END331
YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI I
DERS NOTLARI
BİRİNCİ BÖLÜM
(2020-2021)

Dr. Y. İlker Topcu & Dr. Özgür Kabak

Teşekkür:
Prof. W.L. Winston'ın "Operations Research: Applications and Algorithms" kitabı ile Prof. J.E. Beasley's YA ders notlarının bu ders notlarının oluşturulmasına olan katkıları yüzünden her iki profesöre de teşekkür ederiz....
Rastlayabileceğiniz tüm hataların sorumluluğu bize aittir. Lütfen bizi bu hatalardan haberdar ediniz!
İstanbul Teknik Universitesi OR/MS takımı

İÇİNDEKİLER

1. YÖNEYLEM ARAŞTIRMASINA GİRİŞ

1.1 TERMİNOLOJİ

"Yöneylem Araştırması" (YA), İngiliz ve Avrupalılar tarafından "Operational Research" ve Amerikalılar tarafından "Operations Research" olarak isimlendirilir ve "OR" olarak kısaltılır.

Bu alanda kullanılan bir diğer terim de "Yönetim Bilimi"dir (Management Science) ve uluslararası literatürde MS olarak kısaltılır. İki terim birleştirilerek "***OR/MS***" veya "ORMS" de denilir.

YA genelde bir "Sorun Çözme" (problem solving) ve "Karar Verme Bilimi" (decision science) olarak da değerlendirilir.

Bazı kaynaklarda YA yerine Endüstri Mühendisliği (Industrial Engineering - IE) kavramı da kullanılır.

Son yıllarda bu alan için tek bir terim kullanılmaya çalışılmaktadır: OR.

Biz de derste bu alan için Yöneylem Araştırmasının Türkçe kısaltması olan YA'yı kullanacağız.

“Yöneylem Araştırması (Yönetim Bilimi) genellikle kıt kaynakların tahsis edilmesi gereken durumlarda en iyi şekilde bir sistemi tasarlamaya ve işletmeye yönelik karar verme sürecine bilimsel bir yaklaşımdır.”

Belirli bir hedefi gerçekleştirmek için birlikte çalışan birbirine bağlı bileşenlerin oluşturduğu düzen sistemdir.

1.2 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI YÖNTEMBİLİMİ

Bir sorunun çözümü için YA kullanıldığı zaman aşağıdaki yedi adımlık süreç takip edilmelidir.

<u>Adım 1. Sorunun Formülasyonu</u>

YA analisti (sorunu olan karar vericiye YA teknikleri ile yardımcı olan kişi) ilk olarak sorunu tanımlar. Sorunun tanımlanması; amaçların ve sorunu oluşturan sistemin bileşenlerinin belirlenmesi ile olur.

Adım 2. Sistemin İncelenmesi

Daha sonra analist sorunu etkileyen parametrelerin değerlerini belirlemek için veri toplar. Söz konusu değerler sorunu temsil edecek bir matematiksel modelin geliştirilmesi (Adım 3) ve değerlendirilmesi (Adım 4) için kullanılır.

Adım 3. Sorunun Matematiksel Modelinin Kurulması

Analist tarafından sorunu ideal bir şekilde temsil edecek bir matematiksel model geliştirilir. Bu derste modelleme için çeşitli yöntemler öğreneceğiz.

Adım 4. Modelin Doğrulanması

Üçüncü adımda kurulan modelin gerçeği iyi yansıtıp yansıtmadığı sınanır. Şu anki durum için modelin ne kadar geçerli olduğu belirlenerek modelin gerçeğe ne kadar uyduğu test edilir.

Adım 5. Uygun bir Seçeneğin Seçilmesi

Eldeki model üzerinde bir çözüm yöntemi kullanılarak amaçları en iyi karşılayan bir seçenek (varsa) analist tarafından seçilir.

Bazen eldeki seçeneklerin kullanımı için sınırlandırmalar ve kısıtlamalar olabilir. Bu yüzden amacı karşılayan seçenek bulunamayabilir. Bazı durumlarda ise amaçları en iyi şekilde karşılayan birden fazla sayıda seçenek bulunabilir.

Adım 6. Sonuçların Karar Vericiye Sunumu

Bu adımda, analist modeli ve model çözümü sonucunda ortaya çıkan önerileri karar verici ya da vericilere sunar. Seçenek sayısı birden fazla ise karar verici(ler) gereksinimlerine göre birini seçerler.

Sonuçların sunumundan sonra, karar verici(ler) öneriyi onaylamayabilir. Bunun nedeni uğraşılan sorunun doğru tanımlanmaması ya da modelin kurulmasında karar vericinin yeterince sürece karışmaması olabilir. Bu durumda analist ilk üç adıma yeniden dönmelidir.

Adım 7. Önerinin Uygulanması ve İzlenmesi

Eğer karar verici sunulan öneriden memnun kalırsa, analistin son görevi karar vericinin öneriyi uygulamasına yardımcı olmaktır: Seçeneğin kullanılarak sorunun çözümüne nezaret etmeli ve özellikle çevre koşulları değiştikçe amaçları karşılamaya yönelik dinamik güncellemeler yaparak uygulamayı izlemelidir.

1.3 YÖNEYLEM ARAŞTIRMASININ TARİHÇESİ

Yöneylem Araştırması göreceli olarak yeni bir bilim dalıdır. 1930'lu yılların sonunda YA ilk olarak Birleşik Krallık'ta kullanıldı.

1936 yılının başında İngiliz Hava Bakanlığı; doğu kıyısında, Felixstowe yakınlarında, Suffolk'da Bawdsey Araştırma İstasyonu'nu kurdu. Söz konusu yer hava kuvvetleri savaş öncesi radar çalışmalarının yapıldığı merkezdi. Yine 1936 yılında Kraliyet Hava Kuvvetleri (RAF) içinde Britanya hava savunması için özel bir birlik oluşturuldu. Radarın kullanılmaya başlaması beraberinde bazı sorunlar da getirdi: Uçakların rotası ve kontrolu gibi elde edilen bilginin doğru ve etkin bir şekilde kullanılması gibi. 1936 yılının sonunda, Kent'deki Biggin Hill'de kurulan bir grup elde edilen radar bilgisi ile diğer uçak ile ilgili yer bilgilerinin bütünleştirilmesini hedefleyen çalışmalar yaptı. Söz konusu çalışmalar YA'nın başlangıcı olarak kabul edilebilir.

1937 yılında Bawdsey Araştırma İstasyonu deneysel çalışmaları pratiğe çevirdi ve Radar İstasyonu olarak çalışmaya başladı. Radardan elde edilen bilgiler bütünleştirilerek genel hava savunma ve kontrol sistemi oluşturuldu. Temmuz 1938'de kıyı boyunca dört yeni radar istasyonu daha kuruldu. Bu durumda da farklı istasyonlardan elde edilen ve genelde birbirleri ile çelişen bilginin doğrulanması ve eşgüdümü sorunu ortaya çıktı.

Sorunun çözümü için ve yapılan işlerin etkinliğinin ölçülmesi amacıyla Bawdsey Araştırma İstasyonu'nda A.P. Rowe başkanlığında bir bilimsel grup oluşturuldu. Söz konusu askeri operasyonların araştırılması (Research into Military Operations) işlemine "Operational Research" denildi. Genişleyen çalışma grubu, 1939 yazında, Stanmore Araştırma İstasyonu'nu merkez olarak kullanmaya başladı.

Savaş sırasında Stanmore Araştırma Merkezi, Fransa'daki Alman güçlerine karşı istenen ek uçak kuvvetlerinin uygun olup olmadığını YA teknikleri kullanarak değerlendirdi ve uygun olmadığını gösteren grafiklerle o zamanki başbakan Winston Churchill'e bir sunum yaptı ve sonuçta bölgeye ek kuvvet gönderilmeyerek hava kuvvetlerinin gücünün azalması engellendi. 1941 yılında Yöneylem Araştırması Bölümü (Operational Research Section - ORS) kuruldu ve savaş bitimine kadar söz konusu grup çalışmalar yaptı.

1941 yılında kurulan Blackett önderliğindeki bu gruba yedi ayrı bilim dalından onbir bilim adamı katılmıştı: üç fizyolog, bir fizikçi, iki matematikçi, bir astrofizikçi, iki fizik matematikçisi, bir subay, bir mühendis. Savaştan sonra YA çalışmaları özellikle ABD'de askeriye dışındaki alanlarda da hızlandı

Türkiye'de ise ilk YA çalışmaları, 1 Haziran 1956'da, Alb. Fuat Uluğ'un çabaları ile Genel Kurmay'da oluşturulan yedek subaylardan oluşan Harekat Araştırması grubu ile başladı. Seferberlik ve hava savunma konularında yurtdışından alınan destek ile araştırmalar yapıldı. Ülkemizde ilk YA dersi de İTÜ Makine Fakültesinde 1960-61 ders yılında Prof. Dr. İlhami Karayalçın tarafından verildi. 1966 yılında Harekat Araştırması ismi Yöneylem Araştırması olarak değiştirildi.

2. TEMEL YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI KAVRAMLARI

“Yöneylem araştırması, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi (optimum) çözümü bulmak için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanmasıdır.”
Bir eniyileme (optimizasyon) modeli verilen kısıtları sağlayan karar değişkenlerinin tüm değerleri arasında amaç fonksiyonunu eniyileyen (enbüyükleyen veya enküçükleyen) değerleri bulmayı hedefler

Örnek

Two Mines Şirketi özel bir cevher çıkardığı iki adet maden ocağına sahiptir. Ocaklarda üretilen cevher üç sınıfa ayrılır: yüksek, orta, düşük kaliteli. Şirket bir fabrikaya haftalık olarak 12 ton yüksek, 8 ton orta ve 24 ton düşük kaliteli cevher sağlamak üzere anlaşmıştır. Söz konusu iki maden ocağı (X ve Y) ayrıntıları aşağıda verilen farklı işletim özelliklerine sahiptir.

Maden	Maliyet (£'000 / gün)	Üretim (ton/gün)		
		Yüksek	Orta	Düşük
X	180	6	3	4
Y	160	1	1	6

Anlaşmayı gerçekleştirmek için hafta sonu üretim yapılmayan maden ocakları haftada kaç gün işletilmelidir?

Tahmin

Two Mines örneğini incelemek için çok basit bir şekilde yargımızı kullanarak madenlerin haftada kaç gün çalışacağına yönelik olarak fikir yürüterek tahmin yapabiliriz.

- haftada bir gün X madenini, bir gün Y madenini işletme

Bu çözüm önerisi iyi bir sonuç vermeyecek gibi gözükmektedir. Sadece 7 ton yüksek kaliteli cevher üretilecek bu durumda da 12 tonluk müşteri gereksinimi karşılanamayacaktır. Böyle bir çözüme "olurlu (uygun) olmayan" (infeasible) çözüm denilir.

- haftada 4 gün X madenini, 3 gün Y madenini işletme

Bu durumda tüm müşteri gereksinimleri karşılanabilmektedir. Böyle bir çözüme de "olurlu" (feasible) çözüm denilir. Fakat söz konusu çözüm önerisi çok pahalıdır.

Anlaşmayı en küçük maliyetle sağlayacak çözümü isteriz. Tahmin ederek yeni çözümler bulsak bile bulduğumuz çözümün en küçük maliyetli olup olmadığını bilemeyiz. Yapısal bir yaklaşım ile en iyi çözümü bulabiliriz.

Çözüm

Yapmamız gereken Two Mines örneğini sözel olarak ifade edip, söz konusu ifadeyi matematiksel bir tanıma çevirmektir.

Bu tipte sorunları çözmeye uğraşırken öncelikle aşağıdaki kavramları belirlemeliyiz:

- değişkenler (variables)
- kısıtlar (constraints)
- amaç (objective)

Bu belirleme sürecine "formülasyon" ya da daha resmi bir şekilde sorunun matematiksel modelinin formülasyonu denilir.

Değişkenler

Bunlar verilmesi gereken kararları veya bilinmeyenleri temsil eder. İncelenen sorunda iki adet karar değişkeni (decision variable) vardır:

x = Bir haftada X maden ocağının işletileceği gün sayısı

y = Bir haftada Y maden ocağının işletileceği gün sayısı

Doğal olarak $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ olacaktır

Kısıtlar

Kısıt, soruna özgü durumların getirdiği sınırlamalardır. Kısıt belirlemenin en iyi yolu önce sınırlayıcı durumları sözel olarak ifade edip daha sonra değişkenleri kullanıp matematiksel biçimde yazmaktır:

Cevher üretim kısıtı – üretilen cevher ile müşteri gereksiniminin dengelenmesi

Cevher çeşitleri

Yüksek	$6x + 1y \geq 12$
Orta	$3x + 1y \geq 8$
Düşük	$4x + 6y \geq 24$

Kısıtlarda eşitlik yerine eşitsizlik kullanıldığına dikkat ediniz. Bu durumda gereksinim duyulandan daha fazla cevher üretebiliriz. Eşitsizlik kullanma "en iyileme" (optimization) sorunlarındaki kısıtlarda esneklik sağlar.

Haftalık gün kısıtı - Haftada belirli bir günden fazla çalışılamaz. Örneğin haftada 5 gün çalışılırsa

$x \leq 5$

$y \leq 5$

Haftalık gün sayısı gibi kısıtlar genellikle saklı (implicit) kısıtlar olarak isimlendirilir çünkü bu kısıtlar değişkenlerin tanımlanmasında saklıdır

Amaç

Şirketin amacı toplam maliyeti ($180x + 160y$) en az seviyede tutarak müşteri gereksinimlerini karşılamaktır.

Ele alınan sorunda tüm olası olurlu çözümlerden amaç fonskiyonu değerini enküçükleyen karar değişkeni değerlerini barındıran çözüm en iyi çözümdür.

Sorunun amacının kar enbüyüklemesi olması durumunda en iyi çözüm amaç fonksiyonu değerini en büyük yapan değer olacaktır.

Genel olarak, tüm olası olurlu çözümlerden amaç fonksiyonu değerini en iyi hale getiren karar değişkeni değerlerini barındıran çözüme "en iyi" (optimum) çözüm denilir.

Sonuç olarak tüm kavramları bir arada yazarak ***tam matematiksel modeli*** aşağıdaki gibi yazabiliriz:

enküçükle (minimize)

$180x + 160y$

öyle ki (subject to)

$6x + y \geq 12$

$3x + y \geq 8$

$4x + 6y \geq 24$

$x \leq 5$

$y \leq 5$

$x,y \geq 0$

Yukarıda verilen matematiksel model aşağıdaki biçimdedir:

- tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))

- amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir (örneğin 24, 0, $4x$, $6y$ doğrusal terimlerdir fakat xy, x^2 doğrusal değildir).

Yukarıdaki üç koşulu sağlayan herhangi bir formülasyon bir "Doğrusal Program"dır (DP; linear program - LP).

Bir sorunu DP ile incelediğimizde yukarıdaki koşullara uymak için bazı varsayımlar yaparız. Ele aldığımız örnekte haftalık çalışma gün sayısının kesirli olabileceği (tam sayı olmak zorunda olmaması) gibi. Aslında bu tip sorunları çözmek için "Tam sayılı programlama (TP)" (*integer programming*- IP) teknikleri de kullanılabilir.

Matematiksel model (formülasyon) kurulduktan sonra algoritma adı verilen sayısal bir çözüm tekniği kullanılarak amaç fonksiyonunun "en iyi" (optimum) değerini verecek (enbüyükleme sorunlarında en büyük, enküçüklemede en küçük) ve tüm kısıtları sağlayacak şekilde karar değişkeni değerleri bulunur.

"YA, gerçek hayat sistemlerinin matematiksel modellerle temsil edilmesi ve en iyi çözümü bulmak için kurulan modellere sayısal yöntemler (algoritmalar) uygulanmasıdır."

3. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE MODELLEME

Two Mines örneği incelenirse, bir matematiksel modelin bir "Doğrusal Program" (DP; linear program - LP) olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiği görülür:

- Tüm değişkenler süreklidir (continuous)
- Tek bir amaç vardır (enbüyükleme (maximize) veya enküçükleme (minimize))
- Amaç ve kısıt fonksiyonları doğrusaldır. Fonksiyondaki her terim ya sabit sayıdır ya da bir sabitle çarpılmış değişkendir

DP'ler önemlidir çünkü:

- çok sayıda sorun DP olarak formüle edilebilir
- "Simpleks algoritması" kullanılarak DP'ler çözülebilir ve en iyi çözüm bulunabilir

DP'lerin temel uygulama alanlarına aşağıda çeşitli örnekler verilmiştir:

- Üretim planlama
- Rafineri yönetimi
- Karışım
- Dağıtım
- Finansal ve ekonomik planlama
- İşgücü planlaması
- Tarımsal planlama
- Gıda planlama

DP'ler için dört temel varsayım söz konusudur:

- Oransallık
    - Her karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır (Dört asker üretmenin amaç fonksiyonuna (kâra) katkısı (4×\$3=\$12) bir askerin amaç fonkisyonuna katkısının (\$3) tam olarak dört katıdır.)
    - Her karar değişkeninin kısıtların sol tarafına katkısı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır. (Üç asker üretmek gerekli cilalama zamanı (2 saat × 3 = 6 saat) tam olarak bir asker üretmek için gerekli cilalama zamanının (2 saat) üç katıdır.)
- Toplanabilirlik
    - Herhangi bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır. (Trenin (x_2) değeri ne olursa olsun, asker (x_1) üretmek her zaman amaç fonksiyonuna $3x_1$ dolar katkı yapacaktır.)

- Herhangi bir karar değişkeninin kısıt sol tarafına katkısı diğer karar değişkenlerinin değerlerinden bağımsızdır. (x_1'in değeri ne olursa olsun, x_2 üretimi x_2 saat cilalama ve x_2 saat marangozluk gerektirir.)

  Sonuç 1: Amaç fonksiyonu değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

  Sonuç 2: Her bir kısıtın sol taraf değeri her bir karar değişkeninin katkısının toplamına eşittir.

- Bölünebilirlik

Karar değişkenleri tam sayı olmayan değerler alabilir. Eğer tam sayı değerler kullanmak şartsa TP kullanılmalıdır. (1.69 tren üretmek kabul edilebilir.)

- Kesinlik

Her parametre kesin olarak bilinmektedir.

3.1 DP ÖRNEKLERİ

3.1.1 Giapetto Örneği

(Winston 3.1., s. 49)

Giapetto tahtadan oyuncak asker ve tren yapmaktadır. Satış fiyatları, bir oyuncak asker için $27, bir oyuncak tren için $21'dır. Bir asker için $10'lık hammadde ve $14'lık işçilik kullanılmaktadır. Bir tren için ise söz konusu rakamlar sırasıyla $9 ve $10'dır. Her bir asker için 2 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekirken, her bir tren için 1 saat cilalama ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır, fakat haftada en çok 100 saat cilalama ve 80 saat marangozluk kullanabilen Giapetto'nun haftada en fazla 40 oyuncak asker satabileceğini göz önünde bulundurarak karını enbüyüklemek için hangi oyuncaktan haftada kaç adet üretmesi gerektiğini bulunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri tam olarak verilmesi gereken (bu sorunda Giapetto tarafından) kararları tanımlamalıdır. Giapetto bir haftada kaç oyuncak asker ve tren yapacağına karar vermelidir. Bu karara göre aşağıdaki karar değişkenleri tanımlanabilir:

x_1 = bir haftada üretilen asker sayısı

x_2 = bir haftada üretilen tren sayısı

Amaç fonksiyonu karar değişkenlerinin bir fonksiyonudur. Gelir veya karını enbüyüklemek ya da maliyetini enküçüklemek isteyen karar vericinin amacını yansıtır. Giapetto haftalık karını (z) enbüyüklemek isteyecektir.

Bu sorunda kar

(haftalık gelir) – (hammadde satınalma maliyeti) – (diğer değişken maliyetler)

olarak formüle edilebilir. Bu durumda Giapetto'nun amaç fonksiyonu:

Enbüyükle $z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlar karar değişkenlerinin alabileceği değerler üzerindeki, sınırlamaları gösterir. Herhangi bir sınırlama olmazsa Giapetto çok fazla sayıda oyuncak üreterek çok büyük kar elde edebilir. Fakat gerçek hayatta olduğu gibi burada da kısıtlar vardır

Haftalık kullanılabilen cilalama zamanı

Haftalık kullanılabilen marangozluk zamanı

Askerler için haftalık talep

İşaret sınırlamaları da eğer karar değişkenleri salt negatif olmayan değerler alıyorsa kullanılmalıdır (Giapetto negatif sayıda asker veya tren üretemez!).

Yukarıdaki tüm bu özellikler aşağıdaki ***Doğrusal Programlama*** (DP; Linear Programming - LP) modelini verir:

Maks $z = 3x_1 + 2x_2$		(Amaç fonksiyonu)
s.t.	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Cilalama kısıtı)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Marangozluk kısıtı)
	$x_1 \leq 40$	(Talep kısıtı)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(İşaret sınırlamaları)

Eğer (x_1,x_2)'nin bir değeri (bir çözüm) tüm bu kısıtları ve işaret sınırlamalarını sağlarsa, söz konusu çözüm ***olurlu bölge***dedir (feasible region).

Grafik olarak ya da hesaplayarak sorun çözüldüğünde olurlu bölgedeki çözümlerden amaç fonksiyon değeri en yüksek olan çözümün $(x_1,x_2) = (20,60)$ olduğunu ve z=180 değerini verdiğini buluruz. Bu çözüm ***en iyi çözüm***dür (optimal solution).

Rapor

Haftada 20 asker ve 60 tren üretilmesi durumunda kar $180 olacaktır. Kar miktarları, eldeki işçilik ve talebe göre elde edilebilecek en büyük kar budur. Daha fazla işçilik bulunursa kar çoğalabilir.

3.1.2 Reklam Örneği

(Winston 3.2, s. 61)

Dorian şirketi, yüksek gelirli müşterileri için otomobil ve jeep üretmektedir. Televizyondaki tiyatro oyunlarına ve futbol maçlarına bir dakikalık spot reklamlar vererek satışlarını arttırmayı hedeflemektedir. Tiyatro oyununa verilen reklamın maliyeti $50bin'dir ve hedef kitledeki 7 milyon kadın ve 2 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Futbol maçına verilen reklamın maliyeti ise $100bin'dir ve hedef kitledeki 2 milyon kadın ve 12 milyon erkek tarafından seyredilebilir. Dorian yüksek gelirli 28 milyon kadın ve 24 milyon erkeğe en az maliyetle nasıl ulaşır?

Yanıt

Karar değişkenleri aşağıdaki gibi belirlenebilir:

x_1 = tiyatro oyununa verilen reklam sayısı

x_2 = futbol maçına verilen reklam sayısı

Sorunun modeli:

$$
\begin{aligned}
&\min z = 50x_1 + 100x_2 \\
&\text{öyle ki} \quad 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\
&\qquad\qquad 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Grafik çözüm yapılırsa (x_1,x_2) = (3.6,1.4) değerleri için amaç fonksiyonunun en iyi değeri z = 320 olarak bulunur.

Grafiğe bakılarak en iyi tamsayılı çözüm (x_1,x_2) = (4, 2) olarak bulunabilir.

Rapor

Hedeflenen kitleye ulaşmak için en az maliyetli çözüm 4 adet reklamı tiyatro oyununda ve 2 adet reklamı futbol maçında kullanmak gerekir. Bu durumda Dorian $400bin reklam masrafı yapacaktır.

3.1.3 Beslenme Örneği

(Winston 3.4., s. 70)

Bayan Fidan dört "temel gıda grubu" ile beslenmektedir: kek, çikolatalı dondurma, kola, ananaslı pasta. Bir adet kek $0.5'a, bir kaşık dondurma $0.2'a, bir şişe kola $0.3'a ve bir dilim pasta $0.8'a satılmaktadır. Her gün en az 500 kalori, 6 oz. çikolata, 10 oz. şeker ve 8 oz. yağ alması gereken Bayan Fidan en az maliyetle bu gereksinimlerini nasıl karşılar? Aşağıdaki tabloyu kullanarak bir DP modeli kurup sorunu çözünüz.

	Kalori	Çikolata (ounce)	Şeker (ounce)	Yağ (ounce)
Kek (1 adet)	400	3	2	2
Çikolatalı dondurma (1 kaşık)	200	2	2	4
Kola (1 şişe)	150	0	4	1
Ananaslı pasta (1 dilim)	500	0	4	5

Yanıt

Karar değişkenleri:

x_1: günlük yenilecek kek sayısı

x_2: günlük yenilecek kaşık dondurma sayısı

x_3: günlük içilecek şişe kola sayısı

x_4: günlük yenilecek dilim pasta sayısı

şeklinde belirlenebilir.

Bu durumda amaç fonksiyonu (cent cinsinden toplam günlük maliyet):

$$\min w = 50\,x_1 + 20\,x_2 + 30\,x_3 + 80\,x_4$$

Kısıtlar:

$400\,x_1 + 200\,x_2 + 150\,x_3 + 500\,x_4 \geq 500$ (günlük kalori)

$3\,x_1 + 2\,x_2 \geq 6$ (günlük çikolata)

$2\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 4\,x_4 \geq 10$ (günlük şeker)

$2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 5\,x_4 \geq 8$ (günlük yağ)

$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4$ (işaret sınırlamaları!)

Rapor

Bayan Fidan günde 3 kaşık dondurma yiyip 1 şişe kola içerek tüm besin gereksinimlerini karşılayabilir ve sadece 90 cent harcar (w=90, x_2=3, x_3=1).

3.1.4 Postane Örneği

(Winston 3.5., s. 74)

Bir postanede haftanın her günü farklı sayıda elemana gereksinim duymaktadır. Sendika kurallarına göre bir eleman 5 gün peş peşe çalışmakta diğer iki gün izin yapmaktadır. Çalıştırılması gereken toplam en az eleman sayısını aşağıdaki iş yüküne göre hesaplayınız.

	Pzt	Sal	Çar	Per	Cum	Cmt	Paz
Gerekli eleman	17	13	15	19	14	16	11

Yanıt

Karar değişkenleri x_t (*t*. gün çalışmaya başlayan eleman sayısı) olsun

Matematiksel olarak DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min z = & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & & \\
& x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 17 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 13 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq & 15 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq & 19 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq & 14 \\
& & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq & 16 \\
& & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & 11
\end{array}
$$

$x_t \geq 0, \forall t$

Rapor

(x_t) = (4/3,10/3,2,22/3,0,10/3,5), z = 67/3 şeklindedir.

Karar değişkeni değerleri yakın tamsayılara yuvarlanırsa (x_t) = (2,4,2,8,0,4,5), z=25 çözümü bulunur (yanlış olabilir!).

Elde edilen Tamsayılı Lindo çözümüne göre ise amaç fonksiyonun en iyi değeri z=23'dür ve (x_t) = (4,4,2,6,0,4,3) şeklindedir.

3.1.5 Sailco Örneği

(Winston 3.10., s. 99)

Sailco şirketi gelecek dört mevsimde kaç adet yelkenli üreteceğine karar verecektir. Talep sırasıyla 40, 60, 75 ve 25 yelkenlidir. Sailco tüm talepleri zamanında karşılamalıdır. Başlangıçta Sailco'nun envanterinde 10 yelkenli vardır. Normal mesai ile bir mevsimde 40 yelkenli üretebilen şirket yelkenli başına $400 işçilik maliyetine maruz kalmaktadır. Fazla mesai ile yapılan her ek yelkenli için ise işçilik maliyeti $450'dır. Herhangi bir mevsimde yapılan yelkenli ya talebi karşılamak için kullanılıp satılır ya da envantere konulur. Bir yelkenlinin bir mevsim envanterde tutulması durumunda ise $20 envanter taşıma maliyeti oluşmaktadır.

Yanıt

t = 1,2,3,4 için karar değişkenleri

x_t = t. mevsimde normal mesai ile üretilen yelkenli sayısı

y_t = t. mevsimde fazla mesai ile üretilen yelkenli sayısı

Envanter hesaplarının yapılabilmesi için kullanılacak değişkenler:

i_t = t. mevsimin sonunda envanterdeki yelkenli sayısı

d_t = t. dönem için yelkenli talebi

Veri d_1=40, d_2=60, d_3=75, d_4=25, i_0=10; $x_t \leq 40, \forall t$

Mantıksal olarak $i_t = i_{t-1} + x_t + y_t - d_t,\ \forall t.$

Talep karşılanmalı $i_t \geq 0,\ \forall t$

(İşaret sınırlamaları $x_t, y_t \geq 0,\ \forall t$)

Bu kısıt kümelerini kullanarak toplam maliyet z'yi enküçüklemeliyiz:

$$z = 400(x_1+x_2+x_3+x_4) + 450(y_1+y_2+y_3+y_4) + 20(i_1+i_2+i_3+i_4)$$

Rapor

Lindo en iyi çözümü $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (40, 40, 40, 25)$, $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 10, 35, 0)$ ve toplam maliyet = \$78450.00 olarak verir. Üretim çizelgesi:

		M1	**M2**	**M3**	**M4**
Normal mesai (x_t)		40	40	40	25
Fazla mesai (y_t)		0	10	35	0
Envanter (i_t)	10	10	0	0	0
Talep (d_t)		40	60	75	25

3.1.6 Müşteri Hizmet Düzeyi Örneği

(Winston 3.12, s. 108)

Bir bilgisayar şirketinde müşteri hizmetleri için deneyimli uzmana olan talep (adamsaat/ay) aşağıdaki gibidir:

t	**Ocak**	**Şubat**	**Mart**	**Nisan**	**Mayıs**
d_t	6000	7000	8000	9500	11000

Ocak ayı başında şirkette 50 deneyimli uzman vardır. Her uzman ayda 160 saat çalışabilir. Yeni bir uzmanı yetiştirmek için deneyimli uzmanlar 50 saat ayırmaktadır ve söz konusu uzmanın eğitimi bir ayda tamamlanmaktadır. Her deneyimli uzmana ayda \$2000, her yeni uzmana ise ayda \$1000 ödenmektedir. Her ay deneyimli uzmanların %5'i işten ayrılmaktadır. Şirket hem hizmet talebini karşılamak istemekte hem de maliyetleri enazlamak istemektedir. Sorunu çözmek için DP modeli kurunuz.

Yanıt

Karar değişkenleri:

$x_t = t$ ayında eğitilecek uzman sayısı

İşlem yapabilmek için kullanılan diğer değişkenler ise

$y_t = t$. ayın başında şirketteki deneyimli uzman sayısı

$d_t = t$. ayın hizmet talebi

Bu durumda

min $z = 2000(y_1+\ldots+y_5)+1000(x_1+\ldots+x_5)$

öyle ki

$160y_t - 50x_t \geq d_t$ $\quad t = 1,...5$ için,

$y_1 = 50$

$y_t = .95y_{t-1} + x_{t-1}$ $\quad t = 2,3,4,5$ için.

$x_t, y_t \geq 0$

3.1.7 Petrol Karışımı Örneği

(Winston 3.8'den esinlenilmiştir)

Sunco oktan dereceleri ve sülfür oranları farklı üç tip ham petrolün (H1, H2, H3) karıştırılması ile üç tip benzin (B1, B2, B3) üretmektedir. Benzinlerin oktan dereceleri ve sülfür oranları belli standartları sağlamalıdır:

- B1 için ortalama oktan derecesi en az 10, sülfür oranı en fazla %2 olmalıdır,
- B2 için ortalama oktan derecesi en az 8, sülfür oranı en fazla %4 olmalıdır,
- B3 için ortalama oktan derecesi en az 6, sülfür oranı en fazla %3 olmalıdır.

Firmanın her benzin tipi için en fazla satabileceği talepler sırasıyla 3000, 2000 ve 1000 varildir. Bununla birlikte firma reklam yaparak talebini arttırabilmektedir. Herhangi bir benzinde 1 dolarlık reklam, talebi 10 varil arttırmaktadır. Hammaddelerin oktan dereceleri, sülfür oranları ve alış fiyatları ile benzinlerin satış fiyatları aşağıda verilen tablolardaki gibi ise Sunco'nun kârını enbüyükleyecek DP'yi kurunuz.

Ham petrol	Oktan	Sülfür (%)	Alış fiyatı ($/varil)
1	12	1	45
2	6	3	35
3	8	5	25

Benzin	Satış fiyatı ($/varil)
1	70
2	60
3	50

Yanıt

<u>Karar değişkenleri</u>

x_{ij} : *i*. hammaddeden *j*. benzine konulan miktar (varil), $i = 1,2,3$; $j=1,2,3$.

r_j : *j*. benzin için yapılan reklam ($), $j=1,2,3$.

<u>Amaç fonksiyonu</u> (karı enbüyüklemek)

Maks Z = Kar = gelir – maliyet

Maks Z = $\left(70\sum_i x_{i1} + 60\sum_i x_{i2} + 50\sum_i x_{i3}\right) - \left(45\sum_j x_{1j} + 35\sum_j x_{2j} + 25\sum_j x_{3j}\right) - \sum_j r_j$

<u>Kısıtlar</u>

Oktan derecesi

$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10\,(x_{11} + x_{21} + x_{31})$ $\quad$ benzin 1 oktan derecesi

$12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32} \geq 8(x_{12} + x_{22} + x_{32})$ $\quad$ benzin 2 oktan derecesi

$12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33} \geq 6\,(x_{13} + x_{23} + x_{33})$ benzin 3 oktan derecesi

Sülfür oranları

$(.01x_{11} + .03x_{21} + .05x_{31})/(x_{11} + x_{21} + x_{31}) \leq .02$ →

$x_{11} + 3x_{21} + 5x_{31} \leq 2\,(x_{11} + x_{21} + x_{31})$ benzin 1 sülfür oranı

$x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} \leq 4\,(x_{12} + x_{22} + x_{32})$ benzin 2 sülfür oranı

$x_{13} + 3x_{23} + 5x_{33} \leq 2\,(x_{13} + x_{23} + x_{33})$ benzin 3 sülfür oranı

Talepler

$\sum_i x_{ij} \leq T_j + 10r_j \quad \forall j.$ (T_j : *j*. benzinin reklamsız talebi)

İşaret sınırlamaları

x_{ij} , $r_j \geq 0$, $\forall i,j$.

3.2 MUTLAK DEĞERLİ İFADELERİN DP'YE EKLENMESİ

3.2.1 Dönüşüm

Bir modelde bir fonksiyonun mutlak değeri kullanılıyorsa, bu doğrusal olmayan bir yapı oluşturur. Bir $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ fonksiyonun mutlak değerini $| f(x_1, x_2,\ldots, x_n)|$, DP'ye ekleyebilmek için bir yapay değişken (λ) tanımlayarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \geq f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

$\lambda \geq - f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

Modelde amaç fonksiyonu ve/veya kısıtlarda $|f(x_1, x_2,\ldots, x_n)|$ yerine λ yazılır. Bu şekilde bir modellemenin çalışabilmesi için modelin λ'yı küçükleme eğiminde olası gerekir. Aksi taktirde yukarıdaki ifadeler ile λ üstten sınırlandırmadığı için istenen mutlak değer hesabı yapılamaz.

Benzer yaklaşım Min-Maks ve Maks-Min ifadelerinin DP'ye eklenmesinde de kullanılabilir. { Min (Maks [$f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}),\ldots, f_k(\boldsymbol{x})$]) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \geq f_1(\boldsymbol{x})$, $\lambda \geq f_2(\boldsymbol{x})$, …. , $\lambda \geq f_k(\boldsymbol{x})$

{ Maks (Min [$f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}),\ldots, f_k(\boldsymbol{x})$]) } ifadesini DP'ye eklemek için bir yapay değişken (λ) tanımlanarak modele aşağıdaki kısıtlar eklenir:

$\lambda \leq f_1(\boldsymbol{x})$, $\lambda \leq f_2(\boldsymbol{x})$, …. , $\lambda \leq f_k(\boldsymbol{x})$

3.2.2 Makine Yeri Belirleme Örneği

(Bazaraa, 2010; s.30.)

Dört makine bulunan bir üretim alanına yeni bir makinenin koyulacağı yer belirlenmek istenmektedir. Mevcut makinelerin koordinatları şöyledir. $\binom{3}{1}, \binom{0}{-3}, \binom{-2}{2}, \binom{1}{4}$. Yeni makinenin koordinatları: $\binom{x_1}{x_2}$ olacaktır. Yeni makine ile diğer makineler arasındaki mesafeyi en küçükleyecek koordinatı bulmak için bir DP kurunuz. Makineler arası mesafeyi Manhattan uzaklığı ile belirlenecektir. Örnek: $\binom{x_1}{x_2}$ ile $\binom{3}{1}$ arasındaki mesafe: $|x_1 - 3| + |x_2 - 1|$.

Yanıt

Karar değişkenleri

x_1 ve x_2, yeni makinenin koordinatları

λ_{ij} : yeni makine ile *i*. mevcut makine arasındaki *j*. koordinata göre mesafesi, i = 1,2,3,4; j = 1,2.

Amaç fonksiyonu

Min $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}$

Kısıtlar (*Uzaklık hesaplama)*

$\lambda_{ij} \geq k_{ij} - x_j, \quad \lambda_{ij} \geq -k_{ij} + x_j \quad \forall i, j.$ k_{ij}: *i*. makinenin *j*. koordinatı

Örneğin; i =1 ve j=1,2 için;

$\lambda_{11} \geq 3 - x_1 \qquad \lambda_{11} \geq -3 + x_1$

$\lambda_{12} \geq 1 - x_2 \qquad \lambda_{12} \geq -1 + x_2$

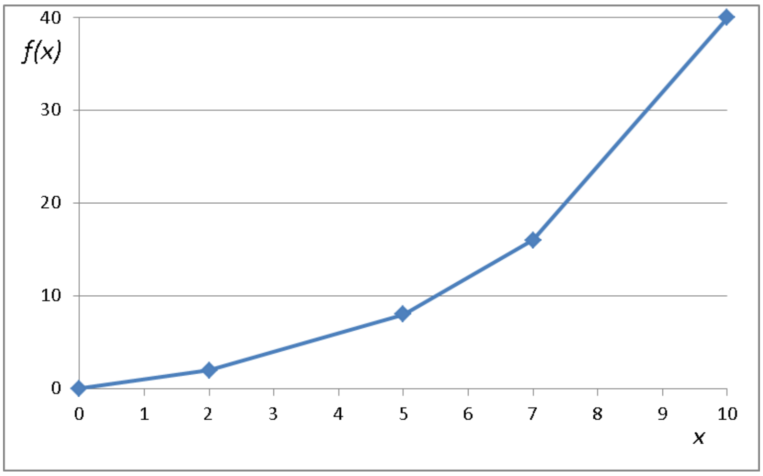
İşaret sınırlamaları

x_1, x_2 serbest; $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i,j$.

3.3 PARÇALI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

3.3.1 Parçalı doğrusal Konveks fonksiyonların DP'ye eklenmesi

Bir parçalı doğrusal fonksiyon birden çok doğru parçasından oluşur. Örneğin aşağıdaki şekilde fonksiyon dört doğru parçasının birleşiminden oluşmaktadır.



Şekilde ifade edilen fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 2 \\ 2 + 2(x-2) & 2 \leq x < 5 \\ 8 + 4(x-5) & 5 \leq x < 7 \\ 16 + 8(x-7) & 7 \leq x < 10 \end{cases}$$

Fonksiyonun eğiminin değiştiği noktalara kesme noktası denir. Şekilde 0, 2, 5, 7 ve 10 kesme noktalarıdır. Eğer *x* değeri arttıkça parçalı fonksiyonların eğimi artıyorsa bu fonksiyon bir parçalı doğrusal konveks fonksiyondur. Bir matematiksel modelin enküçüklenecek amaç fonksiyonu parçalı doğrusal konveks fonksiyon ise bu amacı DP'ye ilave etmek için aşağıdaki iki yöntem kullanılabilir:

$f(x)$ bir parçalı doğrusal konveks fonksiyon; d_1, d_2, … ,d_n kesme noktaları olsun.

Yöntem 1.

Modelde $f(x)$ yerine $\sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i$,

x yerine $\sum_{i=1}^{n-1} y_i$ yazılır,

kısıtlara $y_i \leq d_{i+1} - d_i, i = 1, \ldots, n-1$ ilave edilir.

Burada $y_i, i = 1, \ldots, n-1$ karar değişkenleri,

$c_i, i = 1, \ldots, n-1$ ise *i*'nci parçalı fonksiyonun eğimidir.

Örnekte verilen fonksiyon için DP formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 8y_4$$

$$x = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y_1 \leq 2$$

$$y_2 \leq 3$$

$$y_3 \leq 2$$

$$y_4 \leq 3$$

Yöntem 2.

Modelde $f(x)$ yerine $\sum_{i=1}^{n} z_i f(d_i)$,

x yerine $\sum_{i=1}^{n} z_i d_i$ yazılır,

kısıtlara $\sum_{i=1}^{n} z_i = 1$ ilave edilir.

Burada $z_i, i = 1, \dots, n$ karar değişkenleri,

$f(d_i)$ ise i'nci kesme noktasının fonksiyon değeridir.

Örnekte verilen fonksiyon için DP formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = 0z_1 + 2z_2 + 8z_3 + 16z_4 + 40z_5$$

$$x = 0z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 7z_4 + 10z_5$$

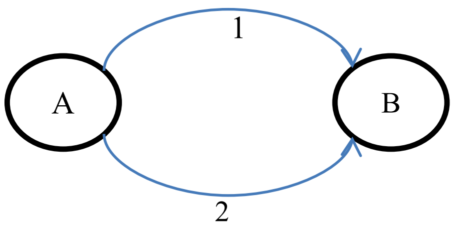
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 1$$

3.3.2 Doğrusal Olmayan Konveks Fonksiyonların Dönüşümü

Doğrusal olmayan konveks amaç fonksiyonları parçalı doğrusal konveks fonksiyona dönüştürülerek DP ile yaklaşık olarak modellenebilir. Bunun için öncelikle doğrusal olmayan fonksiyon n-1 parçaya bölünür ve parçalar arası doğrusal kabul edilerek parçalı fonksiyona dönüştürülür. Elde edilen parçalı fonksiyon yukarda verilen yöntemlerden biri ile DP olarak modellenir.

3.3.3 Petrol Taşıma Örneği

A noktasında bulunan 10.000 varil petrol 1 ve 2 boru hatlarından B noktasına taşınacaktır. Taşıma süresi taşınan petrol miktarına bağlıdır. Birinci borudan taşınan petrol miktarı x_1 bin varil, İkinci borudan taşınan petrol miktarı x_2 bin varil iken birinci borudan taşıma süresi x_1^2 saat; ikinci borudan taşıma süresi ise $x_2^{1,5}$ saat olarak hesaplanabilir. İki borudan aynı anda petrol gönderilmesi durumunda taşıma süresini en küçükleyecek DP modelini kurunuz.



Yanıt

Öncelikle taşıma süresi fonksiyonları parçalı fonksiyona dönüştürülür, x_1 ve x_2, 0 ile 10 arasında değer alacakları için 0-10 aralığı 4 eşit parçaya bölünerek fonksiyonlar parçalanabilir. Aşağıdaki tabloda x'lere karşılık gelen fonksiyon değerleri verilmiştir.

x	$f(x_1)= x_1^2$	$f(x_2)= x_2^{1,5}$
0,0	0,000	0,000
2,5	6,250	3,953
5,0	25,000	11,180
7,5	56,250	20,540
10,0	100,000	31,623

Bu durumda sorunun DP formülasyonu:

Karar değişkenleri

x_i : *i*. borudan taşınan petrol miktarı (*1000 varil),

f_i : *i*. boruda taşıma süresi (saat),

λ : en uzun taşıma süresi (saat)

z_{ij} : parçalı fonksiyonlar için yardımcı değişkenler, i =1,2, j=1,…,5.

Amaç fonksiyonu

Min λ

Kısıtlar

En uzun taşıma süresi borulardan taşıma sürelerinden daha az olmamalı

$\lambda \geq f_1$

$\lambda \geq f_2$

Birinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi (Yöntem 2)

$x_1 = 0z_{11} + 2,5\ z_{12} + 5\ z_{13} + 7,5\ z_{14} + 10\ z_{15}$

$f_1 = 0z_{11} + 6,25\ z_{12} + 25\ z_{13} + 56,25\ z_{14} + 100\ z_{15}$

$z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} = 1$

İkinci boru için parçalı fonksiyonun ifade edilmesi

$x_2 = 0z_{21} + 2,5\ z_{22} + 5\ z_{23} + 7,5\ z_{24} + 10\ z_{25}$

$f_2 = 0z_{21} + 3,953\ z_{22} + 11,18\ z_{23} + 20,54\ z_{24} + 31,623\ z_{25}$

$z_{21} + z_{22} + z_{23} + z_{24} + z_{25}= 1$

Toplam taşınacak miktar 10.000 varil olmalı

$x_1 + x_2 = 10$

İşaret sınırlamaları

tüm değişkenler $\geq$ 0.

Rapor

Verilen DP çözüldüğünde λ = f_1 = f_2 = 15,781; x_1 = 3,771; x_2 = 6,229; olarak bulunmuştur. Çözümde elde edilen x_1 ve x_2 değerlerine göre f_1 ve f_2 'nin gerçek değerleri (doğrusal olmayan x_1^2 ve $x_2^{1,5}$ fonksiyonlarına göre) 14,220 ve 15,546'dır.

Aynı problemin doğrusal olmayan programlama ile çözümü $f_1 = f_2 = 15,112$; $x_1 = 3,887$; $x_2 = 6,113$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi doğrusal olmayan fonksiyonların parçalı fonksiyona dönüştürülmesi ile elde edilen DP sonucu ile doğrusal olmayan programlama çözümü birbirine çok yakındır. DP'nin çözümü doğrusal olmayan programlamaya göre daha kolay olduğu için bu şeklide bir modelleme daha etkin olabilir. Probleme DP ile daha kesin bir çözüm bulabilmek için doğrusal olmayan fonksiyonlar başta daha fazla parçaya bölünebilir.

4. DP’NİN ÇÖZÜMÜ

4.1 DP ÇÖZÜMLERİ: DÖRT DURUM

Bir DP çözüldüğü zaman aşağıdaki dört durumdan biri ile karşılaşılır:

1. DP’nin **bir tek en iyi çözüm**ü vardır.
2. DP’nin **alternatif (çok sayıda) en iyi çözüm**leri vardır. Birden fazla (aslında sonsuz sayıda) en iyi çözüm bulunur.
3. DP **olurlu değildir** (infeasible). Hiç olurlu çözümü yoktur (Olurlu bölgede nokta yoktur).
4. DP **sınırlı değildir** (unbounded). Olurlu bölgedeki noktalar sonsuz büyüklükte amaç fonksiyon değeri vermektedir.

4.2 GRAFİK ÇÖZÜM

Sadece iki değişkenli herhangi bir DP’nin çözümü grafiksel olarak bulunabilir

Örnek 1. Giapetto

(*Winston 3.1, s. 49*)

Giapetto DP’nin sadece iki karar değişkeni olduğundan grafik üzerinde çözüme gidilebilir

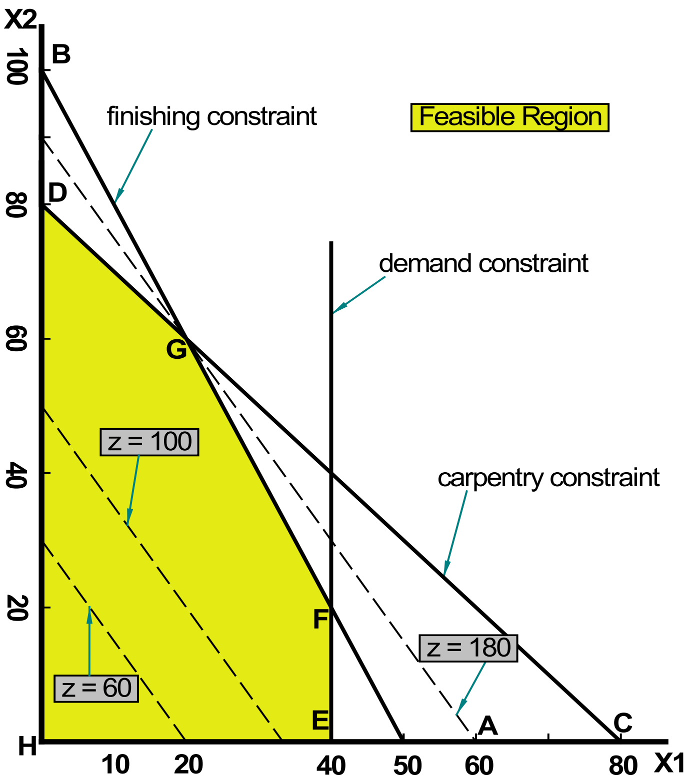
Yanıt

Olurlu bölge tüm kısıtları sağlayan tüm noktaların kümesidir.

maks $z = 3x_1 + 2x_2$

öyle ki	$2x_1 + x_2 \leq 100$	(Cilalama kısıtı)
	$x_1 + x_2 \leq 80$	(Marangozluk kısıtı)
	$x_1 \leq 40$	(Talep kısıtı)
	$x_1, x_2 \geq 0$	(İşaret sınırlamaları)

Aşağıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. DP’yi sağlayan noktalar kümesi DGFEH beşgeni ile sınırlandırılmıştır. Bu beşgen (boyalı bölge) **üzerinde**ki veya **içinde**ki herhangi bir nokta **olurlu bölge**dedir.



DP için olurlu bölgeyi belirledikten sonra en iyi çözüm için araştırma yapılabilir. **En iyi çözüm**, olurlu bölgede *en fazla z* değerini veren noktadır (enbüyükleme sorunu).

En iyi çözümü bulmak için, z değerleri aynı olan bir doğru çizilir. Enbüyükleme sorunu için bu çizgi **eş kar** (isoprofit) doğrusu; enküçükleme sorunu içinse **eş maliyet** (isocost) doğrusu olarak isimlendirilir (*Şekilde z = 60, z = 100 ve z = 180 için eş kar doğruları görülmektedir*).

Bir tek en iyi çözüm varsa, eş kar doğrusu olurlu bölgeyi terk ederken bir köşe (vertex - corner) ile kesişir.

Bu DP için en iyi çözüm $z = 180$ için G noktası $(x_1, x_2) = (20,60)$ şeklindedir.

Karar değişkenlerinin en iyi çözüm değerleri kullanıldığında bir kısıtın sol taraf değeri ile sağ taraf değeri eşitse o kısıt ***aktif*** (sıkı; binding, tight) bir kısıttır.

Karar değişkenlerinin en iyi çözüm değerleri kullanıldığında bir kısıtın sol taraf değeri ile sağ taraf değeri eşit değilse o kısıt ***aktif olmayan*** (nonbinding) bir kısıttır.

Giapetto DP'de cilalama işçiliği ve marangozluk kısıtları aktiftir. Öte yandan talep kısıtı aktif olmayan bir kısıttır çünkü en iyi çözümde $x_1 < 40$ $(x_1 = 20)$.

Örnek 2. Reklam

(*Winston 3.2, s. 61*)

Reklam DP'nin sadece iki karar değişkeni olduğundan grafik üzerinde çözüme gidilebilir

Yanıt

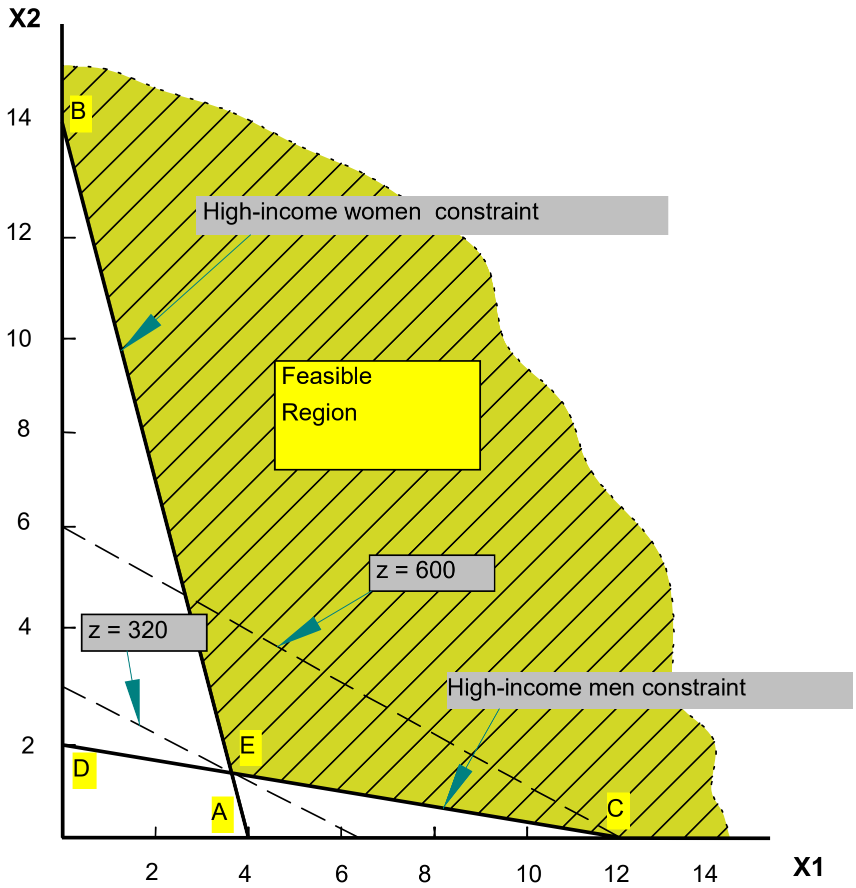
Aşağıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir.

min $z = 50x_1 + 100x_2$

öyle ki $7x_1 + 2x_2 \geq 28$ (yüksek gelirli kadın)

$2x_1 + 12x_2 \geq 24$ (yüksek gelirli erkek)

$x_1, x_2 \geq 0$



Dorian toplam reklam maliyetini enküçüklemek istediği için sorunun en iyi çözümü olurlu bölgede *en az z* değerini veren noktadır.

En az *z* değerli eş maliyet doğrusu E noktasından geçmektedir; bu yüzden en iyi çözüm $x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$ ve $z = 320$ şeklindedir.

Hem yüksek gelirli kadın hem de yüksek gelirli erkek kısıtları sağlandığı için her ikisi de aktif kısıtlardır.

Örnek 3. İki Maden

min $180x + 160y$

öyle ki $6x + y >= 12$

$3x + y >= 8$

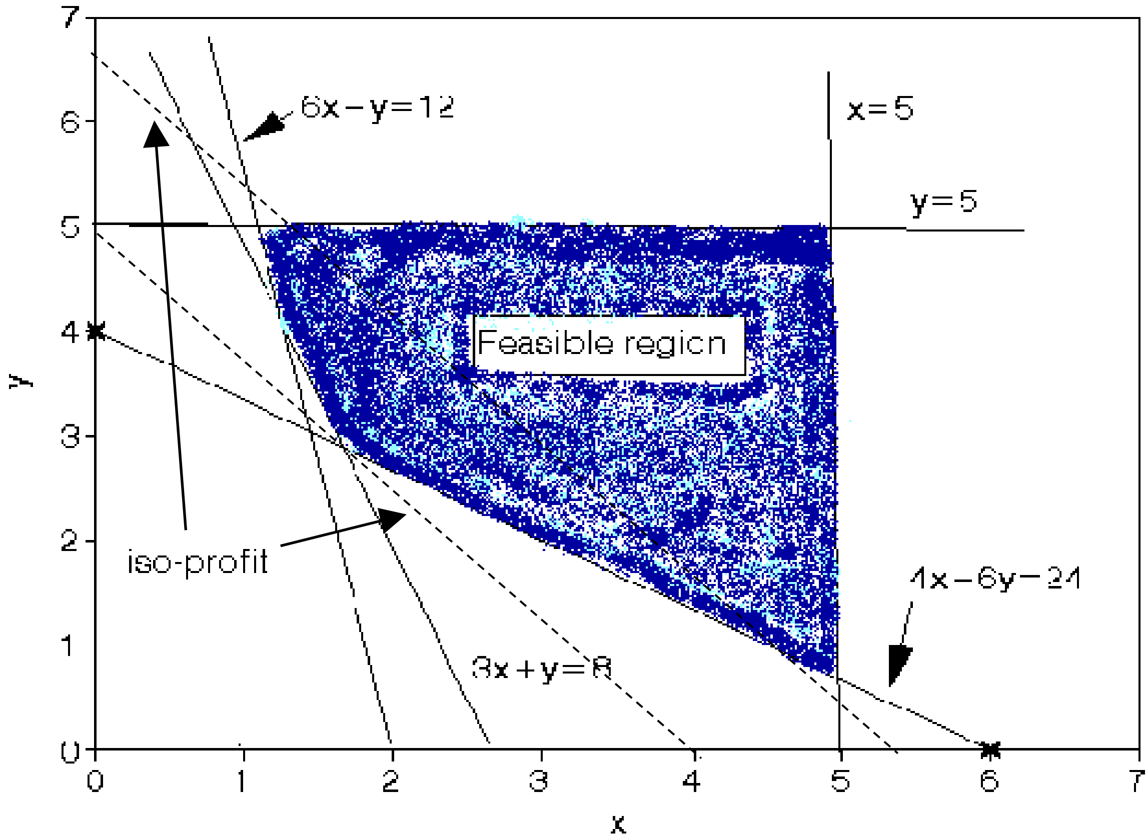
$4x + 6y >= 24$

$x <= 5$

$y <= 5$

$x,y >= 0$

Yanıt



En iyi çözüm için maliyet 765.71'dir. 1.71 gün X madeni ve 2.86 gün Y madeni çalıştırılmalıdır.

Örnek 4. Değiştirilmiş Giapetto

maks $z = 4x_1 + 2x_2$

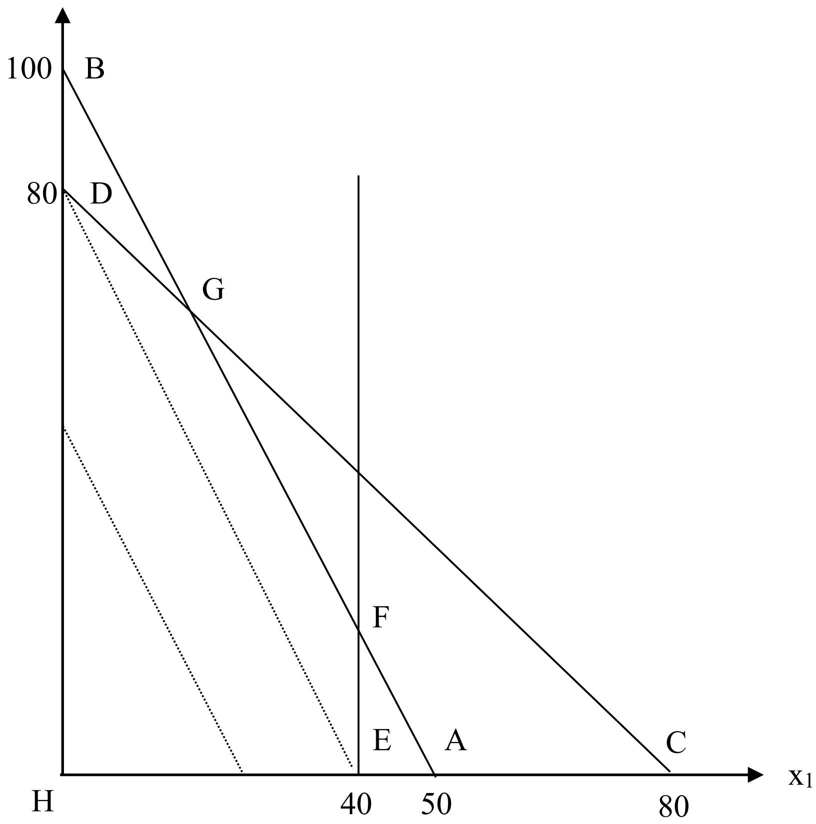
Öyle ki; $2x_1 + x_2 \leq 100$ (Cilalama kısıt)

$x_1 + x_2 \leq 80$ (Marangozluk kısıtı)

$x_1 \leq 40$ (Talep kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$ (İşaret sınırlamaları)

Yanıt



G (20, 60) ve F (40, 20) noktaları arasındaki doğru üzerindeki noktalar **alternatif en iyi çözümleri** verir.

0≤ c ≤1 için

c [20 60] + (1-c) [40 20] = **[40-20*c*, 20+40*c*]**

en iyi çözümdür.

Tüm en iyi çözümler için en iyi amaç fonksiyon değeri 200'dür.

Örnek 5. Değiştirilmiş Giapetto (v. 2)

$x_2 \geq 90$ (Tren talebi) kısıtını ekleyelim.

Yanıt

Olurlu bölge yoktur: **Olurlu olmayan DP**

Örnek 6. Değiştirilmiş Giapetto (v. 3)

Sadece $x_2 \geq 90$ kısıtı olsun.

Yanıt

Eş kar doğrusu olurlu bölgeyi terk edemez: **Sınırlı olmayan DP**

4.3 SİMPLEKS ALGORİTMASI

Tüm DP sorunlarının (ikiden fazla sayıda karar değişkeni olanların da) en iyi çözümü olurlu bölgenin bir köşesindedir. Simpleks algoritması bu gerçeği kullanarak çözüme gider.

Başlangıçta olurlu bölgenin bir köşesi ile işleme başlanır ve eğer söz konusu köşe en iyi çözümü vermezse yeni bir adım (iterasyon) işletilerek amaç fonksiyonunu iyileştiren (veya aynı bırakan) başka bir komşu köşeye geçilir. Bu adımlar en iyi DP çözümü bulununcaya kadar sürer.

DP'leri çözmek için kullanılan simpleks algoritması Dantzig tarafından 1940'lı yılların sonunda geliştirilmiştir. Daha sonra algoritma geliştirilip yeni versiyonları geliştirilmiştir. Bunlardan biri olan "revised simpleks algoritması" DP çözümü için kullanılan bilgisayar paketlerinde kullanılmaktadır.

Adımlar

1. DP’yi standart biçime çeviriniz
2. Bir temel olurlu çözüm (basic feasible solution - bfs) bulunuz
3. Mevcut bfs’nin en iyi çözüm olup olmadığını araştırınız. En iyi ise sorun çözülmüştür, durunuz.
4. Mevcut bfs en iyi çözüm değilse, amaç fonksiyon değerini en çok iyileştirmek için hangi temel dışı değişkenin temel değişken olacağını (çözüme gireceğini) ve hangi temel değişkenin çözümden çıkıp temel dışı değişken olacağını saptayarak yeni bir bfs bulunuz.
5. Adım 3’e dönünüz.

İlgili kavramlar:

- Standart biçim: tüm kısıtlar eşitliktir ve tüm değişkenler negatif olmayan değerler alır
- bfs: tüm değişkenlerin negatif olmayan değerler aldığı bir olurlu çözüm
- Temel dışı değişken: bfs’de değerleri 0’a eşit olan değişkenler
- Temel değişken: bfs’deki diğer değişkenler, standart biçimdeki eşitliklerin çözülmesi ile 0’dan büyük değerler alırlar

Örnek 1. Dakota Mobilya

(Winston 4.3, s. 134)

Dakota mobilya şirketi sıra, masa ve sandalye yapmaktadır. Her ürün için, aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi, sınırlı miktarda kullanılabilen tahta, marangozluk ve cilalama işçiliği gerekmektedir. Aynı tabloda ürünlerin satış fiyatları da verilmiştir. Haftada en fazla 5 masa satılabilmektedir. Haftalık karı enbüyükleyecek bir üretim planı oluşturunuz.

Kaynak	Sıra	Masa	Sandalye	Kullanılabilen.
Tahta (m^2)	8	6	1	48
Cilalama	4	2	1.5	20
Marangozluk	2	1.5	.5	8
Talep (maks)	-	5	-	
Fiyat ($)	60	30	20	

DP Modeli:

x_1, x_2, x_3 bir haftada üretilen sıra, masa ve sandalye sayısı olsun. z ise Dakota'nın haftalık kar miktarını göstersin. Aşağıdaki DP'yi formüle edebiliriz

$$\begin{aligned}
&\text{maks } z = 60x_1+30x_2+20x_3 \\
&\text{öyle ki} \quad 8x_1+6x_2+x_3 \le 48 \\
&\qquad\qquad 4x_1+2x_2+1.5x_3 \le 20 \\
&\qquad\qquad 2x_1+1.5x_2+.5x_3 \le 8 \\
&\qquad\qquad x_2 \le 5 \\
&\qquad x_1,x_2,x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Simpleks algoritması ile çözüm

<u>Öncelikle gevşek (slack) değişkenler kullanarak DP modelini standart biçime getiriniz ve modeli kanonik bir şekilde yazınız.</u>

$$\begin{array}{lllllllll}
R_0 & z & -60x_1 & -30x_2 & -20x_3 & & & & = 0 \\
R_1 & & 8x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & +s_1 & & & = 48 \\
R_2 & & 4x_1 & +\ 2x_2 & +1.5x_3 & & +s_2 & & = 20 \\
R_3 & & 2x_1 & +1.5x_2 & +\ .5x_3 & & & +s_3 & = 8 \\
R_4 & & & x_2 & & & & +s_4 & = 5
\end{array}$$

$x_1,x_2,x_3,s_1,s_2,s_3,s_4 \ge 0$

<u>Bir başlangıç temel olurlu çözümü bulunuz</u>

Sorun için $(x_1, x_2, x_3) = 0$ çözümü olurlu olduğundan, aşağıda verilen nokta bir başlangıç temel olurlu çözümdür (basic feasible solution – bfs):

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $s_1 = 48$, $s_2 = 20$, $s_3 = 8$, $s_4 = 5$.

Bu bfs'de üç karar değişkeni ***temel dışı değişken*** (non-basic variables) ve dört gevşek değişken ise ***temel değişkendir*** (basic variables) ve değerleri kanonik modeldeki eşitliklerden bulunur.

Mevcut bfs'nin en iyi çözüm olup olmadığını kontrol ediniz

Temel dışı herhangi bir değişkenin değerinin çoğaltılması (temele girmesi) ile z'nin değerinin iyileşmesinin mümkün olup olmadığı araştırılır.

Eğer tüm temel dışı değişkenlerin amaç fonksiyon satırındaki (***0. satır; row 0 – R_0***) katsayıları 0 ya da 0'dan büyükse (nonnegative), mevcut bfs en iyi (optimal) çözümdür (*z*'nin değeri daha çok iyileştirilemez).

Fakat örnekte tüm temel dışı değişkenlerin 0. satırdaki katsayıları negatiftir: Çözüm en iyi değildir.

Yeni bfs'nin bulunması

- Enbüyüklenmek istenen z en çok x_1 sıfırdan farklı yapıldığı zaman çoğalır: x_1 ***giren değişken***dir
- R_1 incelendiğinde x_1'in en fazla 6 olabileceği görülür. Aksi takdirde $s_1 < 0$ olacaktır. Benzer şekilde R2 ve R3 sırasıyla 5 ve 4 sınırlarını verir. Son satırda x_1 olmadığından herhangi bir sınırlama söz konusu değildir. Bu durumda tüm sınırlamaların (aslında sağ taraf değerlerinin giren değişken katsayılarına "oran"larının – ***oran testi***) en küçüğü olan 4, x_1'in alabileceği en büyük değerdir. $x_1 = 4$ olduğunda $s_3 = 0$ olup çözümden çıkar ve ***çıkan değişken*** olarak isimlendirilir.
- R_3 de ***pivot denklem*** olur. x_1 temel değişken olduğu için birim matrise girecek şekilde sistem yeniden düzenlenir.

Yeni *pivot denklem* (R_3/2):

$$R_3' : x_1 + .75x_2 + .25x_3 + \quad .5s_3 \quad = 4$$

R_3' kullanılarak x_1 tüm diğer satırlarda yok edilir.

$$R_0' = R_0 + 60R_3', \quad R_1' = R_1 - 8R_3', \quad R_2' = R_2 - 4R_3', \quad R_4' = R_4$$

R_0'	z		$+15x_2$	$-5x_3$			$+30s_3$	$= 240$	$z = 240$
R_1'				$-x_3$	$+s_1$		$-4s_3$	$= 16$	$s_1 = 16$
R_2'			$-x_2$	$+.5x_3$		$+s_2$	$-2s_3$	$= 4$	$s_2 = 4$
R_3'		x_1	$+.75x_2$	$+.25x_3$			$+.5s_3$	$= 4$	$x_1 = 4$
R_4'			x_2				$+s_4$	$= 5$	$s_4 = 5$

Yeni bfs $x_2 = x_3 = s_3 = 0$, $x_1 = 4$, $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $s_4 = 5$ şeklindedir ve $z = 240$ olur

<u>Mevcut bfs'in optimalliğini kontrol ediniz ve en iyi çözümü bulunana kadar adımları tekrar ediniz</u>

- x_3 girer.
- Oran testi sonucu x_3 = 8 bulunur; s_2 çıkar: İkinci satır pivot denklem olur.
- Pivot denklemde (R$_2$') giren değişkenin katsayısı 1 yapılır:

  R$_2$'' $\quad -2x_2+x_3+2s_2-4s_3 = 8$ (R$_2$'×2).

R$_2$'' satır işlemleri ile diğer satırlarda giren değişken yok edilir:

R$_0$''=R$_0$'+5R$_2$'', R$_1$''=R$_1$'+R$_2$'', R$_3$''=R$_3$'-.5R$_2$'', R$_4$''=R$_4$'

Yeni bfs: $x_2=s_2=s_3=0$, $x_1=2$, $x_3=8$, $s_1=24$, $s_4=5$; $z = 280$.

Sıfırıncı satırdaki tüm temel dışı değişkenlerin katsayısı pozitiftir ($5x_2$, $10s_2$, $10s_3$).

MEVCUT ÇÖZÜM EN İYİ ÇÖZÜMDÜR (OPTIMAL SONUÇ)

Rapor: Dakota mobilya şirketi haftalık karını enbüyüklemek için 2 sıra ve 8 sandalye üretmelidir. Bu durumda 280$ kar eder.

Simpleks algoritması tablolarla gösterilirse

<u>(***Siz de tüm ödev ve sınavlarda her işlem için tablo kullanın!!!***)</u>

maks $z = 60x_1+30x_2+20x_3$

$$\text{öyle ki} \quad \begin{aligned} 8x_1+6x_2+x_3 &\le 48 \\ 4x_1+2x_2+1.5x_3 &\le 20 \\ 2x_1+1.5x_2+.5x_3 &\le 8 \\ x_2 &\le 5 \\ x_1,x_2,x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

<u>Başlangıç tablosu:</u>

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
1	-60	-30	-20	0	0	0	0	0	z = 0	
0	8	6	1	1	0	0	0	48	s_1 = 48	6
0	4	2	1.5	0	1	0	0	20	s_2 = 20	5
0	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	s_3 = 8	4
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4 = 5	-

<u>İlk tablo:</u>

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
1	0	15	-5	0	0	30	0	240	z = 240	
0	0	0	-1	1	0	-4	0	16	s_1 = 16	-
0	0	-1	0.5	0	1	-2	0	4	s_2 = 4	8
0	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	x_1 = 4	16
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4 = 5	-

<u>İkinci ve en iyi tablo:</u>

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran
1	0	5	0	0	10	10	0	280	z = 280	
0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	s_1 = 24	
0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	x_3 = 8	
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	x_1 = 2	
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4 = 5	

Örnek 2. Değiştirilmiş Dakota Mobilya

Dakota örneğini $35/masa olarak değiştirelim

Yeni $z = 60\,x_1 + 35\,x_2 + 20\,x_3$

Yeni sorun için ikinci ve en iyi (optimal) tablo:

z	x_1	⇓ x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD	Oran	
1	0	**0**	0	0	10	10	0	280	z=280		
0	0	-2	0	1	2	-8	0	24	s_1=24	-	
0	0	-2	1	0	2	-4	0	8	x_3=8	-	
0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	x_1=2	2/1.25	⇒
0	0	1	0	0	0	0	1	5	s_4=5	5/1	

Bir diğer en iyi tablo:

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ST	TD
1	0	0	0	0	10	10	0	280	z=280
0	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	0	27.2	s_1=27.2
0	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	0	11.2	x_3=11.2
0	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	0	1.6	x_2=1.6
0	-0.8	0	0	0	0.4	-1.2	1	3.4	s_4=3.4

Bu yüzden en iyi çözüm aşağıdaki gibidir:

$\boldsymbol{z = 280}$ **ve** $\boldsymbol{0 \leq c \leq 1}$ için

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{vmatrix} + (1 - c) \begin{vmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2c} \\ \mathbf{1.6 - 1.6c} \\ \mathbf{11.2 - 3.2c} \end{vmatrix}$$

Örnek 3. Sınırlı Olmayan DP'ler

z	x_1	x_2	x_3 ⇓	x_4	s_1	s_2	ST	TD	Oran
1	0	2	**-9**	0	12	4	100	z=100	
0	0	1	-6	1	6	-1	20	x_4=20	Yok
0	1	1	-1	0	1	0	5	x_1=5	Yok

Oran testi yapılamadığı için çözülmek istenen DP sınırlı olmayan DP'dir.

4.4 BÜYÜK M YÖNTEMİ

Eğer bir DP'de $\geq$ veya = kısıtlar varsa, Simpleks yöntemi kullanılarak bir başlangıç temel olurlu çözümü (bfs) oluşturulamaz.

Bu durumda Büyük M (Big M) yöntemi veya İki Aşamalı (Two Phase) Simpleks yöntemi kullanılmalıdır.

Büyük M yöntemi Simpleks Algoritmasının bir türüdür: Soruna yapay (artificial) değişkenler de eklenerek bir bfs bulunur. DP'nin amaç fonksiyonu da sonuçta yapay değişkenlerin katsayıları 0 olacak şekilde yeniden düzenlenir.

Adımlar

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir (ST değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!). Düzenlemelerden sonra her kısıt $\leq$, $\geq$ veya = kısıt olarak sınıflandırılır
2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt $\leq$ kısıtsa, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken s_i eklenir. Eğer kısıt $\geq$ kısıtsa, sol taraftan bir fazlalık (excess) değişken e_i çıkarılır.
3. Tüm $\geq$ veya = kısıtların sol tarafına bir yapay değişken a_i eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ($a_i \geq 0$) da eklenir.
4. M çok büyük bir sayı olsun. Eğer DP enküçükleme sorunu ise, amaç fonksiyonuna (her yapay değişken için) Ma_i eklenir. Eğer DP enbüyükleme sorunu ise, amaç fonksiyonuna (her yapay değişken için) $-Ma_i$ eklenir.
5. Her yapay değişken başlangıç temel çözümünde olacağı için amaç fonksiyonundan (0. satır) elenmelidir (katsayıları sıfır olacak şekilde düzenleme yapılmalıdır). Daha sonra simpleks algoritmasının adımları kullanılarak (M'nin büyük bir sayı olduğu unutulmadan!) çözüme gidilir.

Yukarıdaki 5 adımla düzenlenen yeni DP'nin en iyi çözümünde tüm yapay değişkenler 0'a eşit çıkarsa, esas sorunun **en iyi çözüm**ü bulunmuştur.
Eğer yeni DP'nin en iyi çözümünde en az bir yapay değişken pozitif bir değer alırsa, esas sorun **çözümsüzdür** (infeasible)!!!

Örnek 1. Oranj Meyve Suyu

(Winston 4.10., s. 164)

Bevco şirketi, portakal gazozu ile portakal suyunu karıştırarak Oranj ismiyle portakallı meyve suları üretmektedir. Portakal gazozunun bir onsunda 0.5 oz. şeker ve 1 mg C vitamini vardır. Portakal suyunun bir onsunda ise 0.25 oz. şeker ve 3 mg C vitamini vardır. Bevco bir oz. portakal gazozu üretmek için 2¢, bir oz. portakal suyu üretmek için ise 3¢ harcamaktadır. Şirketin pazarlama bölümü Oranj'ı 10 oz.luk şişelerde satmak istemektedir. Bevco'nun her bir şişede en az 20 mg C vitamini bulunmasını ve en çok 4 oz. şeker olması şartını en az maliyetle karşılamasını sağlayınız.

DP Modeli:

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olsun. DP modeli aşağıdaki gibi kurulur.

$$
\begin{array}{lll}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 & & \text{(şeker kısıtı)} \\
x_1 + 3x_2 \ge 20 & & \text{(C vit. kısıtı)} \\
x_1 + x_2 = 10 & & \text{(10 oz'luk şişe kısıtı)} \\
x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}
$$

Büyük M yöntemi ile çözüm:

<u>Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz</u>

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

<u>Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz</u>

$$
\begin{array}{lll}
z - 2x_1 - 3x_2 & = & 0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 & = & 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 & = & 20 \\
x_1 + x_2 & = & 10 \\
\text{tüm değişkenler} \ge 0 & &
\end{array}
$$

<u>Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz</u>

$z - 2x_1 - 3x_2$	$= 0$	R_0
$0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1$	$= 4$	R_1
$x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2$	$= 20$	R_2
$x_1 + x_2 + a_3$	$= 10$	R_3

tüm değişkenler ≥ 0

<u>Adım 4. Amaç fonksiyonuna Ma_i ekleyiniz (min. sorunu için)</u>

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + M a_2 + M a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - M a_2 - M a_3 = 0$$

<u>Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz</u>

Yeni $R_0 = R_0 + M R_2 + M R_3 \Rightarrow$

$z + (2M-2)x_1 + (4M-3)x_2 - M e_2 = 30M$ Yeni R_0

Başlangıç tablosu:

z	x1	x2 ⇓	s1	e2	a2	a3	ST	TD	Oran
1	2M-2	**4M-3**	0	-M	0	0	30M	z=30M	
0	0.5	0.25	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	$\boxed{3}$	0	-1	1	0	20	a_2=20	**20/3** ⇒
0	1	1	0	0	0	1	10	a_3=10	10

Enk. sorununda, 0. satır katsayısı "en pozitif" olan değişken giren değişkendir!

İlk tablo:

z	x1 ⇓	x2	s1	e2	a2	a3	ST	TD	Oran
1	**(2M-3)/3**	0	0	(M-3)/3	(3-4M)/3	0	20+3.3M	z	
0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1	28/5
0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2	20
0	$\boxed{\mathbf{2/3}}$	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3	**5** ⇒

En iyi tablo:

z	x1	x2	s1	e2	a2	a3	ST	TD
1	0	0	0	-1/2	(1-2M)/2	(3-2M)/2	25	z=25
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

Rapor:

Bir şişe Oranj'da, 5 oz. portakal gazozu ve 5 oz. portakal suyu olmalıdır.

Bu durumda toplam maliyet 25¢ olacaktır.

Örnek 2. Değiştirilmiş Oranj Meyve Suyu

Bevco sorununda diğer koşullar aynı kalmak kaydıyla 36 mg. C vitamini gerektiği göz önüne alınırsa ilgili DP modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olmak üzere;

$$
\begin{array}{lll}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 & & \text{(şeker kısıtı)} \\
x_1 + 3x_2 \ge 36 & & \text{(C vit. kısıtı)} \\
x_1 + x_2 = 10 & & \text{(10 oz'luk şişe kısıtı)} \\
x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}
$$

Büyük M yöntemi ile çözüm:

Başlangıç tablosu:

z	x_1	x_2 ⇓	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2M-2	**4M-3**	0	-M	0	0	46M	z=46M	
0	0.5	0.25	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	a_2=36	36/3
0	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	0	1	10	a_3=10	**10** ⇒

En iyi tablo:

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	1-2M	0	0	-M	0	3-4M	30+6M	z=30+6M
0	1/4	0	1	0	0	-1/4	3/2	s_1=3/2
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	a_2=6
0	1	1	0	0	0	1	10	x_2=10

Bir yapay değişken (a_2) temel değişken olduğu için orijinal DP olurlu değildir.

Rapor:

Belirtilen şartlarda Oranj üretimi yapmak mümkün değildir.

4.5 İKİ AŞAMALI SİMPLEKS

Temel olurlu çözümün (bfs) hazır olmadığı durumlarda iki aşamalı simpleks yöntemi büyük M yöntemine alternatif olarak kullanılabilir. İlgili kısıtlara büyük M yöntemine benzer şekilde yapay değişkenler eklenir. Daha sonra Aşama I DP çözülerek orijinal DP'ye bir bfs bulunur. Aşama I DP'de amaç fonksiyonu yapay değişkenlerin toplamının en küçüklenmesidir. Aşama I sonucunda, orijinal DP'nin amaç fonksiyonu eklenerek DP'nin en iyi çözümü belirlenir.

Adımlar

1. Öncelikle tüm kısıtlar sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerleri negatif olmayacak şekilde düzenlenir (ST değeri negatif olan kısıtlar -1 ile çarpılır. Bu

çarpım sonucu eşitsizliğin yönünün değişeceğini unutmayınız!). Düzenlemelerden sonra her kısıt <u><</u>, <u>></u> veya = kısıt olarak sınıflandırılır

2. Tüm kısıtlar standart biçime çevrilir. Eğer kısıt $\leq$ kısıtsa, sol tarafa simpleks yönteminde olduğu gibi gevşek değişken s_i eklenir. Eğer kısıt $\geq$ kısıtsa, sol taraftan bir fazlalık (excess) değişken e_i çıkarılır.
3. Tüm $\geq$ veya = kısıtların sol tarafına bir yapay değişken a_i eklenir. Aynı zamanda yapay değişkenler için işaret sınırlaması ($a_i \geq 0$) da eklenir.
4. Aşama I'de orijinal amaç fonksiyonu, tüm yapay değişkenlerin toplamını ($w = \Sigma a_i$) en küçükleyecek bir amaç fonksiyonu ile değiştirilerek orijinal DP çözülür. Böylece Aşama I DP'nin çözümü yapay değişkenleri 0 olmaya zorlayacaktır.
5. Her yapay değişken başlangıç temel çözümünde olacağı için simplekse başlamadan önce bu değişkenler 0. satırdan elenmelidir. Daha sonra simpleks ile değiştirilmiş sorun çözülür.

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

I. <u>Durum 1.</u> w > 0 ise orijinal DP'nin çözümü olurlu değildir. (Aşama II'ye geçilmez!)

II. <u>Durum 2</u>. w = 0 ve hiçbir yapay değişken temel değişken değil ise;
   i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan amaç fonksiyonu satırı ve yapay değişkenler ile ilgili sütunlar atılır.
   ii. Orijinal amaç fonksiyonu ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur. Eğer Aşama I DP'nin en iyi tablosundaki bazı temel değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları sıfırdan farklı ise bu değişkenlerin amaç fonksiyonunun elenmesi için satır işlemleri yapılmalısına dikkat edilmelidir.
   iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

III. <u>Durum 3</u>. w = 0 ve en az bir yapay değişken temel değişken ise;
   i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan amaç fonksiyonu satırı ile temel dışı yapay değişkenler ve sıfırıncı satırdaki katsayısı negatif olan değişkenlere ait sütunlar atılır.
   ii. Orijinal amaç fonksiyonu ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur. Eğer Aşama I DP'nin en iyi tablosundaki bazı temel değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları sıfırdan farklı ise

bu değişkenlerin amaç fonksiyonunun elenmesi için satır işlemleri yapılmasına dikkat edilmelidir.

iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Örnek 1. Oranj Meyve Suyu

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olmak üzere;

$$\begin{array}{llr}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
\quad 0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4 & & \text{(şeker kısıtı)} \\
\quad x_1 + 3x_2 \geq 20 & & \text{(C vit. kısıtı)} \\
\quad x_1 + x_2 = 10 & & \text{(10 oz'luk şişe kısıtı)} \\
\quad x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

<u>Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz</u>

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

<u>Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz</u>

$$\begin{array}{l}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 = 20 \\
x_1 + x_2 = 10 \\
\text{tüm değişkenler} \geq 0
\end{array}$$

<u>Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz</u>

$$\begin{array}{ll}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 & R_0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 & R_1 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 & R_2 \\
x_1 + x_2 + a_3 = 10 & R_3 \\
\text{tüm değişkenler} \geq 0 &
\end{array}$$

<u>Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir</u>.

Min w = $a_2 + a_3$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

<u>Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz</u>

Yeni $R_0 = R_0 + R_2 + R_3 \Rightarrow$

$w + (1+1)x_1 + (3+1)x_2 - e_2 = 30$ Yeni R_0

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

w	x_1	⇓ x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2	**4**	0	-1	0	0	30	w=30	
0	1/2	1/4	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	$\boxed{\mathbf{3}}$	0	-1	1	0	20	a_2=20	**20/3**⇒
0	1	1	0	0	0	1	10	a_3=10	10

Aşama I DP - İlk tablo:

w	⇓ x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	**2/3**	0	0	1/3	-4/3	0	10/3	w=10/3	
0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1=7/3	28/5
0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2=20/3	20
0	$\boxed{\mathbf{2/3}}$	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3=10/3	**5**⇒

Aşama I DP - En iyi tablo:

w	x_1	**x_2**	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	0	0	0	0	-1	-1	0	w=0
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

Aşama I DP en iyi tablosunda w = 0 ve a_2 ile a_3 temel dışı değişken olduğu için Durum 2 ile karşılaşılmıştır.

i. Birinci aşama tablosundaki yapay değişkenler ile ilgili sütunları ve amaç fonksiyonu satırı atılır,

w	**x_1**	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	0	0	0	0	-1	-1	0	w=0
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	x_1=5

min $z = 2\, x_1 + 3\, x_2$

z	x_1	x_2	s_1	e_2	ST	TD
1	-2	-3	0	0	0	z=0
0	0	0	1	-1/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	5	x_1=5

yeni R0 = R0 + 2R3 + 3R2

Aşama II DP - Başlangıç tablosu:

z	x_1	x_2	s_1	e_2	ST	TD
1	0	0	0	-1/2	25	z=25
0	0	0	1	-1/8	1/4	s_1=1/4
0	0	1	0	-1/2	5	x_2=5
0	1	0	0	1/2	5	x_1=5

ii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Başlangıç tablosunda ilk satırda pozitif katsayı olmadığı için bu tablo en iyi çözümdür. Bu çözüme göre $x_1 = x_2 = 5$; $z = 25$ 'tir.

Rapor:

Bir şişe Oranj'da, 5 oz. portakal gazozu ve 5 oz. portakal suyu olmalıdır.

Bu durumda toplam maliyet 25¢ olacaktır.

Örnek 2. Değiştirilmiş Oranj Meyve Suyu

x_1 ve x_2 bir şişe Oranj'da bulunması gereken portakal gazozu ve portakal suyu miktarı olmak üzere;

$$
\begin{array}{lll}
\min z = 2x_1 + 3x_2 & & \\
0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 & & \text{(şeker kısıtı)} \\
x_1 + 3x_2 \ge 36 & & \text{(C vit. kısıtı)} \\
x_1 + x_2 = 10 & & \text{(10 oz'luk şişe kısıtı)} \\
x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}
$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz

$$
\begin{array}{l}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 = 36 \\
x_1 + x_2 = 10 \\
\text{tüm değişkenler} \ge 0
\end{array}
$$

Adım 3. $\ge$ veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$
\begin{array}{ll}
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 & R_0 \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 & R_1 \\
x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 & R_2 \\
x_1 + x_2 + a_3 = 10 & R_3 \\
\text{tüm değişkenler} \ge 0 &
\end{array}
$$

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

Min $w = a_2 + a_3$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$w - a_2 - a_3 = 0$$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz

Yeni $R_0 = R_0 + R_2 + R_3 \Rightarrow$

$$w + (1+1)x_1 + (3+1)x_2 - e_2 = 46 \quad \text{Yeni } R_0$$

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

w	x_1	x_2 ⇓	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	2	**4**	0	-1	0	0	46	w=46	
0	1/2	1/4	1	0	0	0	4	s_1=4	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	a_2=36	12
0	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	0	1	10	a_3=10	**10**⇒

Aşama I DP – En iyi tablo

w	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ST	TD
1	-2	0	0	-1	0	-4	6	w=6
0	1/4	0	1	0	0	-1/4	3/2	s_1=3/2
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	a_2=6
0	1	1	0	0	0	1	10	x_2=10

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

Aşama I DP en iyi tablosunda *w* > 0 olduğu için Durum 1 ile karşılaşılmıştır. Buna göre orijinal DP olurlu değildir.

Rapor:

Belirtilen şartlarda Oranj üretimi yapmak mümkün değildir.

Örnek 3. (*Winston*, 4.13)

Aşağıdaki DP Modelini iki aşamalı simpleks ile çözünüz.

$$\begin{aligned}
\text{maks } z &= 40x_1 + 10x_2 + 7x_5 + 14x_6 \\
\text{Öyle ki; } & x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\
& -2x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \\
& x_1 + x_3 + x_5 - x_6 = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 4
\end{aligned}$$

İki aşamalı simpleks yöntemi ile çözüm:

Adım 1. Tüm kısıtları ST değerleri negatif olmayacak şekilde düzenleyiniz

Tüm kısıtların ST değeri pozitiftir

Adım 2. Tüm kısıtları standart biçime çeviriniz

Tüm kısıtlar eşittir kısıtı olduğu için problem standart biçimdedir.

Adım 3. > veya = kısıtlara a_i yapay değişkenini ekleyiniz

$$\begin{aligned}
& z - 40x_1 - 10x_2 - 7x_5 - 14x_6 = 0 \\
& x_1 - x_2 + 2x_5 + a_1 = 0 \\
& -2x_1 + x_2 - 2x_5 + a_2 = 0 \\
& x_1 + x_3 + x_5 - x_6 + a_3 = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 4
\end{aligned}$$

(Not: son kısıtta x4 temel değişken olabileceği için yapay değişken eklenmemiştir.)

Adım 4. Tüm yapay değişkenlerin toplamı en küçüklenecek amaç olarak belirlenir.

$$\min w = a_1 + a_2 + a_3$$

Sıfırıncı satır (R0) aşağıdaki gibi olacaktır:

$w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$

Adım 5. Yapay değişkenleri R_0'dan eleyecek şekilde yeni R_0 oluşturunuz

Yeni $R_0 = R_0 + R1 + R_2 + R_3 \Rightarrow$

$w + x_3 + x_5 - x_6 = 3$ Yeni R_0

Aşama I DP - Başlangıç tablosu:

w	x_1	x_2	x_3 $\Downarrow$	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	ST	TD	Oran
1	0	0	**1**	0	1	-1	0	0	0	3	w=3	
0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a_1=0	-
0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a_2=0	-
0	1	0	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	0	1	3	a_3=3	**3** $\Rightarrow$
0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	4	x_4=4	4

Aşama I DP – En iyi tablo:

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	ST	TD
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	w=0
0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a_1=0
0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a_2=0
0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	3	x_3=3
0	-1	2	0	1	1	2	0	0	-1	1	x_4=1

Aşama I DP çözümünde üç farklı durum ile karşılaşılabilir:

w = 0 ama a_1 ve a_2 temel değişken olduğu için Durum 3 ile karşılaşılmıştır.

i. Aşama I DP'nin en iyi tablosunda yer alan temel dışı yapay değişkenler ve ilk satırdaki katsayısı negatif olan değişkenler ile ilgili sütunlar ve amaç fonksiyonu satırı atılır.

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	ST	TD
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	w=0
0	1	-1	0	0	2	0	1	0	0	0	a_1=0
0	-2	1	0	0	-2	0	0	1	0	0	a_2=0
0	1	0	1	0	1	-1	0	0	1	3	x_3=3
0	-1	2	0	1	1	2	0	0	-1	1	x_4=1

ii. Orijinal amaç fonksiyonu (*z*) ile Aşama I DP'den gelen tablo birleştirilerek Aşama II DP oluşturulur.

$$z - 40x_1 - 10x_2 \qquad -7x_5 - 14x_6 = 0$$

Orijinal amaç fonksiyonunda katsayısı sıfırdan farklı olan değişkenlerin tümü temel dışı değişkendir; bu yüzden satır işlemi yapmadan Aşama II DP oluşturulur.

Aşama II DP – Başlangıç Tablosu

Z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 ⇓	a_1	a_2	ST	TD	Oran
1	-10	0	0	-7	**-14**	0	0	0	z=0	
0	-1	0	0	2	0	1	0	0	a_1=0	-
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	a_2=0	-
0	0	1	0	1	-1	0	0	3	x_3=3	-
0	2	0	1	1	$\boxed{\mathbf{2}}$	0	0	1	x_4=1	**1/2** ⇒

iii. Aşama II DP simpleks algoritmasının adımları kullanılarak çözülür. Aşama II DP'nin çözümü orijinal problemin çözümüdür.

Aşama II DP – En iyi tablo

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	ST	TD
1	4	0	7	0	0	0	0	7	z=7
0	-1	0	0	2	0	1	0	0	a_1=0
0	1	0	0	-2	0	0	1	0	a_2=0
0	1	1	1/2	3/2	0	0	0	7/2	x_3=7/2
0	1	0	1/2	1/2	1	0	0	1/2	x_6=1/2

Rapor:

$z = 7$, $x_3 = 3{,}5$; $x_6 = 0{,}5$; $x_1 = x_2 = x_5 = x_4 = 0$

4.6 İŞARETİ SINIRLANDIRILMAMIŞ DEĞİŞKENLER

İşareti sınırlandırılmamış değişkenler olabilir (serbest; unrestricted in sign - **urs**).

Serbest (urs) değişkenleri olan bir DP, çözülebilmesi için, negatif değerler almayan değişkenlerden oluşan bir DP'ye dönüştürülmelidir.

Her x_i serbest değişkeni için

- iki yeni x_i' and x_i'' değişkeni tanımlanır
- tüm kısıtlardaki ve amaç fonkiyonundaki x_i için x_i' - x_i'' değişimi yap

  $x_i = x_i' – x_i''$
- $x_i' \geq 0$ and $x_i'' \geq 0$ işaret sınırları ekle

Örnek. Fırıncı

Bir fırıncının 30 oz. unu ve 5 paket mayası vardır. Fırıncı 30¢'e sattığı bir ekmek için 5 oz. un ve 1 paket maya kullanmaktadır. Fırıncı piyasadan 4¢/oz'luk bir maliyetle ek un alabilir ya da elinde kalan un olursa aynı fiyata satabilir. Fırıncının karını enbüyükleyecek bir DP modeli kurunuz ve modeli çözünüz.

Yanıt

Karar değişkenleri:

- x_1: pişirilecek ekmek sayısı
- x_2: Unun alışveriş sonucunda kaç oz. artacağı

Böylece, eğer fırıncı x_2 oz. un satın alırsa $x_2 > 0$; x_2 oz. un satarsa $x_2 < 0$; un satın almazsa ve satmazsa $x_2 = 0$ olur

DP modeli:

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad 5x_1 &\le 30 + x_2 \\ x_1 &\le 5 \\ x_1 &\ge 0,\ x_2 \text{ urs} \end{aligned}$$

$x_2 = x_2' - x_2''$ değişimi kullanıldığında:

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 - 4x_2' + 4x_2'' \\ \text{s.t.} \quad 5x_1 &\le 30 + x_2' - x_2'' \\ x_1 &\le 5 \\ x_1, x_2', x_2'' &\ge 0 \end{aligned}$$

En iyi tablo:

z	x_1	x'_2	x''_2	s_1	s_2	rhs	Basic Variable
1	0	0	0	4	10	170	$z = 170$
0	0	−1	1	1	−5	5	$x''_2 = 5$
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$

$x_1 = 5$; $x_2'' = 0$ ve $x_2'' = 5 \rightarrow x_2 = -5$; $z = 170$

Rapor

Fırıncı 5 ekmek pişirip satarak 170¢ kar elde edebilir. Ayrıca elindeki fazla unun 5 oz.'unu da satmalıdır.

5. DUYARLILIK ANALİZİ VE DUALİTE

5.1 DUYARLILIK ANALİZİ

5.1.1 İndirgenmiş Maliyet

Herhangi bir temel dışı değişkenin indirgenmiş maliyeti (reduced cost), değişkenin temel değişken olması (DP'nin en iyi çözümüne girmesi) için amaç fonksiyon katsayısında yapılacak iyileştirme miktarıdır.

Eğer bir x_k temel dışı değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyet kadar iyileştirilirse, DP'nin bir tek en iyi çözümü olmaz: alternatif çözümler vardır. x_k, söz konusu çözümlerden en az birinde temel değişken; en az birinde ise temel dışı değişken konumundadır.

Eğer x_k temel dışı değişkeninin amaç fonksiyon katsayısı indirgenmiş maliyetten daha fazla iyileştirilirse, yeni DP'nin tek bir en iyi çözümüne ulaşılır ve bu çözümde x_k temel değişken olur (x_k>0).

Temel değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfırdır (tanıma bakınız)!

5.1.2 Gölge Fiyat

DP modelinin *i*. kısıtının gölge fiyatı (shadow price), söz konusu kısıtın sağ taraf (ST; Right Hand Side - RHS) değerinin 1 birim çoğaltılması durumunda, en iyi amaç fonksiyon değerinin ne kadar iyileştiğini (enbüyükleme sorununda ne kadar arttığını, enküçükleme sorununda ne kadar azaldığını) gösterir.

Bu tanım sadece değişimden önceki çözümün değişimden sonra da aynı kalması durumunda geçerlidir!

Bir $\geq$ kısıtın gölge fiyatı her zaman 0 ya da 0'dan küçük (nonpositive); bir $\leq$ kısıtın gölge fiyatı ise her zaman 0 ya da 0'dan büyük (nonnegative) olacaktır.

5.1.3 Kavramsallaştırma

$$
\begin{aligned}
&\text{maks } z = 6x_1 + x_2 + 10x_3 \\
&\qquad x_1 \qquad\quad + x_3 \le 100 \\
&\qquad\qquad x_2 \qquad\ \ \le 1 \\
&\text{Tüm değişkenler} \ge 0
\end{aligned}
$$

Bu çok kolay bir DP modelidir ve simpleks kullanılmadan elle de çözülebilir:

x_2 = 1 (Bu değişken ilk kısıtta yoktur, bu durumda sorun enbüyükleme olduğundan ikinci kısıtın sol taraf değeri 1'e eşit olur)

$x_1 = 0$, $x_3 = 100$ (Bu iki değişken ise salt ilk kısıtta kullanılmışlardır ve x_3'ün amaç fonksiyon değeri x_1'inkinden büyük olduğu için x_3'ün en iyi değeri birinci kısıt ST değerine eşit olur)

Bu durumda en iyi çözüm aşağıdaki gibidir:

$z = 1001$, $[x_1, x_2, x_3] = [0, 1, 100]$

Aynı zamanda duyarlık analizi de elle hesaplanabilir:

İndirgenmiş Maliyet

x_2 ve x_3 temel değişken (en iyi çözümde) olduklarından, indirgenmiş maliyetleri 0'dır.

x_1'i temel değişken yapabilmek için amaç fonksiyon katsayısını en az x_3'ün amaç fonksiyon katsayısı kadar yapmak diğer bir deyişle 4 (10-6) birim çoğaltmak gerekir.

Yeni amaç fonksiyonu (maks $z = 10\,x_1 + x_2 + 10\,x_3$) olacak ve $[x_1, x_2, x_3]$ için en az iki en iyi çözüm bulunacaktır: [0, 1, 100] ve [100, 1, 0].

Bu durumda x_1'in indirgenmiş maliyeti 4'tür.

Eğer x_1'in amaç fonksiyon katsayısını indirgenmiş maliyet değerinden daha fazla çoğaltırsak en iyi çözüm bir tane olacaktır: [100, 1, 0].

Gölge Fiyat

Eğer birinci kısıtın ST değeri 1 birim arttırılırsa, x_3'ün yeni en iyi çözüm değeri 100 yerine 101 olacaktır. Bu durumda da z'nin yeni değeri 1011 olacaktır.

Tanımdan faydalanıp tersten gidersek: 1011 - 1001 = 10, birinci kısıtın gölge fiyat değeridir.

Benzer şekilde ikinci kısıtın gölge fiyatı 1 olarak hesaplanır (lütfen hesaplayınız).

5.1.4 Duyarlılık için Lindo Çıktısının Kullanılması

DİKKAT: Simpleks'de sıfırıncı satır olan amaç fonksiyonu Lindo'da birinci satır (Row 1) olarak kabul edilir!

Bu yüzden ilk kısıt, Lindo'da her zaman ikinci satırdır!!!

```
MAX     6 X1 + X2 + 10 X3
SUBJECT TO
       2)   X1 + X3 <=   100
       3)   X2 <=   1
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
       1)       1001.000
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000          4.000000
       X2         1.000000          0.000000
       X3       100.000000          0.000000
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
```

```
          2)          0.000000          10.000000
          3)          0.000000           1.000000
 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:
                           OBJ COEFFICIENT RANGES
  VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    COEF          INCREASE         DECREASE
        X1        6.000000        4.000000          INFINITY
        X2        1.000000        INFINITY          1.000000
        X3       10.000000        INFINITY          4.000000
                           RIGHTHAND SIDE RANGES
       ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS           INCREASE         DECREASE
         2      100.000000        INFINITY        100.000000
         3        1.000000        INFINITY          1.000000
```

Lindo çıktısı x_1, x_2 ve x_3 değişkenlerinin indirgenmiş maliyetlerini (reduced costs) 4, 0 ve 0 olarak vermektedir.

Enbüyükleme sorunlarında temel dışı bir değişkenin indirgenmiş maliyeti aynı zamanda Lindo çıktısındaki amaç fonksiyon katsayıları aralığındaki (obj. coefficient ranges) o değişken için izin verilen çoğalış (allowable increase) değeri ile de bulunabilir. Burada x_1 için söz konusu değer 4'tür.

Enküçükleme sorunlarında ise temel dışı değişkenin indirgenmiş maliyeti izin verilen azalış (allowable decrease) değerine eşittir.

Aynı Lindo çıktısından, gölge fiyatlar (shadow prices) da kısıtların "dual price" değerleri okunarak bulunabilir:

Örneğimizde birinci kısıtın (satır 2) gölge fiyatı 10'dur.

İkinci kısıtın (satır 3) gölge fiyatı ise 1'dir.

Eğer bir kısıtın ST değerindeki bir değişim en iyi çözümün değişmeyeceği izin verilen ST aralıklarında (allowable RHS range) ise aşağıdaki denklemler kullanılarak yeni amaç fonksiyon değeri hesaplanabilir:

enbüyükleme sorunu için

- yeni amaç fn. değeri = eski amaç fn. değeri + (yeni ST – eski ST) × gölge fiyat

enküçükleme sorunu için

- yeni amaç fn. değeri = eski amaç fn. değeri – (yeni ST – eski ST) × gölge fiyat

Lindo örneğinde, izin verilen ST aralığı çoğalışı (allowable increase in RHS ranges) sonsuz (infinity) olduğu için her iki kısıtın da ST değerini istediğimiz kadar çoğaltabiliriz. Fakat izin verilen ST aralığı azalışına (allowable decrease) göre birinci kısıtı en fazla 100, ikinci kısıtı ise 1 birim azaltabiliriz.

Örnek

Birinci kısıtın yeni ST değerinin 60 olduğunu düşünelim.

Öncelikle izin verilen aralıklar kontrol edilir. Çoğalış sonsuz olduğundan birinci denklemi kullanabiliriz (maks sorunu):

$$z_{yeni} = 1001 + (60 - 100)\,10 = 601$$

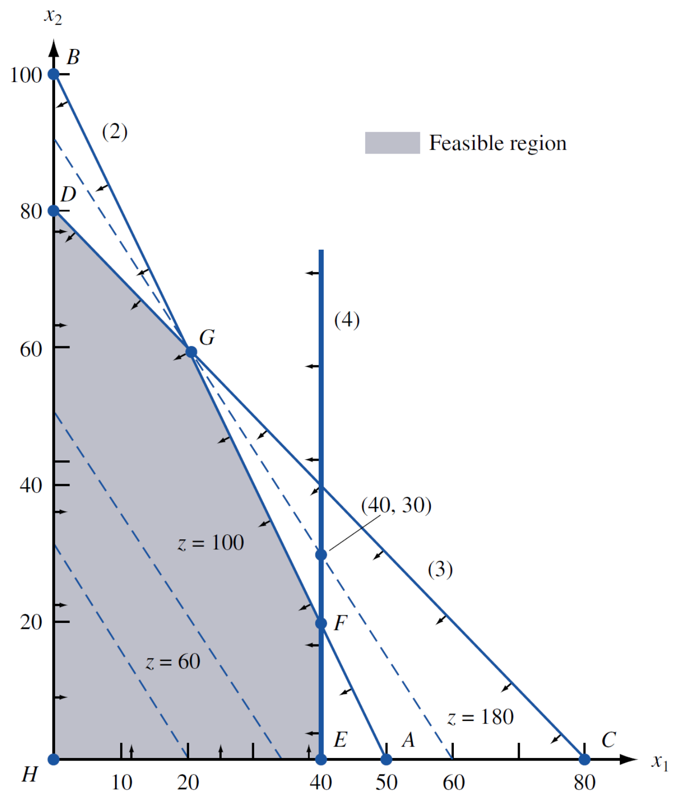
5.1.5 Grafik Çözüm Kullanarak Duyarlılık

Grafik çözümden faydalanarak iki farklı duyarlılık analizi yapabiliriz:

- Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim
- Sağ Tarafta Değişim

<u>Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim</u>

maks	$z = 3x_1 + 2x_2$	(Amaç fonksiyonu)
öyle ki	$2x_1 + x_2 \le 100$	(Cilalama kısıtı-2)
	$x_1 + x_2 \le 80$	(Marangozluk kısıtı-3)
	$x_1 \le 40$	(Talep kısıtı-4)
	$x_1, x_2 \ge 0$	(İşaret sınırlamaları)



Bu modelin grafik çözümündeki eş kar doğruları "$3x_1 + 2x_2$ = sabit" olduğu için:

x_2 = (sabit - $3x_1$)/2 → Eş kar doğruları eğimi: -3/2

Kısıtlar için de:

Cilalama kısıtı eğimi: -2

Marangozluk kısıtı eğimi: -1

Grafikten de görüleceği gibi eş kar doğrusu marangozluk kısıtından daha yatay olursa en iyi çözüm G yerine D noktası olur.

Eş kar doğrusu cilalama kısıtından daha dik olursa en iyi çözüm G yerine F noktası olur.

Örnek

Askerden elde edilen karın (c_1) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? c_1'in değeri değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

Eş kar doğrusu eğimi: $-c_1/2$

G noktasının en iyi çözümü vermesi için eğim -1'den büyük ve -2'den küçük olmamalı.

Bu durumda mevcut çözümün optimalliğinin korunması için:

$-2 \leq -c_1/2 \leq -1 \rightarrow 2 \leq c_1 \leq 4$

c_1 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde G noktası hala en iyi çözümü verdiği için Giapetto yine 20 asker ve 60 tren üretmelidir.

Bu durumda kar $180 + 20\Delta$ olacaktır.

Örnek

Trenden elde edilen karın (c_2) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? c_2'nin değeri değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

Eş kar doğrusu eğimi: $-3/c_2$

G noktasının en iyi çözümü vermesi için eğim -1'den büyük ve -2'den küçük olmamalı.

Bu durumda mevcut çözümün optimalliğinin korunması için:

$-2 \leq -3/c_2 \leq -1 \rightarrow 1.5 \leq c_2 \leq 3$

c_2 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde G noktası hala en iyi çözümü verdiği için Giapetto yine 20 asker ve 60 tren üretmelidir.

Bu durumda kar $180 + 60\Delta$ olacaktır.

Sağ Tarafta Değişim

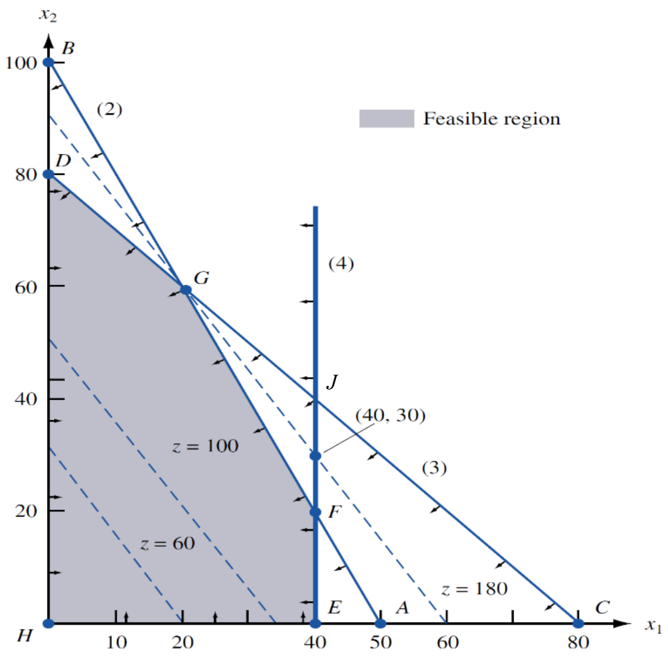
maks $z = 3x_1 + 2x_2$ (Amaç fonksiyonu)

öyle ki $2x_1 + x_2 \leq 100$ (Cilalama kısıtı-2)

$x_1 + x_2 \leq 80$ (Marangozluk kısıtı-3)

$x_1 \leq 40$ (Talep kısıtı-4)

$x_1, x_2 \geq 0$ (İşaret sınırlamaları)



Bu modelin mevcut en iyi çözümü olan G noktasında marangozluk ve cilalama kısıtları çakışmakta (aktif). Kısıt sağ taraf değeri değiştirildiğinde iki kısıtın kesiştiği nokta olurlu bölgede kalmaya devam ederse mevcut çözüm optimalliğini korur.

Örnek

Eldeki cilalama saatinin (b_1) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? b_1'in değeri değişirse yeni en iyi çözüm ne olur?

Yanıt

$100 \leq b_1 \leq 120$ ise en iyi çözüm GJ doğru parçası üzerinde olur.

b_1 120'den büyük olursa yeni cilalama kısıtı (2) gereksiz olur ve aktifliğini yitirir, talep kısıtı (4) aktif olur:

Yeni olurlu bölge: H-E-J-D

En iyi çözüm: J noktası (40, 40)

$80 \leq b_1 \leq 100$ ise en iyi çözüm DG doğru parçası üzerinde olur

b_1 80'den küçük olursa marangozluk kısıtı (3) gereksiz olur ve aktifliğini yitirir, x_1=0 aktif olur:

En iyi çözüm: (0, b_1)

$80 \leq b_1 \leq 120$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.

b_1 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde marangozluk ve cilalama kısıtları aktif olmaya devam edecektir.

$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta$ (Cilalama kısıtı)

$x_1 + x_2 = 80$ (Marangozluk kısıtı)

$x_1 = 20 + \Delta$, $x_2 = 60 - \Delta$; yeni kar = $3 (20 + \Delta) + 2 (60 - \Delta) = 180 + \Delta$

Bu durumda cilalama kısıtının gölge fiyatı 1'dir.

Örnek

Eldeki marangozluk saatinin (b_2) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

$60 \leq b_2 \leq 100$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.

b_2 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde marangozluk ve cilalama kısıtları aktif olmaya devam edecektir.

$2x_1 + x_2 = 100$ (Cilalama kısıtı)

$x_1 + x_2 = 80 + \Delta$ (Marangozluk kısıtı)

$x_1 = 20 - \Delta$, $x_2 = 60 + 2\Delta$; yeni kar = $3 (20 - \Delta) + 2 (60 + 2\Delta) = 180 + \Delta$

Bu durumda marangozluk kısıtının gölge fiyatı 1'dir.

Örnek

Askere olan talebin (b_3) hangi değerleri için mevcut çözüm optimalliğini korur? Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

$20 \leq b_3$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur

b_3 bu aralıklarda Δ kadar değiştiğinde marangozluk ve cilalama kısıtları aktif olmaya devam edecektir

$2x_1 + x_2 = 100$ (Cilalama kısıtı)

$x_1 + x_2 = 80$ (Marangozluk kısıtı)

$x_1 = 20$, $x_2 = 60$; kar = 180

Bu durumda talep kısıtının gölge fiyatı 0'dır

5.1.6 %100 Kuralı

Modelde birden fazla parametrenin değeri değişirse %100 kuralı kullanılır. Söz konusu değişimler:

- Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim
- Sağ Tarafta Değişim

<u>Amaç Fonksiyon Katsayısında Değişim</u>

DURUM 1:

Modelde Amaç Fonksiyon Katsayısı değişen tüm değişkenlerin indirgenmiş maliyeti sıfırdan farklı ise Durum 1 söz konusudur.

- Değişkenlerin amaç fonksiyon katsayısındaki değişimleri izin verilen aralıklarda ise mevcut çözüm optimalliğini korur.
- En az bir değişim izin verilen aralıkta değilse mevcut çözümün optimalliği bozulur.

DURUM 2:

Amaç Fonksiyon Katsayısı değişen en az bir değişkenin indirgenmiş maliyeti sıfır ise Durum 2 söz konusudur ve %100 kuralı uygulanır:

$\Delta c_j \geq 0 \text{ ise } r_j = \frac{\Delta c_j}{I_j}$ I_j: izin verilen artış

$\Delta c_j \leq 0 \text{ ise } r_j = \frac{-\Delta c_j}{D_j}$ D_j: izin verilen azalış

- $\sum r_j \leq 1$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur
- $\sum r_j > 1$ ise mevcut çözümün optimalliğini koruması hakkında emin olamayız

Örnek

Kekin (x_1) satış fiyatı 50¢ yerine 60¢ olursa ve pastanın (x_4) satış fiyatı 80¢ yerine 50¢ olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	27.500000
X4	0.000000	50.000000

Her iki karar değişkeni de temel dışı değişken olduğu için DURUM 1 söz konusudur.

	OBJ COEFFICIENT RANGES		
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	50.000000	INFINITY	27.500000
X4	80.000000	INFINITY	50.000000

Değişimler izin verilen aralıklarda: mevcut çözüm optimal kalır.

En iyi çözümdeki karar değişkeni ve amaç fonksiyon değerleri değişmez.

Örnek

Kekin (x_1) satış fiyatı 50¢ yerine 40¢ olursa ve pastanın (x_4) satış fiyatı 80¢ yerine 25¢ olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	27.500000
X4	0.000000	50.000000

Fiyatı değişen her iki karar değişkeni de temel dışı değişken olduğu için DURUM 1 söz konusudur.

	OBJ COEFFICIENT RANGES		
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	50.000000	INFINITY	27.500000
X4	80.000000	INFINITY	50.000000

Pastanın satış fiyatı izin verilen aralıkta değil: mevcut çözümün optimalliği bozulur.

En iyi çözümü bulmak için problem yeniden çözülmelidir.

Örnek

Sıranın (x_1) satış fiyatı \$60 yerine \$70 olursa ve sandalyenin (x_3) satış fiyatı \$20 yerine \$18 olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	2.000000	0.000000
X3	8.000000	0.000000

Fiyatı değişen en az bir karar değişkeni temel değişken olduğu için DURUM 2 söz konusudur.

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	60.000000	20.000000	4.000000
X3	20.000000	2.500000	5.000000

$\Delta c_1 = 10,\ I_1 = 20,\ r_1 = \frac{10}{20} = 0.5;\quad \Delta c_3 = -2,\ D_3 = 5,\ r_3 = \frac{2}{5} = 0.4$

$r_1 + r_2 + r_3 = 0.9\ \leq 1\ \rightarrow$ Mevcut çözüm optimal kalır

En iyi çözümdeki karar değişkeni değerleri değişmez.

Yeni kar = 280 + 2 (10) + 8 (-2) = 284

Örnek

Sıranın (x_1) satış fiyatı \$60 yerine \$58 olursa ve masanın (x_2) satış fiyatı \$30 yerine \$33 olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	5.000000

Fiyatı değişen en az bir karar değişkeni temel değişken olduğu için DURUM 2 söz konusudur.

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	60.000000	20.000000	4.000000
X2	30.000000	5.000000	INFINITY

$\Delta c_1 = -2,\ D_1 = 4,\ r_1 = \frac{2}{4} = 0.5;\quad \Delta c_2 = 3,\ I_2 = 5,\ r_3 = \frac{3}{5} = 0.6$

$r_1 + r_2 + r_3 = 1.1 > 1\ \rightarrow$ Mevcut çözümün optimalliği hakkında bilgimiz yok

Sağ Tarafta Değişim

DURUM 1:

Modelde Sağ Tarafı değiştirilen tüm kısıtlar aktif (sıkı) olmayan kısıtlarsa Durum 1 söz konusudur.

- Sağ tarafların değişimleri izin verilen aralıklarda ise mevcut çözüm optimalliğini korur
- En az bir değişim izin verilen aralıkta değilse mevcut çözümün optimalliği bozulur

DURUM 2:

Modelde Sağ Tarafı değiştirilen kısıtlardan en az biri aktif (sıkı) kısıtsa Durum 2 söz konusudur ve %100 kuralı uygulanır:

$\Delta b_i \geq 0$ ise $r_i = \frac{\Delta b_i}{I_i}$ I_i: izin verilen artış

$\Delta b_i \leq 0$ ise $r_i = \frac{-\Delta b_i}{D_i}$ D_i: izin verilen azalış

- $\sum r_i \leq 1$ ise mevcut çözüm optimalliğini korur.
- $\sum r_i > 1$ ise mevcut çözümün optimalliğini koruması hakkında emin olamayız.

Örnek

Kalori gereksinimi 500 cal. yerine 400 cal. olursa ve yağ gereksinimi 8 oz. yerine 10 oz. olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
CALORIE)	250.000000	0.000000
FAT)	5.000000	0.000000

Her kısıt da aktif değil: DURUM 1 söz konusudur.

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
CALORIE	500.000000	250.000000	INFINITY
FAT	8.000000	5.000000	INFINITY

Değişimler izin verilen aralıklarda: mevcut çözüm optimal kalır.

En iyi çözümdeki karar değişkeni ve amaç fonksiyon değerleri değişmez.

Örnek

Kalori gereksinimi 500 cal. yerine 400 cal. olursa ve yağ gereksinimi 8 oz. yerine 15 oz. olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
CALORIE)	250.000000	0.000000
FAT)	5.000000	0.000000

Her kısıt da aktif değil: DURUM 1 söz konusudur.

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
CALORIE	500.000000	250.000000	INFINITY
FAT	8.000000	5.000000	INFINITY

Yağ kısıtının sağ taraf değişimi izin verilen aralıkta değil: mevcut çözümün optimalliği bozulur.

En iyi çözümü bulmak için problem yeniden çözülmelidir.

Örnek

Kullanılabilecek cilalama 20 saat yerine 22 saat olursa ve marangozluk 8 saat yerine 9 saat olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
finishinq)	0.000000	10.000000
carpentry)	0.000000	10.000000

Sağ tarafı değişen en az bir kısıt aktif olduğu için DURUM 2 söz konusudur.

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLLOWABLE DECREASE
finishinq	20.000000	4.000000	4.000000
carpentry	8.000000	2.000000	1.333333

$\Delta b_2 = 2,\ I_2 = 4,\ r_2 = \frac{2}{4} = 0.5;\quad \Delta b_3 = 1,\ I_3 = 2, r_3 = \frac{1}{2} = 0.5$

$r_2 + r_3 = 1 \rightarrow$ Mevcut çözüm optimal kalır

Sağ taraf değerleri değiştiği için en iyi çözümdeki karar değişkeni ve amaç fonksiyon değerleri değişebilir.

Örnek

Çikolata gereksinimi 6 oz. yerine 8 oz. olursa ve şeker gereksinimi 10 oz. yerine 7 oz. olursa mevcut çözümün optimalliği korunur mu?

Değişim sonrası yeni çözüm ne olur?

Yanıt

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
CHOCO)	0.000000	-2.500000
SUGAR)	0.000000	-7.500000

Sağ tarafı değişen en az bir kısıt aktif olduğu için DURUM 2 söz konusudur.

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
CHOCO	6.000000	4.000000	2.857143
SUGAR	10.000000	INFINITY	4.000000

$\Delta b_2 = 2,\ I_2 = 4,\ r_2 = \frac{2}{4} = 0.5;\quad \Delta b_3 = -3,\ D_3 = 4, r_3 = \frac{3}{4} = 0.75$

$r_2 + r_3 = 1.25 > 1$ $\rightarrow$ <u>Mevcut çözümün optimalliği hakkında bilgimiz yok</u>