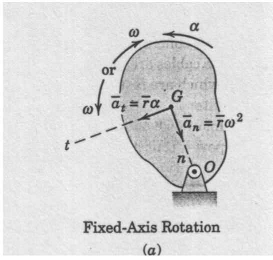


Şekil 1:

0.1 Öteleme

Öteleme hareketi yapan bir cismin her doğrusu her zaman kendine paralel kalır. Öteleme hareketi doğrusal ve eğrisel öteleme olmak üzere ikiye ayrılır. Her iki durumda da w ve α sıfıra eşittir. Bundan dolayı hareketin denklemlerini $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a_G}$ ve $\mathbf{M}_G = I_G\alpha$ şeklinde yazabiliriz.

0.2 Sabit bir eksen etrafında dönme

Genel düzlemsel hareketin denklemleri burada da geçerlidir. Bunları yeniden yazarsak :

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a_G}, \sum \mathbf{M}_G = I_G\alpha = 0$$

Yukarıdaki ilk eşitliğin iki skaler bileşimi : $\sum F_n = mr_Gw^2, \sum F_t = mr_G\alpha$idi. Bu iki skaler denkleme bir üçüncüsü de $\sum M_G = I_G\alpha$ eklenerek eğrisel koordinatlarda istenenler çözülür.

Kartezyen koordinatlarda ise :

$$\sum F_x = ma_x \; ; \; \sum F_y = ma_y$$

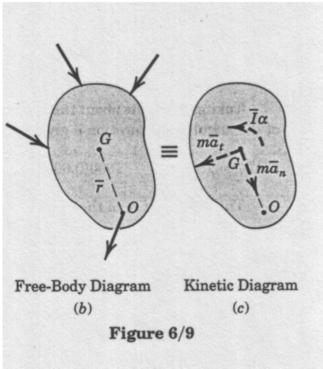
ve

$$\sum M = I_G\alpha$$

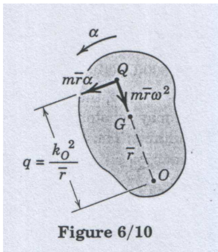
denklemleri kullanılır. Diğer koordinatlar için benzer işlemler yürütülür.

0.3 Sabit Nokta Etrafında Dönme (Düzlemsel)

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\sum F_t = mr_G\alpha = ma_t \\ &\sum F_n = mr_Gw^2 = ma_n \\ &\qquad \text{ve} \\ &\sum M = I_G\alpha \end{aligned}$$



Şekil 2:



Şekil 3:

G (kütle merkezi) noktasına göre moment alırken rijit cisme etki eden reaksiyon kuvvetinide gözönüne almalıyız.

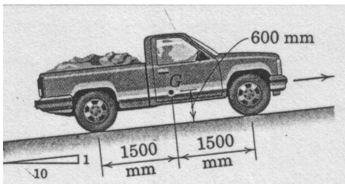
Şimdi rijit cismin O noktasına göre moment denklemini gözönüne alalım: $\sum M_O = I_O\alpha$ idi. Şekilden O noktasına göre toplam moment $\sum M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t r_G$ yazılır.

Atalet momenti için paralel eksen teoremini uygularsak, $(a_G)_t = r_G\alpha$ yazılarak, $I_O = I_G + m(r_G)^2$ elde edilir. Böylece; $\sum M_O = (I_O - mr_G^2)\alpha + mr_G^2\alpha = I_O\alpha$ aynı sonucu elde ederiz.

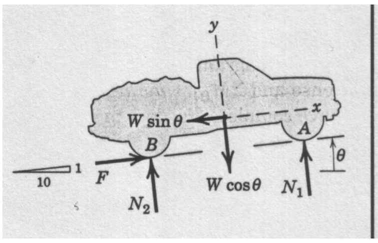
$$\text{Sonuç:} \left\{ \begin{array}{ll} \sum \mathbf{F} & = \quad m\mathbf{a}_G \\ \sum M_O = I_O\alpha & \end{array} \right\} \text{Hareket Denklemleeri}$$

Özel durum: Rijit cismin kütle merkezi etrafında dönmesi durumunda $\mathbf{a}_G = 0$ böylece $\sum \mathbf{F} = 0$ uygulanan kuvvetlerin momenti $I_G\alpha$'ya eşittir.

Genel Durum: $\bar{I}\alpha$ ve $m(a_G)_t$ yerine $m(a_G)_t$ yi paralel bir konuma kaydırıp ilk duruma denk bir durum elde edebiliriz.



Şekil 4:



Şekil 5:

O'ya göre moment için $\sum M_O = q(mr_G\alpha)$ ve ayrıca $\sum M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t r_G = (I_G - mr_G^2)\alpha$ yazılarak birbirine eşitlenirse:

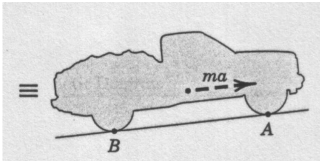
$$q(mr_G\alpha) = (I_G - mr_G^2)\alpha = I_O\alpha \Rightarrow mr_G q = I_O$$

bulunur. $I_O = k_O^2 m$ bağıntısını kullanalım. (k_O, O noktasına göre jirasyon çapı) buradan $q = k_O^2/r_G$ elde edilir. Q noktası vurma-çarpma merkezi olarak adlandırılır. Bu noktaya göre tüm kuvvetlerin momenti 0 dır($M_Q = 0$). Çünkü cisme etkiyen toplam kuvvet Q çarpma merkezinden(percussion center) geçiyor demektir. Bu da katı cisme etkiyen kuvvet sisteminin Q noktasında bir tek kuvvete indirgenmesi demektir.

Örnek Problem 6/1: şekildeki araç sukunetten başlıyarak 60 m de 50 km/h hızına ulaşmaktadır. Aracın kütlesi 1500 kg dir. Her tekerlek çiftine etki eden normal kuvveti ve arka tekerleğe etkiyen sürtünme kuvvetini hesaplayınız. Etkili sürtünme katsayısı $\mu = 0.8$ veriliyor.(en az)

Çözüm 6/1: Tekerleklerin kütlesini ihmal edelim. araç doğrusal öteleme yapan bir tek rijit cisim olarak görülebilir.

$$v^2 = 2as \Rightarrow \bar{a} = \frac{v^2}{2s}$$



Şekil 6:

$$a_G = \bar{a} = \frac{(50/3.6)^2}{2(60)} = 1.608 m/s^2$$

$$\tan\theta = \frac{1}{10} \Rightarrow \theta = \arctan 0.1 \Rightarrow \theta = 5.71^o$$

$$\mathbf{W} = -W\sin\theta\mathbf{i} - W\cos\theta\mathbf{j} \quad , \quad \begin{array}{l} W_x = w\sin\theta \\ W_y = W\cos\theta \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} W_x & = & 1500(9.81)sin5.71 & = & 1464 \\ W_y & = & 1500(9.81)coz5.71 & = & 14.64(10^3)N \end{array}$$

$$ma = 1500(1.608) = 2410N$$

$\sum\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$ hareket denkleminin in üç izdüşümü yazılırsa;

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F - 1460 = 2410 \Rightarrow F = 3880N$$

$$\sum F = m\bar{a}_y \Rightarrow N_1 + N_2 - 14.64(10^3) = 0 \qquad (a)$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha = 0\,(\alpha = 0) \Rightarrow 1.5N_1 - 1.5N_2 + 3880(0.6) = 0 \qquad (b)$$

(a) ve (b) den $\left.\begin{array}{rcl} N_1 & = & 6650N \\ N_2 & = & 8100N \end{array}\right\}$ Cevap

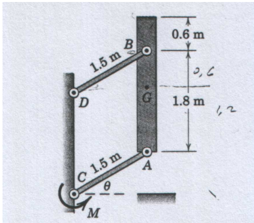
NOT:3380N luk sürtünme kuvvetini dengeleyen (Taşıyan) sürtünme katsayısı $F = \mu N$ den; $\mu = \frac{F}{N_2} = \frac{3880}{8100} = 0.48$ gerekli. Bize verilen en az $\mu = 0.8$ olduğuna göre yüzey yeteri kadar pürüzlü olup elde ettiğimiz F=3880N sonucu geçerlidir.

İkinci Çözüm:

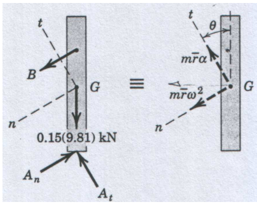
$$\sum M_A = m\bar{a}d \Rightarrow 3N_2 - 15(14.64(10^3) - 0.6(1464) = 2410 \Rightarrow N_2 = 8100N$$

ve

$$\sum M_B = m\bar{a}d \Rightarrow 14.64(10^3)(1.5) - 1464(0.6) - 3N_1 = 2410(0.6)$$



Şekil 7:



Şekil 8:

$$N_1 = 6650N$$

Bu ifadeler ($\sum M_p = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$) den yazıldı.

Örnek Problem 6/2: Düşey AB çubuğunun kütlesi 150 kg ve kütle merkezi G dir. Çubuk $\theta = 0$ konumundan paralel bağlantı ile sabit M=5 kN.m lik moment uygulanarak kaldırılmıştır (C ye uygulanıyor). Paralel bağlantıların açısal ivmesi α yı θ nın fonksiyonu olarak elde ediniz. DB kolunun B noktasındaki kuvveti $\theta = 30^o$ için elde ediniz.

Çözüm 6/2: Çubuğun hareketi eğrisel ötelemedir. G kütle merkezinin dairesel hareketini n-t eğrisel koordinatlarda alalım. Bağlantıların kütleleri ihmal edilerek AC nin serbest cisim diagramından:

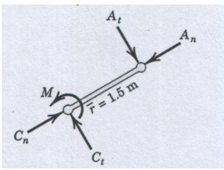
$$\sum M_C = M - A_t(1.5) \cong 0$$

$$A_t = \frac{M}{1.5} = \frac{5}{1.5} = 3.33kN$$

B'deki kuvvet bağlantı boyuncadır

AB çubuğu:

$$\sum F_t = m\bar{a}_t \quad \Rightarrow \quad 3.33 - 0.15(9.81)\cos\theta = 0.15(15\alpha$$
$$\alpha = 14.81 - 6.54\cos\theta rad/s^2$$



Şekil 9:

Bağlantıların açısal hızı:

$$wdw = \alpha d\theta \Rightarrow \int_0^w wdw = \int_0^\theta (14.81 - 6.54\cos\theta)d\theta$$

$$\frac{w^2}{2} = 14.81\theta - 6.54(\sin\theta)_0^\theta$$

$w^2 = 29.6\theta - 13.08\sin\theta$ bulunur. $\theta = 30^o$ için $w^2_{30^o} = 8.97rad^2/s^2$ ve $\alpha_{30^o} = 9.15rad/s^2$ elde edilir.

$$\begin{array}{rcccccc} m\bar{a}_n &=& m(\bar{r}w^2) &=& 0.15(1.5)(8.97) &=& 2.02kN \\ m\bar{a}_t &=& m(\bar{r}\alpha) &=& 0.15(1.5)(9.15) &=& 2.06kN \end{array}$$

B kuvveti, A ya göre (A_n ve A_t ve ağırlık elimine olurlar) momentten elde edilebilir.(Ayrıca A_n ile $m\bar{r}\alpha$ nın doğrultularının kesim noktasıda kullanılabilir.)
A'ya göre moment:

$$\sum M_A = m\bar{a}d \Rightarrow 1.8\cos 30^o.\beta = 2.02(1.2)\cos 30^o + 2.06(0.6)$$

$$B = 2.14kN \qquad \text{Cevap}$$

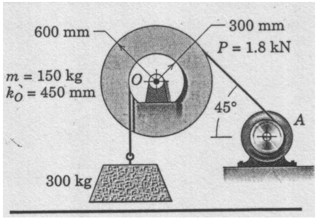
Not:A_n bileşeni n doğrultusunda kuvvetlerin toplamından veya G'ye göre momentteen yada **B** ile $m\bar{r}\alpha$'nın doğrultularının kesiştiği noktaya göre momentten elde edilir.

Problem 6/3 : 300 kg'lık bir blok şekilde gösterilen mekanizma ile yukarı çekilmektedir. Kablolar tambura güvenli bir şekilde sarılmış ve tamburlar tek bir ünite olacak şekilde birleştirilmiştir. Bu ünitenin toplam kütlesi 150 kg ve O'ya göre jirasyon yarıçapı 450 mm'dir. Eğer A'daki güç kaynağı kabloda 1.8 kN'luk bir gerilme oluşturuyorsa bloğun düşey ivmesini ve O yatağındaki bileşke kuvvetini bulunuz.

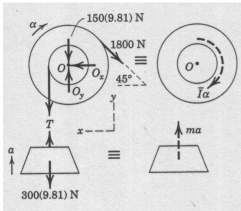
Çözüm 6/3:

Tamburların O etrafında dönmesinden: $\sum M = \bar{I}\theta,\ \bar{I} = k^2m,\ \bar{I} = I_O$

$$\bar{I} = I_O = (0.450)^2(150) = 30.4kgm^2$$



Şekil 10:



Şekil 11:

$$\sum M_G = \bar{I}_\alpha \Rightarrow 1800[0.600) - T(0.300) = 30.4\alpha \qquad \text{(a)}$$

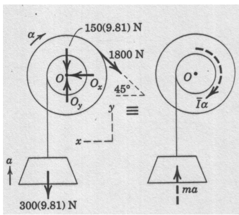
Bloğun ivmelenmesi:

$$F_y = ma_y \Rightarrow T - 300(9.81) = 300a \qquad \text{(b)}$$

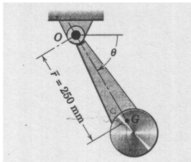
$a = a_t = r\alpha \Rightarrow a = 0.3\alpha$ ifadesi (a) da yazılırsa (b) ile çözümden $T = 3250N$, $\alpha = 3.44rad/s^2$, $a = 1.031m/s^2$ bulunur.

O daki reaksiyon:

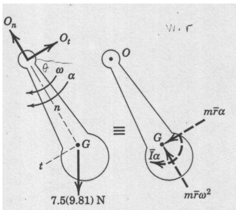
$\sum F_x = 0 \Rightarrow O_x - 1800\cos 45^o = 0 \Rightarrow O_x = 1273N$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y = 150(9.81) - 3250 - 1800\sin 45^o = 0 \Rightarrow O_y = 6000N$
$O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = 6130N$



Şekil 12:



Şekil 13:



Şekil 14:

İkinci Çözüm:

$$\sum M_p = \sum \bar{I}\alpha + \sum m\bar{a}d \Rightarrow \sum M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$
$$1800(0.600 - 300(9.81)(0.300) = 30.4\alpha + 300a(0.300)$$

$a = 300\alpha$ yazılırsa $a = 1.031 m/s^2$ bulunur.

$$\sum F_y = \sum m\bar{a}_y \Rightarrow O_y = 150(9.81) - 300(9.81) - 1800\sin 45^o = 0 \Rightarrow O_y = 6000N$$
$$\sum F_x = \sum m\bar{a}_x \Rightarrow O_x - 1800\cos 45^o = 0 \Rightarrow O_x = 1273N$$

Problem 6/4: 7.5 kg'lik bir sarkacın kütle merkezi şekilde gösterilen G noktasındadır. Sarkacın O noktasına göre jirasyon çapı 295 mm dir. Eğer sarkaç $\theta = 0^o$ halinde hareketsiz olarak serbest bırakılırsa $\theta = 60^o$ olduğu anda O yatağındaki toplam kuvveti bulunuz.

Çözüm 6/4:

$$\sum M_O = I_O\alpha \Rightarrow \sum M_O = 7.5(9.81)(0.25)\cos\theta$$

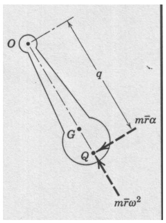
$$I_O = k^2 m = (0.295)^2(7.5)$$

I_O ifadesi M_O ifadesinde da yerine yazılırsa;

$$7.5(9.81)(0.25)\cos\theta = (0.295)^2(7.5)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{18.39}{0.652}\cos\theta = 28.2\cos\theta rad/s^2$$

$\theta = 60^o$ için:

$$wdw = \alpha d\theta \Rightarrow \int_o^w wdw = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 28.2\cos\theta d\theta$$



Şekil 15:

$$\Rightarrow w^2 = 48.8(rad/s^2)^2$$
$$w = 6.985rad/s$$

Hareket denkleminin diğer iki bileşeni $\theta 60^o$ için yazılırsa:

$$\sum F_n = m\bar{r}w^2 \Rightarrow O_n - 7.4(9.81)sin60 = (7.5)(0.25)(48.8)$$

$$O_n = 155.2N, \quad \text{ve}$$

$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha \Rightarrow -O_t + (7.5)(9.81)\cos 60 = (7.5)(0.25)(28.2)\cos 60$$

$$\Rightarrow O_t = 10.37. \quad O = \sqrt{O_x^2 + O_y^2} = 155.6N \quad \text{Cevap}$$

O_t'nin başlangıçtakii yönü için $\sum M_G = \bar{I}\alpha$ denkleminden yararlanılır. G 'ye göre O_t'nin momenti ile α uyuşacak şekilde saat yönünde olmalıdır.

O_t kuvveti Q perküsyon merkezine göre momentten elde edilebilirdi. Önce c=perküsyon yarıçapını elde etmek gerekir.

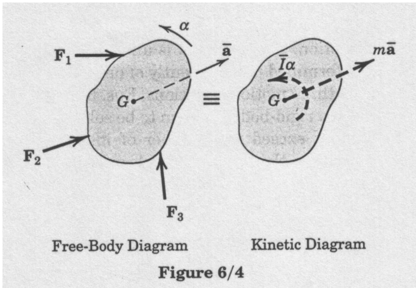
$$c = \frac{k_o^2}{\bar{r}^2} \Rightarrow c = \frac{(0.295)^2}{0.250} = 0.348m$$

$$\sum M_Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} O_t(0.348) - 7.5(9.81(\cos 60(0.348 - 0.250) = 0 \\ O_t = 10.37N \qquad \text{Cevap} \end{cases}$$

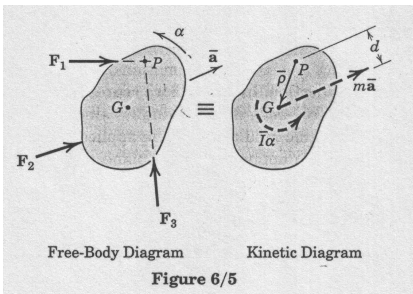
0.4 Genel Düzlemsel Hareket

Formüllerimiz; $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$, $\sum \mathbf{M_G} = I_G\alpha$ burada da geçerlidir. Herhangi bir P noktasına göre moment; $\sum M_p = I_G\alpha + ma_Gd$ idi. İlgili şekilleer 6. bölümün başında verildi.

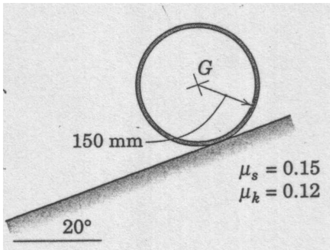
Problem 6/5: 150 mm yarıçapında bir çamber 20^o lik bir eğik düzlemde hareketsşz halde serbest bırakılmaktadır. Eğer statik ve kinetik sürtünme katsayıları $\mu_s = 0.15$ ve $\mu_k = 0.12$ ise çember düzlem boyunca aşağıya doğru 3m hareket ettiğinde geçen t zamanını, α açısal ivmesini bulunuz.



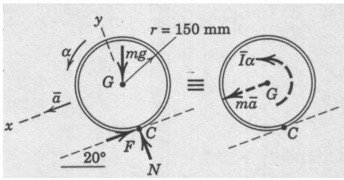
Şekil 16:



Şekil 17:



Şekil 18:



Şekil 19:

Çözüm 6/5:
kayma yok varsayarak:

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = m\bar{a}_x\\ \sum F_y = m\bar{a}_y\\ \sum M_G = \bar{I}\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} mg\sin 20 - F = m\bar{a}\\ N - mg\cos 20 = 0\\ Fr = mr^2\alpha\end{array}$$

ilk iki denklemden F elimine edilir ve $\alpha = a/r$ yerine yazılırsa:

$$\bar{a} = \frac{g}{2}\sin 20 \Rightarrow \bar{a} = \frac{9.81}{1}(0.342) \Rightarrow \bar{a} = 1.678 m/s^2$$

$\bar{a}$'yi, $\bar{a} = r\alpha$ kabulü ile C'ye göre momentten doğrudan elde ederiz.$\sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$ denklemini C noktası için yazarsak:

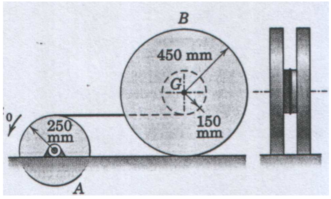
$$\sum M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}r \Rightarrow mgr\sin 20 = (mr^2)(\frac{\bar{a}}{r}) + m\bar{a}r \Rightarrow \bar{a} = \frac{g}{2}\sin 20$$

Kaymama kabülümüzün doğruluğunun kontrolü için F ile N yi hesaplayıp F'i limit değeri ile kıyaslamamız gerekir. $\sum F_x$ ve $\sum F_y$ denklemlerinden:

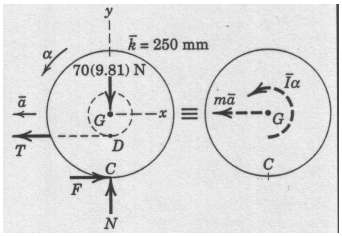
$$\begin{array}{l}\sum F_x: \ F = mg\sin 20 - m\frac{g}{2}sin20 \Rightarrow F = 0.1710mg\ N\\ \sum F_y: \ N = mg\cos 20 = 0.940mg\ N\end{array}$$

maksimum olası sürtünme kuvveti:

$$F_{mak} = \mu_s N \Rightarrow F_{mak} = 0.15(0.940mg) = 0.1410mg$$



Şekil 20:



Şekil 21:

Sonuç: $F = 0.1710mg > 0.1410mg$ elde edildi. Kabulümüz yanlıştır. Çemner hem yuvarlanır hemde kayar. $\bar{a} = r\alpha$ olur. Sürtünme kuvveti kinetik değer alır. $F = \mu_k N \Rightarrow F = 0.12(0.940mg) = 0.1128mg$

Hareket Denklemleri:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow mg\sin 20 - 0.1128mg = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = 2.25m/s^2$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha \Rightarrow 0.1128mg(r) = mr^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{10.1128(9.81)}{0.150} = 7.37rad/s^2$$

Sabit ivme ile sukünetten hareket eden G nin 3 m yol alması için geçen zaman:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\bar{a}}} = \sqrt{\frac{2(3)}{2.25}} = 1.633s$$

Örnek problem 6/6:A kasnağı sabit $\alpha_0 = 3rad/s^2$ açısal ivmesi ile dönmekte olup 70 kg kütleli B makarasını yatay düzlemde iç kasnağa sarılan kablo yardımıyla döndürmektedir. Jirasyon yarıçapı, G‘ye göre 250mm ve kasnak ile düzlem arsındaki statik sürtünme katsayısı o.25 dir. Kablodaki T gerilmesini ve F sürtünme kuvvetini hesaplayınız.

Çözüm 6/6: Kablo üzerindeki bir noktanın ivmesi $a_t = r\alpha = 0.25(3) \Rightarrow a_t = 0.75m/s^2$ olup aynı zamanda D noktasının ivmesinin yatay bileşenidir.

B'nin kaymadan yuvarlanacağını başlangıç olarak varsayarsak:

$$(a_d)_x = r\alpha = \bar{DC}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{(a_D)_x}{\bar{DC}} = \frac{0.75}{0.300} = 2.5rad/s^2$$

Böylece G nin (kütle merkezinin) ivmesi;

$$\bar{a} = a_G = r\alpha = \bar{CG}\alpha = 0.40(2.5) = 1.25m/s^2$$

elde edilir.

Hareket Denklemleri:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow F - T = 70(-1.125) \qquad (a)$$
$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow N - 70(9.81) = 0 \Rightarrow N = 687N$$
$$\sum M_G = \bar{I}\alpha \Rightarrow F(0.450) - T(0.150) = 70(0.250)^2(2.5) \qquad (b)$$

(a) ve (b)'den $F = 75.8N$ ve $T = 154.6N$ bulunur.

Peki kabulümüz doğru mu?:

$$F_{mak} = \mu_s N = 0.25(687)$$

$F_{mak} = 171.7N$ bulunur. Yani yüzey 171.7N'luk sürtünme kuvveti yaratabilir. Problemde sadece 75.8N'luk bir sürtünme kuvvetine gerek olduğuna göre kaymadan yuvarlanma kabulü geçerlidir.

Not: Eğer $\mu_s = 0.1$ verilseydi $F_{mak} = \mu_s N \Rightarrow F_{mak} = 0.1(687) = 68.7N$ olurdu ki bu problemdeki gerekli sürtünme kuvveti olan 75.8 den küçüktü. B kayar. Bu durumda $\bar{a} = r\alpha$ sağlanmaz. $(a_D)_x$'in bilinmesi halinde $\alpha = [\bar{a} - (a_D)_x]/GD$ şeklinde elde edilir.. α nın bu değerşnş ve $F_{mak} = \mu_s N = 68.7N$'yi kullanarak hareket denklemleri yeniden çözülmelidir.

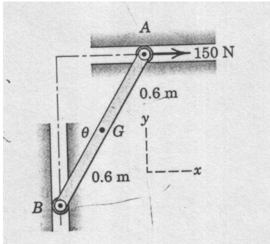
Not: C'nin dönme merkezi olması halinde (Alternatif);

$$\sum M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}r \Rightarrow 0.3T = 70(0.25)^2(0.25) + 70(1.125)(0.45) \Rightarrow T = 154.6N$$

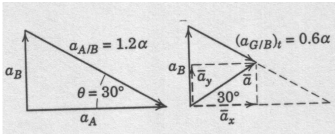
cevap bulunur.

Problem 6/7 : 30 kg kütleli ince AB çubuğunun uçları düşey ve yatay yatakta sürtünmesiz olarak hareket etmektedir. A ucuna 150N luk yatay kuvvet tatbik ediliyor. İlk anda $\theta = 30^o$ olup çubukhareketsizdir. Çubuğun açısal ivmesini ve A ile B uçlarına (mafsallarına) etkiyen kuvvetleri bulunuz.

Çözüm 6/7:



Şekil 22:



Şekil 23:

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$ ve $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{G/B}$ çözülerek $\bar{\mathbf{a}}$ ve α elde edilir.

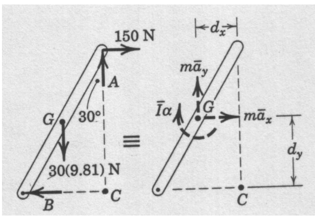
Yukarıdaki denklemleri ivme üçgenleri ile temsil ederiz.

$$\bar{\mathbf{a}}_x = \bar{a}\cos 30 = (0.6\alpha)\cos 30 = 0.520\alpha\, m/s^2$$
$$\bar{\mathbf{a}}_y = \bar{a}\sin 30 = (0.6\alpha)\sin 30 = 0.3\alpha\, m/s^2$$

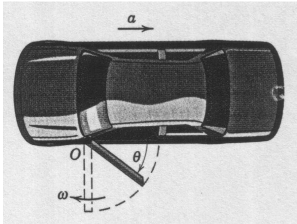
yazılır, $\sum M_G = \bar{I}\alpha$ ve $\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$ uygulanırsa serbes cisim diagramından $\bar{I} = \frac{1}{12}ml^2$ çıbığun kütle merkezine göre atalet momenti olmak üzere;

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha \Rightarrow 150(0.6\cos 30) - A(0.6\sin 30) + B(60\cos 30) = [\frac{1}{12}30(1.2)^2]\alpha \qquad (1)$$

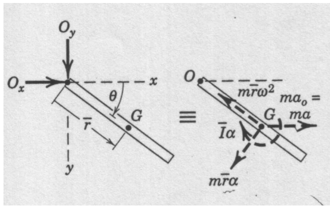
$$\sum F_x = m\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \Rightarrow 150 - B = 30(0.520\alpha) \qquad (2)$$
$$\sum F_y = m\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \Rightarrow A - 30(9.81) = 30(0.3\alpha) \qquad (3)$$



Şekil 24:



Şekil 25:



Şekil 26:

Bu üç denklemin çözümünden:
A=337N, B=76.8N, $\alpha = 4.69 rad/s^2$ bulunur.
İkinci çözüm: C yi moment merkezi olarak alıp $\sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$ fomülünden;

$$\sum M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \Rightarrow -150(1.2\cos 30) + 30(9.81)(0.6\sin 30)$$
$$= \frac{1}{12}30(1.2)^2\alpha - 30(0.520\alpha)(0.6\cos 30) - 30(0.3\alpha)(0.6\sin 30)$$
$$\Rightarrow 67.6 = 14.40\alpha \Rightarrow \alpha = 4.69 rad/s^2$$

$\alpha = 4.69$ bilindikten sonra (2) ve (3) den;

$$\sum F_y = m\mathbf{\bar{a}_y} \Rightarrow A - 30(9.81) = 30(0.3)(4.69) \Rightarrow A = 337N$$
$$\sum F_x = m\mathbf{\bar{a}_x} \Rightarrow 150 - B = 30(0.520)(4.69) \Rightarrow B = 76.8N$$

NOT: Kinetik diagramdan; $\bar{I}\alpha$ ile $\sum m\bar{a}d = -m\bar{a}_x d_y - m\bar{a}_y d_x$ aynı yöndedir.

Örnek problem 6/8: Şekildeki arabaya fren yapılarak geriye doğru sabit a ivmesi verildiğünde kapısı hafifçe açılıyor. Herhangi bir θ için kapının w açısal hızını elde ediniz. $\theta = 90$ için w'yi elde ediniz. Kapının kütlesi m, ve kütle merkezi O menteşesinden itibaren $\bar{r}$ ve atalet yarıçaı k_O dır.
Çözüm 6/8: $w = w(\theta)$ değişiyor. $\alpha = \alpha(\theta)$ ya gerek var.

$$\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_O + (a_{G/O})_n + (\mathbf{a})_t$$

$m\mathbf{\bar{a}}$'nın bileşenleri:
$ma_O = ma$ (arabanın ivmesi)

$m(a_{G/O})_n = m\bar{r}w^2$
$m(a_{G/O})_t = m\bar{r}\alpha,\ w = \dot{\theta},\ \alpha = \ddot{\theta}$
O'ya göre moment ile O_x ve O_y elimine edilir,

$$\sum M_O = \bar{I}\alpha + \sum m\bar{a}d \Rightarrow 0 = m(k_O^2 - \bar{r}^2)\alpha - m\bar{r}\alpha(\bar{r}) + ma(\bar{r}\sin\theta)$$

çözülürse

$$\alpha = \frac{a\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta$$

elde edilir

$$wdw = \alpha d\theta \Rightarrow \int_0^w wdw = \int_0^\theta \frac{a\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta d\theta$$

$$w^2 = \frac{2a\bar{r}}{k_O^2}(1 - \cos\theta)$$

bulunur.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{için} \quad w = \frac{1}{k_O}\sqrt{2a\bar{r}} \quad \text{Cevap}$$

O_x ve O_y'yi verilen θ cinsinden elde etmek için:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \Rightarrow O_x = ma - m\bar{r}w^2\cos\theta - m\bar{r}\alpha\sin\theta$$

$$= m[a - \frac{2a\bar{r}^2}{k_O^2}(1 - \cos\theta)\cos\theta - \frac{a\bar{a}^2}{k_O^2}\sin\theta^2]$$

$$= ma[1 - \frac{\bar{r}^2}{k_O^2}(1 + 2\cos\theta - 3\cos\theta^2)]$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y \Rightarrow O_y = m\bar{r}\alpha\cos\theta - m\bar{r}w^2\sin\theta$$

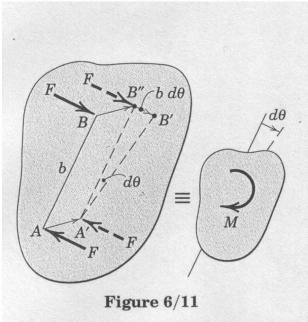
$$= m\bar{r}\frac{a\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta\cos\theta - m\bar{r}\frac{2a\bar{r}}{k_O^2}(1 - \cos\theta)\sin\theta$$

$$= \frac{ma\bar{r}^2}{k_O^2}(3\cos\theta - 2)\sin\theta$$

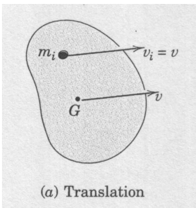
0.5 İş-Enerji

0.5.1 Kuvvet ve Momentlerin yaptığı iş:

Bir kuvvet tarafından yapılan iş $U = \int \mathbf{F}.d\boldsymbol{r} = \int Fcos\alpha ds$ formülü ile Bölüm 3/6 da verilmişti. Bu formülde $d\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$ kuvveti etkisi altında dt zaman aralığındaki diferansiyel yerdeğiştirme vektörü idi. Uygulamalarda, büyük bir sıklıkla, M momenti tarafından yapılan işi de bulmamız gerekebilir.



Şekil 27:



Şekil 28: Öteleme

Kuvvet çiftinin yaptığı işi bulalım; Kuvvetlerin yerdeğiştirmeden dolayı yaptığı iş birbirini yok eder ve net işi $dU = F(bd\theta) = Md\theta$ olarak elde ederiz. Bundan dolayı sonlu bir dönme esnasında M momenti tarafından kendisine paralel bir düzlemde yaptığı iş; $U = \int Md\theta$ ile ifade edilir.

0.5.2 Kinetik Enerji

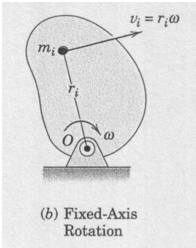
Şimdi 3 tip düzlemsel hareket için kinetik enerji formülünü verelim.
Öteleme Durumu: $T = (1/2)m_iv^2$, $T = \sum(1/2)m_iv^2$ sonuç olarak $\sum m_i = m$ tanımlaması kullanılarak $T = (1/2)mv^2$ yazılabilir.

Sabit bir eksen etrafında dönme hali: $T_i = (1/2)m_i(r_iw)^2, T = (1/2)w^2\sum m_ir_i^2$ burada $I_0 = \sum m_ir_i^2$ ifadesini kullanarak kinetik enerji denklemini $T = (1/2)I_0w^2$ olarak elde edebiliriz.

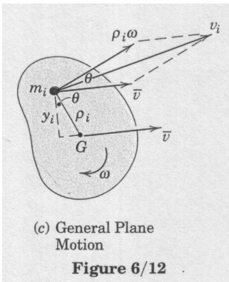
Genel düzlemsel hareket hali: $T = (1/2)mv_G^2 + (1/2)I_Gw^2$ formülü ile verilir.

Not1:m_i'nin v_i hızını $\bar{\mathbf{v}}(=\bar{\mathbf{v_G}})$'ye paralel ve m_i'nin G'ye göre hareketindeki teğetsel hız olan ρw ya paralel iki bileşen halinde yazarız.

$$T = \sum(1/2)m_i\mathbf{v_i}^2 = \sum(1/2)m_i\left[\bar{\mathbf{v_G}} + (\rho_iw)\right]^2$$



Şekil 29: Sabit eksen etrafında dönme



Şekil 30:

$$T = \sum (1/2) m_i (v_G^2 + \rho_i^2 w^2 + 2 v_G \rho_i w cos\theta)$$

Burada üçüncü terim:$\sum \bar{v} w \rho_i m_i cos\theta = \bar{v} w \sum m_i \rho_i cos\theta = \bar{v} w (\sum m_i y_i = m\bar{y} = 0) = 0$ dır. öyleyse

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} w^2 I_G$$

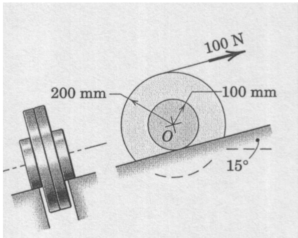
yazılabilir.

Not2: Cisim bir Q noktası etrafında dönüyorsa v_Q=0 olacağından $T = 0 + (1/2) I_Q w^2 \Rightarrow T = (1/2) I_Q w^2$ olur.

0.5.3 Kinetik Enerji

U' teriminin elastik ve çekim kuvvetleri hariç diğer kuvvetler tarafından yapılan işi temsil ettiğini hatırlayalım.

İş-Enerji eşitliği: $U'_{1-2} = \triangle T + \triangle v_g + \triangle v_e$ idi. Bu eşitliği aynen burada da kullanıyoruz.



Şekil 31:

0.5.4 Güç

F kuvvetinin etkisi altında düzlemsel hareket yapan rijit bir cismi göz önüne alalım. **F** kuvvetinin oluşturduğu güç, o anda yapılan işin zamana göre değişme oranı (türev)dır.

$$dU = \mathbf{F}.d\mathbf{r} \Rightarrow P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}.\mathbf{v}$$

Benzer şekilde rijit cisme etki eden M momentinin oluşturduğu güç: $P = dU/dt = Md\theta/dt = Mw$ ile verilir. Eğer **F** kuvveti ve M momenti aynı anda rijit cisme uygulanmışsa: $P = \mathbf{F}.\mathbf{v} + Mw$ dır.

Örnek Problem 6/9:Şekildeki tekerlek göbek kasnağının kaymadan yuvarlanmasıyla yukarıya doğru 100N luk çekme kuvveti ile hareket ediyor. Tekerlek sükujnetten harekete geçtiğine göre O merkezinin 3m yol alması halinde tekerleğin ω açısal hızını bulunuz. Kütle merkezi O ve kütle 40 kg dir. Merkezi atalet yarıçapı $k_o = 150mm$ veriliyor. 3m lik yol boyunca 100N kuvvetinin giriş gücünü hesaplayınız.

Çözüm:
Sadece W=(9.81)40 ağırlığı ve 100N kuvveti iş yapar. Kayma yok. Sürtünme kuvveti iş yapmaz.

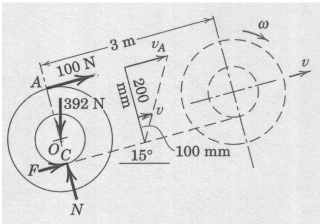
C ani dönme merkezi olur. Orantıdan $v_A = 3v$ bulunur.

$$\frac{v}{v_A} = \frac{100}{300} \Rightarrow v_A = 3v$$

Halatın üzerindeki A noktasının aldığı yol O'nun yolunun 3 katı olur ($v_A = 3v$ idi)

$$U_{1-2} = (100)(3)(3) - (392 \sin 15^o(3)$$

$$U_{1-2} = 595J$$



Şekil 32:

Tekerlek genel düzlemsel hareket yapılıyor. Kinetik enerji değişimi:

$$T = (1/2)m\bar{v}^2 + (1/2)Iw^2 \Rightarrow T = (1/2)m\bar{v}^2 + (1/2)mk_o^2w^2$$

$$\triangle T = [\frac{1}{2}(40)(0.10w)^2 + \frac{1}{2}(40)(0.15)^2w^2]$$

$$\triangle T = 0.650w^2$$

NOT: Tekerleğin kinetik enerjisini $T = (1/2)I_C w^2$'dan da elde edebiliriz.

$$T = \frac{1}{2}(\bar{I} + m\bar{OC}^2)w^2 = \frac{1}{2}(mk_o^2 + m\bar{OC}^2)w^2$$

$$T = \frac{1}{2}(40)[(0.15)^2 + (0.10)^2]w^3 = 0.650w^2$$

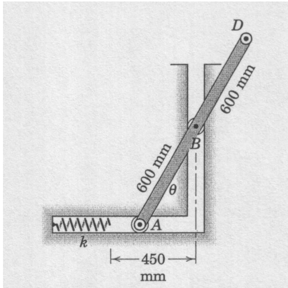
100 N nun giriş gücü $w = 30.3 rad/sn$ için

$$P = \mathbf{F}.\mathbf{v} \Rightarrow P_{100} = 100(0.3)(30.3)$$

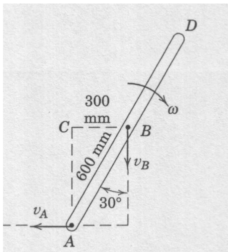
$$P = 908\, Watt$$

Problem 6/10: 1200 mm uzunluğunda 20 kg kütlesinde, kütle merkezi B'de olan bir çubuk $\theta = 60^o$ konumundan hareketsiz olarak bırakılıyor. B ve A noktaları sürtünmesiz olarak düşey ve yatay olarak yataklanmıştır.Çubuk düşerken şekilde görüldüğü gibi yayı sıkıştırıyor.
a- $\theta = 30^o$ den geçerken çubuğun açısal hızını bulunuz.
b- B mesnetinin yatay düzlemle çarpıştığı andaki hızını bulunuz.
(Yayın esneme katsayısı k=5kN/m dir)

Çözüm 6/20: A ve B hareketli mafsallarının kütlelerinin ihmali ve B de sürtünmenin olmaması sonucu sistem KORUNUMLUDUR(veya Potansiyelli).
İlk Adım: $\theta = 0^o$ den $\theta = 30^o$ ye kadar yay etkimiyor. Yani iş-enerji denkleminde (V_e) yok. Ağırlığın işini V_g potansiyeli ile temsil edersek; iş yapan



Şekil 33:



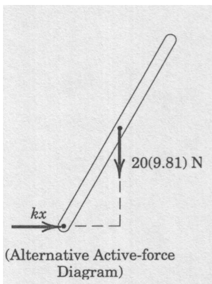
Şekil 34:

başka dış kuvvet yoktur($U'_{1-2} = 0$) olur. C ani dönme merkezi belirlenerek $v_B = \overline{CB}w$ yazılır.$\theta = 30^o$ konumunda çubuğun kinetik enerjisi:

$$T = (1/2)m\bar{v}^2 + (1/2)\bar{I}w^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}(20)(0.300w)^2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{12}20(1.2)^2]w^2$$

Çubuğun kinetik enerjisi $T = 2.10w^2$ olarak bulunur. $\triangle V_g = W\triangle h$ (Ağırlığın potansiyel enerjisi)

$$\triangle V_g = 20(9.81)(0.600cos30^o - 0.600)$$



Şekil 35:

$$\triangle V_g = -15.77J$$

$$U'_{1-2} = \triangle T + \triangle V_g$$

$$0 = 2.10w - 15.77$$

$$w = 2.74 rad/s$$

İkinci adım:
Yayıda hesaba katarak tüm sistem: $V_e = \frac{1}{2}kx^2 = 0.5(5000)(0.600 - 0.450)^2 - 0 \Rightarrow V_e = 56.3J$ Çubuğun son yatay konumunda A nın hızı yoktur. Yani, çubuk bu konumda A nın etrafında dönme hareketi yapıyor durumundadır. Buna göre çubuğun kinetik enerjisi:

$$T = \frac{1}{2}I_A w^2 \Rightarrow T = 0.5(\frac{1}{3}20(1.2)^2)(\frac{v_B}{0.6})^2$$

$$T = 13.33v_B^2$$

Ağırlığın potansiyel enerjisindeki değişim

$$\triangle V_g = W\triangle h \Rightarrow \triangle V_g = 20(9.81)(-0.600)$$

$$\triangle V_g = -117.7J$$

Bulunanları $U_{1-2}` = \triangle T + \triangle V_g + \triangle V_e$ formülünde yazarsak:

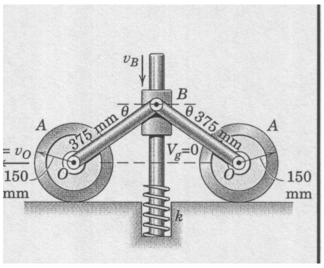
$$0 = (13.33v_B^2 - 0) - 117.7 + 56.3$$

$$v_B = 2.15m/s$$

NOT: Eğer çubuk tek başına bir sistem olarak alınırsa (son şekildeki gibi) ağırlık pozitif bir iş yapar. Çubuğa etkiyen ikinci dış kuvvet yay kuvveti "kx" olur. Bu ise negatif iş yapar. $U'_{1-2} = \triangle T$ yazılır.

$$117.7 - 56.3 = 13.33v_B^2 \Rightarrow v_B = 2.15m/s$$

aynı sonuç elde edilir.
Örnek Problem 6/11: Şekildeki sistemde her tekerleğin kütlesi 30kg ve merkezi atalet yarıçapı 100mm dir. Her OB bağlantısının kütlesi 10kg ve düzgün çubuk olarak görülüyor. B deki 7 kg kütleli bilezik düşey sabit şaft üzerinde sürtünmesiz kayabilmektedir. Yay sabiti k=30kN/m olup, bağlantılar yatay konumda iken bilezik ile yay temas etmektedir. Bilezik $\theta = 45^o$ konumundan hızsız olarak serbest bırakıldığına göre ve tekerleklerin kaymasını önleyecek değerde sürtüne varsa bileziğin v_B hızını:
1-Yaya çarptığı anda
2- yaydaki maksimum deformasyon anında hesaplayınız.



Şekil 36:

Çözüm: Kinetik sürtünme yok. Sistem düzlemde , sıfır potansiyel enerji seviyesi $\overline{OO}$ olarak alınabilir.İş yapan dış kuvvet yok.
1- $\theta = 45^o$ den $\theta = 0^o$ aralığında $\triangle T_{telerlek} = 0$ dır.(Sistem ilk anda hızsız ve son anda da yani $\theta = 0$ da durur.) Ayrıca bağlantılar en alt konumda ($\theta = 0$ da) O etrafında dönme hareketi yaparlar. Sistemin kinetik enerji değişimi:

$$\triangle T = [2(\frac{1}{2}I_O w^2) - 0]_{baglant\imath} + [\frac{1}{2}mv^2 - 0]_{bilezik}$$

$$\triangle T = \frac{1}{3}10(0.375)^2(\frac{v_B}{0.375})^2 + \frac{1}{2}(7)v_B^2 = 6.83v_B^2$$

Sistemin potansiyel enerjisi: $\triangle V = \triangle V_g + \triangle V_e$
Bilezik $h = 0.375sin45^0 = 0.265m$ düşer.

$$\triangle V = \triangle V_g = 0 - 2(10)(9.81)(\frac{0.265}{2}) - 7(9.81)(0.265)$$

$$\triangle V = -44.2J$$

Sistemin potansiyel enerjisi $U'_{1-2} = 0$. Böylece $U_{1-2}` = \triangle T + \triangle V \Rightarrow 0 = 6.83v_B^2 - 44.2$

$$v_B = 2.54$$

2- Maksimum yay deformasyonu x konumunda sistemin tüm parçaları sukunette olur. Yani $\triangle T = 0$ olur.

$$U'_{1-2} = \triangle T + \triangle V_g + \triangle V_e \Rightarrow$$

$$0 = 0 - 2(10)(9.81)(\frac{0.265}{2} + \frac{x}{2} +) - 7(9.81)(0.265 + x) + \frac{1}{2}(30)(10^3)x^2 \Rightarrow x = 60.1mm$$

0.6 İş-Enerji ile İvme; Virtüel İş

İş-Enerji bağıntısını sabit ivmeli hareketler için de kullanırız.$U'_{1-2} = \triangle T + \triangle V_g + \triangle V_e$ denklemini elementer yerdeğiştirme için $dU' = dT + dV$ yazarız. Birbirlerine bağlı hareket eden cisimler için i indisini kullanarak tüm sistemin kinetik enerjisi:$T = \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 + \sum \frac{1}{2} \bar{I}_i w_i^2)$

$$dT = d(\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 + \sum \frac{1}{2} \bar{I}_i w_i^2)$$

$$= \sum m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i + \sum \bar{I}_i w_i dw_i$$

$$\sum m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = \sum m_i \frac{d\bar{s}_i}{dt} d\bar{v}_i = \sum m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} d\bar{s}_i = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i$$

O halde buradan:

$$\sum m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i$$

yazılır. Benzer olarak:

$$\sum \bar{I} w_i dw_i = \sum \bar{I} \frac{d\theta_i}{dt} dw_i = \sum \bar{I} \frac{dw_i}{dt} d\theta_i = \sum \bar{I} \alpha_i d\theta_i$$

$(\bar{a}_i)_t$ ivmesi cismin kütle merkezinin $\bar{a}_i$ ivmesinin teğetsel bileşenidir. Benzer şekilde $\ddot{\theta}_i = \alpha_i$ çalışılan cismin açısal ivmesidir. Tüm sistem için:

$$dT = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I} \alpha_i d\theta_i \qquad (1)$$

$\sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i = \sum \mathbf{R}_i$ ve $\sum \bar{I} \alpha_i = \sum M_{G_i}$ tanımlarıyla:

$$dT = \sum \mathbf{R}_i d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum M_{G_i} d\theta_{\mathbf{i}} \qquad (2)$$

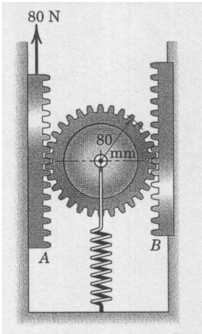
yazılır. $d\theta_{\mathbf{i}} = d\theta_i \mathbf{k}$ (Hareket düzlemde)

(1) ve (2) denklemleri sistemin toplam kinetik enerji değişimi; dış kvvetlerin elemanter işi ile sisteme etkiyen çiftlerin (momentlerin bileşkesi) toplamına eşit olduğunu ifade eder.
dV= Toplam potansiyel enerji değişimini yani dV_g ve dV_e nin toplamını ifade eder.
$\triangle V = \triangle V_g + \triangle V_e \Rightarrow$ dif. formda:

$$dV = d(\sum m_i g h_i + \sum \frac{1}{2} k_j x_j^2) = \sum m_i g dh_i + \sum k_j x_j dx_j$$

h_i ele alınan parçanın kütle merkezinin referans düzleminin üzerindeki uzaklığı, x_j ise yayın deformasyonunu temsil eder. k_j ise yay sabitidir. Yerlerine yazılırsa:

$$dU' = dT + dV = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I} \alpha_i d\theta_i + \sum m_i g dh_i + \sum k_j x_j dx_j \qquad (A)$$



Şekil 37:

Bu denklem bize ivmeler ile aktif kuvvetler arasındaki bağıntıyı doğrudan verme şansı tanır. Bu denklemi virtüel yer değiştirme içinde yazarız yani

$$\delta U' = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i \delta \bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I} \alpha_i \delta \theta_i + \sum m_i g \delta h_i + \sum k_j x_j \delta x_j \qquad (B)$$

"d" gerçek diferansiyel yerdeğişimini, "δ" varsayılan (virtüel) diferansiyeli temsil eder.

Örnek Problem 6/12: Şekildeki A dişli rayı hareketli ve B dişli rayı tesbit edilmiştir. Dişlinin kütlesi 2kg ve atalet yarıçapı $k_o = 60mm$ dir. Sabiti 1.2 kN/m olan yay şekildeki konumda 40 mm gerilmiştir. Verilen konum içim A rayının a ivmesini 80 N kuvvetin etkisinde hesaplayınız. Sistem düşey düzlemdedir.

Çözüm6/12: Etkiyen aktif kuvvet sistemi 80N,ağırlık ve yay kuvvetidir. Korunumludur. A nın yukarıya doğru dx yerdeğiştirmesi sırasında 80N nun işi: $dU' = 80dx$ olup x metre cinsindendir. $80dx$ işi, sistemin toplam enerji değişimine eşittir. (A) denklemindeki terimleri hesaplayalım:

$$dT = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I} \alpha_i d\theta_i = dT_{ray} + dT_{disli}$$

$$dT_{ray} = dU_{ray} = d(max) = ma(dx) = 3adx$$

$$dT_{disli} = \sum m_i \bar{\mathbf{a}}_i d\bar{\mathbf{s}}_i + \sum \bar{I} \alpha_i d\theta_i \Rightarrow$$

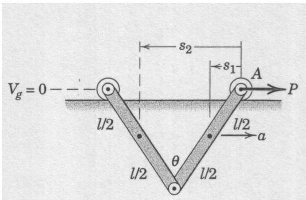
$$dT_{disli} = 2(\frac{a}{2})\frac{dx}{2} + 2(0.06)^2 \frac{a/2}{0.08}\frac{dx/2}{0.08} = 0.781adx$$

Sistemin toplam potansiyel enerjisi:

$$dV = dV_g + dV_e = \sum m_i g dh_i + \sum k_j x_j dx_j$$

$$dV_{ray} = 3gdx = 3(9.81)dx = 29.4dx$$

$$dV_{disli} = 2g(dx/2) = gdx = 9.81dx$$



Şekil 38:

$$dV_{yay} = k_j x_j dx_j = 1200(0.04)(dx/2) = 24dx$$

(A) da yerine yazılırsa

$$80dx = 3adx + 0.781adx + 29.4dx + 9.81dx + 24dx$$

$$a = 4.43m/s^2$$

NOT: $\bar{a}_i$ dişlinin kütle merkezi ivmesidir. Bu ivme rayın (A nın) ivmesinin yarısıdır. Aynı şekilde dişlinin kütle merkezinin yerdeğişimi rayın dx yerdeğişiminin yarısıdır(dx/2 dir). Yuvarlanan dişli için $a = r\alpha \Rightarrow a_i = (a/2)/0.08$ ve açısal yerdeğitirme $ds = rd\theta \Rightarrow d\theta_i = (dx/2)/0.08$

Örnek Problem 6/13: Sabit **P** kuvveti şekildeki sistemin A noktasına etkiyor ve sisteme sağa doğru a ivmesini kazandırıyor. Çubukların birbiri ile yaptığı θ açısını daimi hal için hesaplayınız (Sistemin şeklinin bozulmadığı hal için)

Çözüm 6/13: Ölçümleri A dan itibaren yaparsak **P** nin işini elimine etmiş oluruz. Her çubuğa bir virtüel yerdeğiştirme verelim.
$\delta U' = 0$ (Bakınız statikte virtüel iş konusu)
$(A) \Rightarrow$ Kinetik enerji değişimi

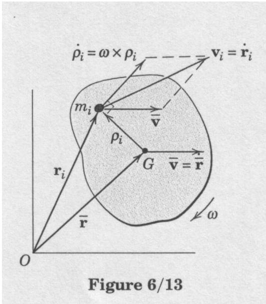
$$\delta T = \sum m\bar{\mathbf{a}}d\bar{\mathbf{s}} = ma(-\delta s_1) + ma(-\delta s_2)$$

$$\delta T = -ma[\delta(\frac{1}{2}sin\frac{\theta}{2}) + \delta(\frac{3L}{2}sin\frac{\theta}{2})]$$

$$\delta T = -ma(Lcos\frac{\theta}{2}\delta\theta)$$

yazılır. A dan geçen yatay doğrultu sıfır potansiyel seviyesi olacak şekilde seçelim. Böylece çubukların ağırlık pot. enerjisi:

$$V_g = 2mg(-\frac{L}{2}cos\frac{\theta}{2})$$



Şekil 39:

olur. ve virtüel iş değişimi

$$\delta V_g = \delta(-2mg\frac{L}{2}cos\frac{\theta}{2}) = \frac{mgL}{2}sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

dır.
Bu değerleri (B) de yazarsak

$$\delta U' = \delta T + \delta V_g \Rightarrow$$

$$0 = -maLcos\frac{\theta}{2}\delta\theta + \frac{mgL}{2}sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

$$\theta = 2\arctan\frac{2a}{g}$$

Not: Problem 6/12 de olduğu gibi, bu problemde de sistemi parçalarına ayırıp her parçanın serbest cisim diagramını çizmeye ve her parçaya düzlemsel hareket ve kuvvet-moment denklemlerinin tatbikine gerek kalmaz. Bu avantajdır.

0.7 İmpuls ve Momentum Denklemleri

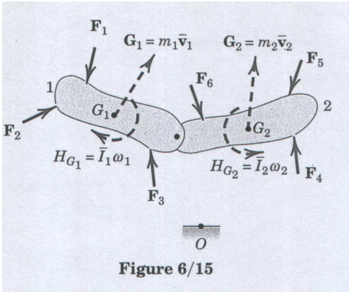
Lineer Momentum:
Noktasal bir cisim için liner momentum $\mathbf{G_i} = m_i\mathbf{v_i}$ idi. Rijit bir cisim için $\mathbf{G} = \sum m_i\mathbf{v_i} = d(\sum m_i\mathbf{r_i})/dt$ şeklinde yazılabilir.$m\mathbf{r_G} = \sum m_i\mathbf{r_i}$ (Kütle merkezinin tanımı) bundan dolayı $G = m\mathbf{v_G}$ elde ederiz.

Not: $G = m\mathbf{v_G}$ için: Katı cismin özelliğinden:

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{v_G} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho_i}$$

$$\mathbf{G} = \sum m_i(\mathbf{v_G} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho_i})$$

$$\mathbf{G} = \sum m_i\mathbf{v_G} + \sum m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho_i})$$



Şekil 40: Kinetik ve serbest cisim diagramı

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v_G} + \boldsymbol{\omega} \times \sum m_i \boldsymbol{\rho_i}$$

Burada $\rho_\mathbf{i}$ kütle merkezinden ölçüldüğü için $\sum m_i \rho_\mathbf{i} = 0$ dır. O halde $\mathbf{G} = m\mathbf{v_G}$ dır.

Bölüm 4/4 den Newtonun ikinci kanununu yeniden yazarsak (İmpuls-Momentum denklemi):

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} \; ve \; \int_{t_1}^{t_2} \sum F dt = G_2 - G_1$$

yazılır. Bunun skaler bileşenlerini:

$$\sum F_x = \dot{G}_x \; ; \; \int_{t_1}^{t_2} \sum F_x dt = G_{x2} - G_{x1}$$

$$\sum F_y = \dot{G}_y \; ; \; \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y dt = G_{y2} - G_{y1}$$

a-Açısal Momentum

Bölüm 4/9 daki açısal momentum ve moment eşitliklerini yeniden yazarsak:

$$\sum M_G = \dot{H}_G \; ve \; \int_{t_1}^{t_2} \sum M_G dt = H_{G2} - H_{G1}$$

Herhangi bir O noktasına göre: $H_o = I_G w + m v_G d$ kullanılabilir.
NOT: Eğer rijit cisim sabit bir O noktası etrafında dönüyorsa, $v_G = r_G w$, $d = r_G$ olur. Böylece $H_o = I_G w + m r_G^2 w$ bulunur. Ayrıca $I_o = I_G + m r_G^2$ olduğu biliniyor. Sonuç olarak $H_o = I_o w$ elde ederiz.

Yeniden 4/2 bölümünden; $\sum \mathbf{M_o} = \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{o}$ ifadesinde $H_o = I_o w \Rightarrow \dot{H}_o = I_o \dot{w}$ yazılırsa $\sum M_o = I_o \dot{w}$ ve $\int_{t_1}^{t_2} \sum M_o dt = I_o(w_2 - w_1)$ denklemleri elde edilir.

Bağlı Katı Cisimlerin (Katı Cisim Sistemleri) İmpuls-Momentum Denklemleri

Maddesel Nok. Sistemden elde edilen $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ ve $\sum \mathbf{M_o} = \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{o}$ denklemleri katı cisim sistemlerinin elemanlarının herbiri için yazılabilir ve toplamları alınarak:

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_\mathbf{1} + \dot{\mathbf{G}}_\mathbf{2} + ... + \dot{\mathbf{G}}_\mathbf{n} = \sum \dot{\mathbf{G}}$$

$$\sum \mathbf{M_o} = \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{1} + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{2} + ... + \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{n} = \sum \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{o}$$

inregral formunda:

$$\sum \mathbf{F} = \sum \dot{\mathbf{G}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \sum \mathbf{G_2} - \sum \mathbf{G_1} = \triangle \mathbf{G_{sis}}$$

$$\sum \mathbf{M_o} = \sum \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{o} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_o} dt = \sum \mathbf{H_{o_2}} - \sum \mathbf{H_{o_1}} = \triangle \mathbf{H_{o_{sis}}}$$

Şeklinde elde edilir.
NOT: Bağlantılardaki (A gibi) kuvvetler (reaksiyonlar) sistemin iç kuvvetleri olup, birbirlerini yok eden etki yaparlar. Yukarıdaki denklemlerde yeralmazlar. O tüm sistem için referans noktasıdır.

Hareket Miktarının (Momentumun) Korunumu

$\sum \mathbf{F} = \sum \dot{\mathbf{G}}$ ifadesinde, eğer $\sum \mathbf{F} = 0$ ise

$$\sum \dot{\mathbf{G}} = 0 \Rightarrow \frac{d \sum \mathbf{G}}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \mathbf{G} = \text{sabit} \Rightarrow \mathbf{G_2} = \mathbf{G_1}$$

veya $\triangle \mathbf{G_{sis}} = 0$ yazılır. Yani sistemin momentumundaki değişim sıfırdır.
NOT: KCS nin bazı parçalarının momentumları değişebilir. Ama tüm sistemin hareket periyodunda momentumu sabit kalır. Bunu momentin impulsu sıfır ise yine söyleriz.

$$\sum \mathbf{M_o} = \sum \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{o} dan \sum \mathbf{M_o} = 0$$

ise

$$\sum \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{o} = dx \sum \mathbf{H_o} t = 0 \Rightarrow \sum \mathbf{H_o} = \text{sabit} \Rightarrow (\mathbf{H_{o1}})_\mathbf{sis} = (\mathbf{H_{o2}})_\mathbf{sis}$$

veya $\triangle \mathbf{H_o} = \mathbf{0}$ elde edilir. Bu da bize açısal momentumun(moment of momentum=hareket miktarının momenti=Hareket Momenti) sabit olduğunu yani korunumlu olduğunu söyler. Aynı sonucu G kütle merkezi için de söyleriz.

$$\triangle (\mathbf{H_G})_\mathbf{sis} = 0 \Rightarrow (\mathbf{H_{G2}})_\mathbf{sis} = (\mathbf{H_{G1}})_\mathbf{sis}$$