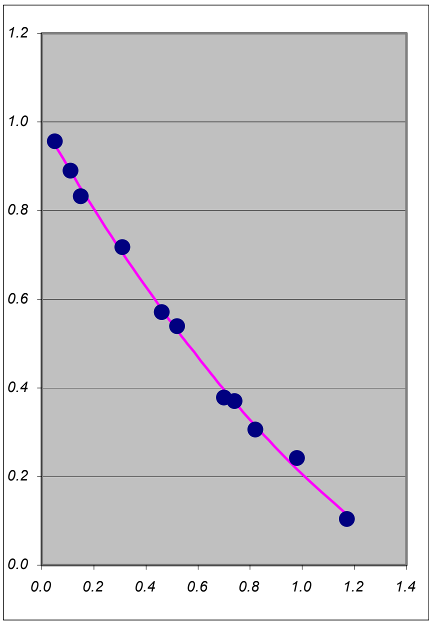
x_k	0.050	0.110	0.150	0.310	0.460	0.520	0.700	0.740	0.820	0.980	1.171
y_k	0.956	0.890	0.832	0.717	0.571	0.539	0.378	0.370	0.306	0.242	0.104

Çözüm

k	x_k	y_k	x_k ^ 2	x_k ^ 3	x_k ^ 4	$x_k . y_k$	x_k ^ 2 . y_k	y(x)
0	0.050	0.956	0.00250	0.00013	0.00001	0.04780	0.00239	0.94767
1	0.110	0.890	0.01210	0.00133	0.00015	0.09790	0.01077	0.88872
2	0.150	0.832	0.02250	0.00338	0.00051	0.12480	0.01872	0.85031
3	0.310	0.717	0.09610	0.02979	0.00924	0.22227	0.06890	0.70392
4	0.460	0.571	0.21160	0.09734	0.04477	0.26266	0.12082	0.57716
5	0.520	0.539	0.27040	0.14061	0.07312	0.28028	0.14575	0.52929
6	0.700	0.378	0.49000	0.34300	0.24010	0.26460	0.18522	0.39543
7	0.740	0.370	0.54760	0.40522	0.29987	0.27380	0.20261	0.36767
8	0.820	0.306	0.67240	0.55137	0.45212	0.25092	0.20575	0.31431
9	0.980	0.242	0.96040	0.94119	0.92237	0.23716	0.23242	0.21624
10	1.171	0.104	1.37124	1.60572	1.88030	0.12178	0.14261	0.11428
□	6.011	5.905	4.65684	4.11907	3.92254	2.18397	1.33596	

11.0000	6.0110	4.6568	5.9050
6.0110	4.6568	4.1191	2.1840
4.6568	4.1191	3.9225	1.3360

□a_0 = 2.1801	a_0 = 0.99804
□a_1 = -2.2251	a_1 = -1.01863
□a_2 = 0.4923	a_2 = 0.22538
□ = 2.1844	



Not: Tabloda herbir sütunun altında toplamlar yer almaktadır. Bu toplamlara ilişkin satırın altında lineer denklem takımının katsayılarına ve sağ taraf vektörüne, daha alt satırlarda da lineer denklem takımının Cramer yöntemi ile çözümüne yer verilmiştir. Tablonun en sağ sütununda en küçük kareler yöntemiyle elde edilen parabolik eğri üzerindeki noktaların koordinatları yer almaktadır.

Grafik üzerinde dairelerle veri noktaları belirtilmiş olup dolu çizgi en küçük kareler yöntemiyle elde edilen parabolik eğriyi temsil etmektedir.