Katı Cismin Uç Boyutlu Hareketi

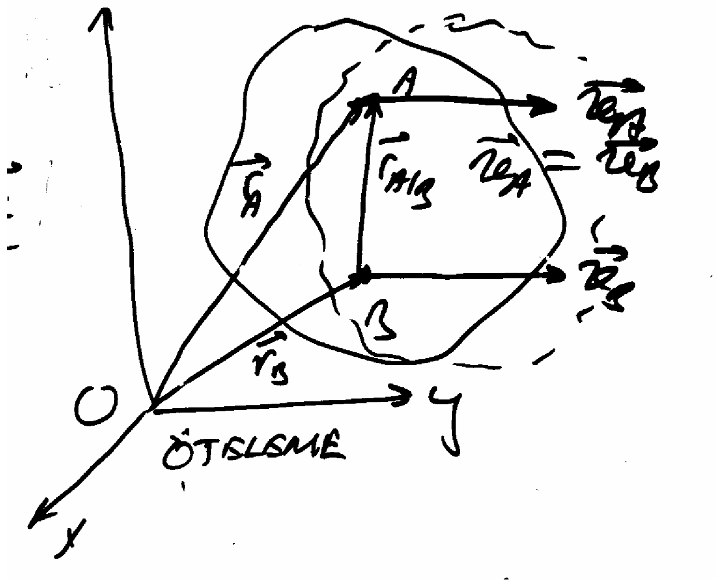
KİNEMATİK

7/2 Öteleme :

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B}\,, \quad \dot{\vec{r}}_{A/B}$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}$$



7/3 Sabit Eksen Etrafında Dönme :

Hız :

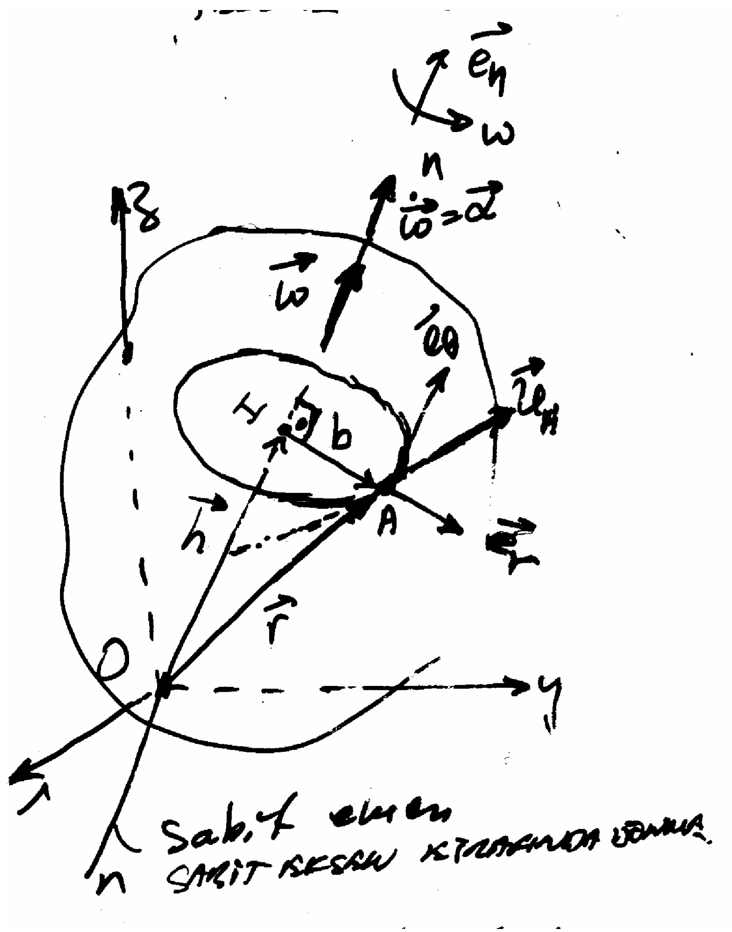
$$O\vec{A} = \vec{r} = \vec{h} + \vec{b} = h\vec{e}_n + b\vec{e}_r$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 + b\dot{\vec{e}}_r = b\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v}_A = bw\vec{e}_\theta$$

$$\vec{w}x\vec{r} = w\vec{e}_n x(h\vec{e}_n + b\vec{e}_r)$$

$$\vec{w}x\vec{r} = bw\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{v}_A = bw\vec{e}_\theta = \vec{w}x\vec{r} = \dot{\vec{r}}$$



İvme :

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{w}x\vec{r})$$

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{w}}x\vec{r} + \vec{w}x\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{w}}x\vec{r} + \vec{w}x(\vec{w}x\vec{r}),$$

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{w}}x\vec{r} + (\vec{w}\bullet\vec{r})\vec{w} - (\vec{w}\bullet\vec{w})\vec{r}$$

$$\dot{\vec{w}}x\vec{r} = \dot{w}\vec{e}_n x(h\vec{e}_n + b\vec{e}_r) = \dot{w}b\vec{e}_\theta = \vec{a}_t$$

$$a_t = \dot{w}b = \alpha b$$

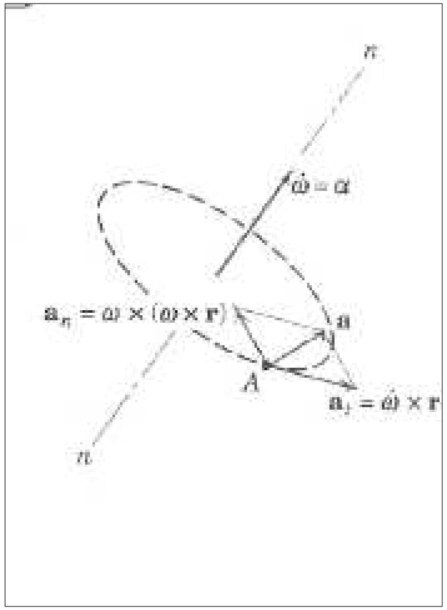
$$\vec{a}x(\vec{b}x\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{w}x\vec{w}x\vec{r} = w\vec{e}_n x[\vec{w}\vec{e}_n x(h\vec{e}_n + b\vec{e}_r)]$$

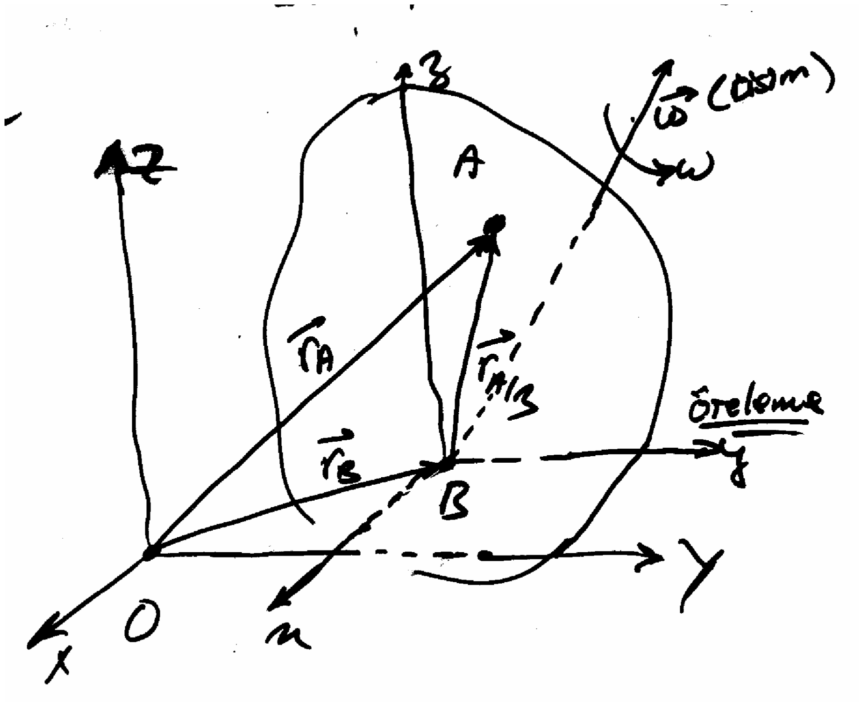
$$\vec{a}_n = \vec{w}x\vec{w}x\vec{r} = w\vec{e}_n x(bw\vec{e}_\theta) = -bw^2\vec{e}_r \rightarrow \quad Normal \qquad İvme$$

$$\vec{a}_n = bw^2$$

$$\vec{v}.\vec{w} = 0, \quad \vec{v}.\dot{\vec{w}} = 0, \quad \vec{a}.\vec{w} = 0, \quad \vec{a}.\dot{\vec{w}} = 0$$



A) Üç Boyutlu Genel Katı Cisim Hareketi (Öteleme yapan x-y-z Eksenler)



Bağıl hareket kavramını üç boyutlu harekete genelleştirerek inceleyeceğiz. XYZ sabit eksen takımını, xyz ise hareketli eksen takımını ifade etsin.

$\vec{w}$ açısal hız vektörü, $\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$, $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$ idi. Düzlemsel harekette elde ettiğimiz bu ifadeler aynen üç boyutlu harekette de geçerlidir. Sadece $A\overline{B}$ uzaklığının sabitliğine dikkat edilmelidir. xyz ile aynı ötelemeyi yapan B 'deki gözlemciye göre, katı cismin A noktası merkezinde B olan bir küre yüzeyinde kalır. Yani, katı cismin üç boyutlu genel hareketini B 'nin ötelemesi + B etrafında katı cismin dönmesinin süperpozisyonu olarak görebiliriz.

NOT: $\vec{r}_{A/B} = B\vec{A}$ vektörü katı cisme değişmez olarak bağlıdır. Aynen $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{w}x\vec{i}$, $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{w}x\vec{i}$ ifadelerinde olduğu gibi, $\frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} = \vec{w}x\vec{r}_{A/B}$ biçiminde yazılabilir.

$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}) = \vec{v}_B + \frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} = \vec{v}_B + \vec{w}x\vec{r}_{A/B}$ sonucu elde edilir.

İvme :

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B + \vec{w}x\vec{r}_{A/B}) = \vec{a}_B + \dot{\vec{w}}x\vec{r}_{A/B} + \vec{w}x\dot{\vec{r}}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{w}}x\vec{r}_{A/B} + \vec{w}x(\vec{w}x\vec{r}_{A/B})$$

biçiminde ivmeler alanı elde edilir.

$\vec{w}$: Katı cismin ani dönme vektörü
$\dot{\vec{w}}$: Katı cismin açısal ivmesi

Not : xyz ekseni A' da alınırsa;

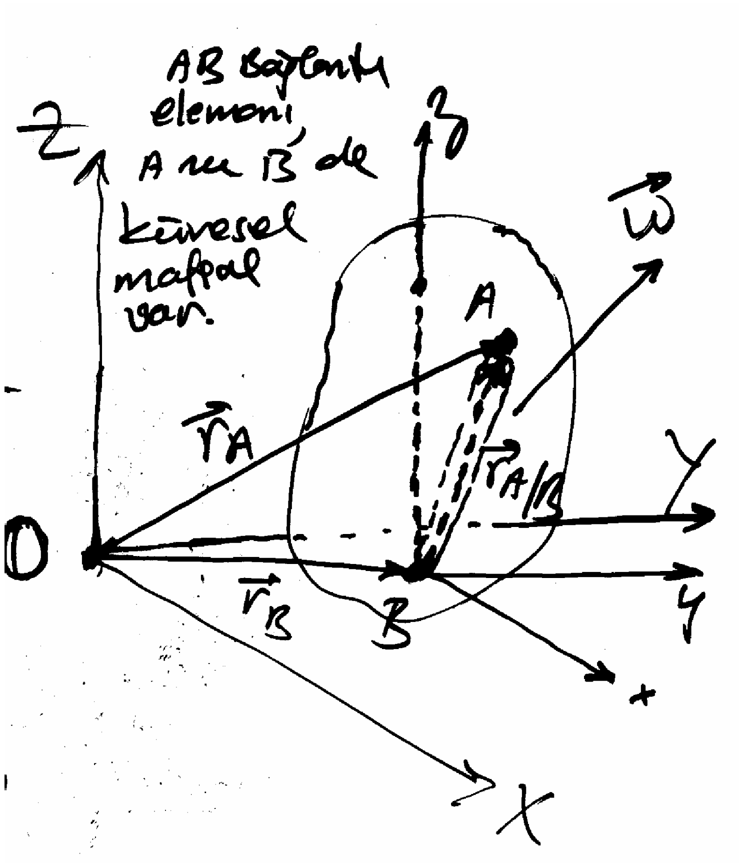
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w} x \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{w}} x \vec{r}_{B/A} + \vec{w} x (\vec{w} x \vec{r}_{B/A}), \quad \vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$$

biçimindedir.

Not : B noktasının katı cisim üzerinde hızı bilinen bir nokta olarak seçmek faydalıdır.

Not : Eğer şekildeki A ve B noktaları katı cismin uzaysal mekanizmasının rijid kontrol bağlantı uçları iseler ki bu tür bağlantı elemanları küresel mafsal (ball and socket) şeklinde uçlarından bağlanırlar. Bağlantı



kolunun (AB ’nin) kendi ekseni etrafındaki herhangi bir dönmesi AB ‘nin sistem üzerindeki etkisini etkilemez. Böylece AB ’nin etkisini AB ’ye dik olan $\vec{w}_n$ temsil eder. Bu da bize,

$\vec{w}_n \perp B\vec{A} \Rightarrow \vec{w}_n \cdot \vec{r}_{A/B} = 0$ şartını verir. Benzer şekilde AB ‘nin açısal ivmesinin etkisini AB’ ye dik olan $\vec{\alpha}_n \cdot B\vec{A}$=0 denklemini verir. Bu son iki denklem problem çözümünde eksik kalan denklem sayısını verir.

B) Dönen Referans Sistemine Göre Genel Hareket

Katı cismin üç boyutlu hareketinde genel hareketin (öteleme ve dönme) tam olarak açıklayabilmek için, hareketli ekse takımının (xyz) hareketini de genel hareket (öteleme ve dönme) olarak almak gerekir. xyz ‘nin açısal hızı $\vec{\Omega}$ ve orijini B noktasıdır. xyz ‘nin açısal hız vektörü $\vec{\Omega}$ ile katı cismin $\vec{w}$ açısal hız vektörü farklı olabilir,

Hız :

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \Rightarrow \vec{v}_A = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}) = \vec{v}_B + \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{Bağ} + \dot{x}\vec{\Omega}x\vec{i} + \dot{y}\vec{\Omega}x\vec{j} + 2\vec{\Omega}x\vec{k}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{Bağ} + \vec{\Omega}x\vec{r}_{A/b}$$

İvme :

$$\vec{a}_A = \frac{dv_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B + \vec{v}_{Bağ} + \vec{\Omega}x\vec{r}_{A/B})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \frac{d}{dt}(\vec{v}_{Bağ}) + \dot{\vec{\Omega}}x\vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega}x\frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt}$$

Not :

5inci bölümde xyz ekseninde yazılan herhangi bir vektörün XY eksen takımındaki türevi:

$\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_{XY} = \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_{xy} + \vec{w}x\vec{v}$ biçimde unutmamışlardır. Bu ifadenin 3 boyutlu ifadesi

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{Bağ}\Big|_{XYZ} = \frac{d\vec{v}_{Bağ}}{dt}\Big|_{xyz} + \vec{\Omega}x\vec{v}_{Bağ}$$ ifadesi elde edilir. Buna göre,

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{A/B}\Big|_{XYZ} = \frac{d\vec{v}_{Bağ}}{dt}\Big|_{xyz} + \vec{\Omega}x\vec{v}_{Bağ}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \frac{d\vec{v}_{Bağ}}{dt} + \vec{\Omega}x\vec{v}_{Bağ} + \dot{\vec{\Omega}}x\vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega}x(\frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} + \vec{\Omega}x\vec{r}_{A/B})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Bağ} + \vec{\Omega}x\vec{v}_{Bağ} + \dot{\vec{\Omega}}x\vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega}x\vec{v}_{Bağ} + \vec{\Omega}x(\vec{\Omega}x\vec{r}_{A/B})$$

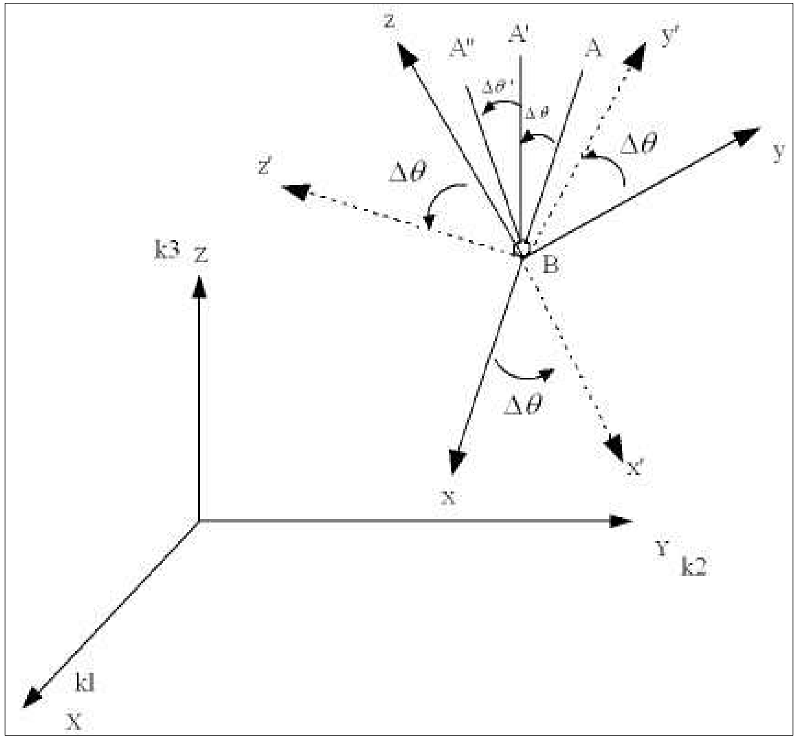
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{Bağ} + 2\Omega x\vec{v}_{Bağ} + \dot{\vec{\Omega}}x\vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega}x(\vec{\Omega}x\vec{r}_{A/B})$$

$$\vec{v}_{Bağ} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \Rightarrow \vec{a}_{bağ} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

biçimlerini alır.

Katı Cismin Bağıl Dönmesi

x-y-z eksen takımını katı cismin herhangi B noktasına bağlayalım. $B\overline{A}$ dat katı cismin sabit uzaklığıdır. Katı cismin sabit OXYZ 'ye göre dönmesi $\Delta\theta$ olsun. Yani xyz ekseni $\Delta\theta$ kadar dönsün. Aynı dönmeyi $A\overline{B}$ doğrusuda yapar. Ayrıca, $B\overline{A}$ doğru parçasının xyz 'ye göre $\Delta\acute{\theta}=\Delta\theta_{bağıl}$ dönmesine izin verelim. Böylece $A\overline{B}$ 'nin toplam dönmesi; OXYZ 'ye göre $\Delta\theta$ ile Bxyz' ye göre $\Delta\acute{\theta}=\Delta\theta_{bağıl}$ dönmelerinin toplamı kadar olur. Toplam dönme $\Delta\vec{\theta}_T = \Delta\vec{\theta} + \Delta\vec{\theta}_{bağ}$ yazılır. Δθ ile bölünüp limite geçilerek,



$$\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{\theta}_{bağ}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{w}_T = \vec{\Omega} + \vec{w}_{bağ}$$ ifadesi bulunur.

Üç boyutlu harekette,

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i}_1 + \Omega_y \vec{j}_1 + \Omega_z \vec{k}_1$$

$$\vec{w}_{bağ} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$$

biçiminde olabilir.

$$\vec{w}_T = \vec{\Omega} + \vec{w}_{bağ} = \Omega_x \vec{i}_1 + \Omega_y \vec{j}_1 + \Omega_z \vec{k}_1 + w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$$

$\vec{\Omega}$: Katı cismin OXYZ' ye göre açısal hız vektörü,

$\vec{w}_{bağ}$: Katı cismin hareketli eksen takımına göre açısal hız vektörü.

Not :

OXYZ ile Bxyz paralel ise,

$\vec{i}_1 = \vec{i}\,; \vec{j}_1 = \vec{j}\,; \vec{k}_1 = \vec{k}$ alınır. Aksi halde $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ cinsinden yada tam tersi yazılmalıdır.

Toplam Açısal İvme

$$\vec{\alpha}_T = \frac{d\vec{w}_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\Omega} + \vec{w}_{bağ})$$

$$\vec{\alpha}_T = \dot{\Omega}_x \vec{i}_1 + \dot{\Omega}_y \vec{j}_1 + \dot{\Omega}_z \vec{k}_1 + \dot{w}_x \vec{i} + \dot{w}_y \vec{j} + \dot{w}_z \vec{k} + w_x \dot{\vec{i}} + w_y \dot{\vec{j}} + w_z \dot{\vec{k}}$$

$$\vec{\alpha}_T = \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\alpha}_{bağ} + w_x(\vec{\Omega} x \vec{i}) + w_y(\vec{\Omega} x \vec{j}) + w_z(\vec{\Omega} x \vec{k})$$

$$\vec{\alpha}_T = \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\alpha}_{bağ} + \vec{\Omega} x \vec{w}_{bağ}$$

ifadesi elde edilir

$\dot{\vec{\Omega}}$: Katı cismin (Bxyz) OXYZ ‘ye göre açısal ivmesidir

$\vec{\alpha}_{bağ}$: $B\overline{A}$ parçasının Bxyz ’ye göre açısal ivmesidir.

Not :

Düzlemsel harekette $\vec{\Omega}$ ile $\vec{w}$ aynı doğrultulu olurlar. $\vec{\Omega} x \vec{w}_{bağ} \equiv 0$ yazılır.

Düzlemsel halde toplam açısal ivme ise,

$\vec{\alpha}_T = \dot{\vec{\Omega}} + \vec{\alpha}_{bağ}$ şeklinde yazılır.

Not :

Eğer $\vec{\Omega}$ sabit ise (Büyüklüğü ve doğrultusu değişmiyorsa) $\dot{\vec{\Omega}} = 0$ yazılır. Aynı hal $\vec{w}_{bağ}$ için de var ise $\vec{\alpha}_{bağ} = \dot{\vec{w}}_{bağ} \equiv 0$ alınır. Bu durumda toplam ivme $\vec{\alpha}_T = \vec{\Omega} x \vec{w}_{bağ}$ şeklinde elde edilir. ($\vec{\Omega}$ ve $\vec{w}$ 'nın sabit olduğu hal)

Bunlara ilave olarak eğer hareketler düzlemsel ise $\vec{\Omega} // \vec{w}_{bağ} \Rightarrow \vec{\Omega} x \vec{w}_{bağ} = 0$ olur ve böylece sabit açısal hız ile düzlemsel hareket yapan katı cismin bağıl hareketinde toplam açısal ivme $\vec{\alpha}_T = 0$ alınır. ($\vec{\Omega}$ ve $\vec{w}$ sabit, hareket düzlemsel)