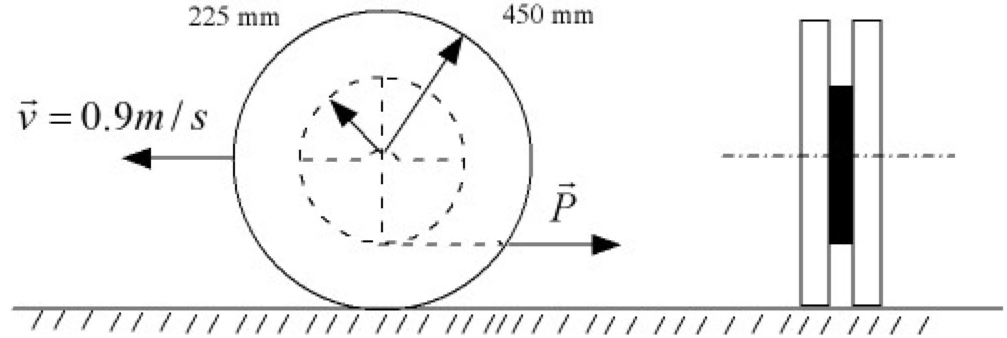
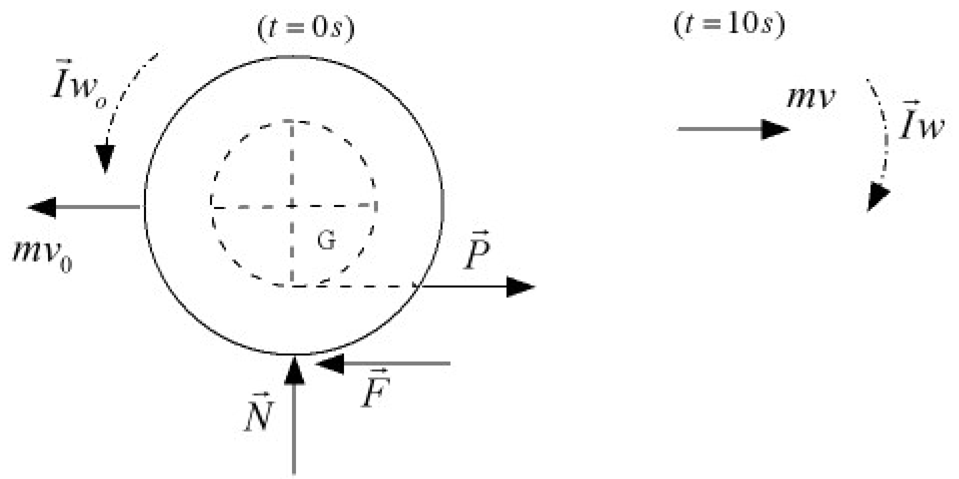
Örnek Problem 6/14 :

Şekildeki simetrik kablo makarasının merkez silindirine yavaş yavaş artan $P = 6.5t$ N kuvveti tatbik ediliyor. Makaranın u açısal hızını, P kuvvetinin 10 saniye uygulanması sonunda bulunuz. Makara sola doğru $t = 0$ anında $v = 0.9m/s$ merkezi hızı ile yuvarlanıyor. Tekerleğin kütlesi 60km ve atalet yarıçapı merkeze göre k=250 mm olup kayma yoktur.



<u>Çözüm :</u>

Serbest cisim diyagramı hareketin herhangi bir anında yandaki şekildeki gibidir. Ayrıca $t = 0$ ve $t = 10s$ için lineer ve açısal momentumlar görülmektedir. $\vec{F}$ sürtünme kuvvetinin doğru yönü kaymaya



zıt ve kayma sürtünmesiz halde ortaya çıkar. Tüm hareket alanında impuls-momentum ve açısal impuls – açısal momentum denklemlerini kullanarak :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F_x dt = G_{x_2} - G_{x_1} \Rightarrow \int_0^{10} (6.5t - F)dt = 60[0.45w - (-0.9)]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_G dt = H_{G_2} - H_{G_1} \Rightarrow \int_0^{10} 0.45F - 0.225(6.5t)dt = 60(0.250)^2[w - (-\frac{0.9}{0.450})]$$

İkinci denklemi 0.450 ile çarpıp birinci denklem ile toplarsak F elimine olur. İntegral alınır ve çözülürse $w = 2.60 rad/s$ saat yönünde elde edilir.

<u>İkinci Çözüm</u> :

Yatay yüzey üzerindeki sabit bir O noktasına $\int_{t_1}^{t_2} \sum M_0 dt = I_0(w_2 - w_1)$ denklemini tatbik ederek yukarıdaki ikinci denklemin ortak çözümünün sonucunu bulunuz.

$W = 60(9.81)N$ (Ağırlık) ve $\vec{N}$ normal tepkisinin eşitliğinden bunlar birbirlerini etkisiz kılarlar. $\vec{F}$ in O'ya göre momenti sıfırdır. Böylece O noktasına göre açısal momentum,

$$H_0 = \vec{I}w + m\vec{v}r = mk^{-2}w + mr^2 w$$

$$H_0 = m(k^{-2} + r^2)w \qquad r = 0.450$$

r = yuvarlanma yarıçapı

Böylece $H_0 = H_C$ olduğunu $k^{-2} + r^2 = K_C{}^2$ ve $H_C = I_C w = mK_C{}^2 w$ dan anlarız.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = H_{O_2} - H_{O_1} \Rightarrow \int_0^{10} 6.5t(0.450 - 0.225)dt = 60[(0.250)^2 + (0.450)^2[w - (-\frac{0.9}{0.450})]$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ilk çözümdeki ili denklemin ortak çözümüne denk olur. Aynı w açısal değerini verir.

Örnek Problem 6/15 :

Şekildeki E çıkrığının kütlesi 30kg ve merkezi atalet çapı 250 mm'dir. 40 kg'lık D bloğu A kasnağı tarafından saat yönündeki bir moment sonunda $F = 380N = sbt$ kuvveti ile yukarı çekilmektedir. Saat yönündeki moment uygulandığı anda D 'nin hızı aşağı doğru $v_0 = 1.2m/s$'dır. Çıkrığın w açısal hızını ve kablodaki T gerilmesini moment uygulandıktan 5 saniye sonra hesaplayınız. Sürtünme yoktur.

Çözüm :

Çıkrık ve yükü birlikte tek sistem alırız. T ve w isteniyor. Moment – açısal momentum denklemini saatin ters yönünü pozitif alarak sabit O noktasına göre yazarsak T elimine olur.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = H_{O_2} - H_{O_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = \int_0^5 [380(0.750) - (30+40)(9.81)(0.375)]dt = 137.4 Nms$$

$$(H_{O_1} - H_{O_2})_D = mv_2 d - mv_1 d = md(v_2 - v_1) = 40(0.375)[v - (-1.2)]$$

$$(H_{O_1} - H_{O_2})_D = 15(0.375w + 1.2) = 5.63w + 18 Nms$$

$$(H_{O_1} - H_{O_2})_E = \bar{I}(w_2 - w_1) + md(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 30(0.250)^2[w - (-1.2/0.375)] + 30(0.375[0.375w - (-1.2)])$$

$$(H_{O_1} - H_{O_2})_E = 6.09w + 19.50 Nms$$

Bunları momentum denkleminde yazarsak

$$137.4 = 5.63w + 18 + 6.09w + 19.50$$

$$w = 8.53 rad/s$$

Şimdi lineer momentum denkleminin uygulanmasında T elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum F dt = G_2 - G_1 \Rightarrow \int_0^5 [T + 380(70)(9.81)] dt = 70[0.375(8.53) - (-1.2)]$$

$$5T = 1841 \Rightarrow T = 368N$$

Not : Eğer momentum denklemini O yerine C merkezine göre yazarsak hem T hem w bileşenleri yer alır. Bu durumda yukarıdaki denklemlerle ortak çözüm aramak zorunda kalınır.

b) Momentumun Korunumu

Eğer $\sum F = 0$ ise lineer momentumun değişimi için $\Delta G = 0$ yazabiliriz. Eğer $\sum M = 0$ veya $\sum M_G = 0$ ise açısal momentumun değişimi için $\Delta H_0 = 0$ veya $\Delta H_G = 0$ yazabiliriz.

Problem 6/16 :

Üniform (kütlesi eşit dağıtılmış) bir dikdörtgen blok sola doğru v hızı ile kayarken yüzeydeki ufak bir çıkıntıya çarpıyor. Çarpışma esnasında geri sıçramayı ihmal ederek bloğun O noktası etrafında döndüğü kabulünü yaparak;

a) Bloğun hızsız bir şekilde dik pozisyona ulaşması için gerekli asgari (minimum) v hızını bulunuz.

b) b=c için geçerli kayıp yüzdesi $\frac{\Delta E}{E}$ 'yi hesaplayın.

Çözüm :

O eşiğinin bloğu O etrafında döndürecek özellikte olduğunu varsayalım. O eşiğinin yüksekliği bloğun boyutları yanında ihmal edilebilir. Çarpma boyunca O'ya moment kazandırıcı yegane kuvvet ağırlıktır. Çarpma zamanı ihmal edilebilir olduğundan ağırlığın açısal impulsı son derece küçük olur. Bu nedenle O noktasına göre açısal momentum korunumludur. Bloğun çarpmadan hemen önceki açısal momentumu lineer momentumdur ve $H_0 = mv(\frac{b}{2})$. Çarpmadan hemen sonra bloğun G merkezinin hızı $\vec{v}$ ve $w = \frac{v}{r}$'dıı . Çarpmadan hemen sonra, yani bloğun dönmeye başladığı anda açısal momentumun (O'ya göre)

$$H_0 = I_0 w \Rightarrow H_0 = \{\frac{1}{12} m(b^2 + c^2) + m[(\frac{c}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2]\} w$$

$$H_0 = \frac{m}{3}(b^2 + c^2) w$$

Açısal momentumun korunumu,

$$\Delta H_0 \Rightarrow \frac{m}{3}(b^2 + c^2) w = mv\frac{b}{2}$$

$$w = \frac{3vb}{2(b^2 + c^2)}$$

biçiminde bulunur. Bu açısal hız, dönmenin kinetik enerjisi potansiyel enerjideki artmaya eşit ise A bloğunu son konuma kaldırmaya yeterli olacaktır. Yani,

$$\Delta T + \Delta V_G = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} I_0 w^2 - mg[\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2} - \frac{b}{2}] = 0$$

$$0.5\frac{m}{3}(b^2 + c^2)[\frac{3vb}{2(b^2 + c^2)}]^2 - 0.5mg(\sqrt{b^2 + c^2} - b) = c$$

$$v = 2\sqrt{\frac{g}{3}(1 + \frac{c^2}{b^2})(\sqrt{b^2 + c^2} - b)}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{0.5mv^2 - 0.5I_0 w^2}{0.5mv^2} = 1 - \frac{I_0 w^2}{mv^2} = 1 - (\frac{b^2 + c^2}{3})[\frac{2b}{2(b^2 + c^2)}]^2$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{3}{4(1 + \frac{c^2}{b^2})} = 62.5\%, \quad b = c$$