# 1 Giriş

Newton'un ikinci kanunu'na göre noktasal bir cisim dengelenmemiş kuvvetlerin etkisi altında ivme kazanacaktır. Kinetik; dengelenmemiş kuvvetler ile bunların oluşturduğu hareket değişimini inceleyen bir bilimdir. Kinetik problemlerine üç şekilde yaklaşabiliriz,

- Newton'un ikinci kanunun direk uygulaması (kuvvet-kütle-ivme metodu)
- İş ve enerji prensiplerinin uygulanması
- Impuls ve Momentum methodları ile çözüm

Bu yaklaşımların hepsinin kendisine özgü özellikleri ve avantajları vardır. Bu bölümü (üçüncü bölümü) yukarıda anlatılan yaklaşımlara göre 3'e böleceğiz.

**KISIM A) Kuvvet, Kütle ve İvme**

# 2 Newton'un İkinci Kanunu

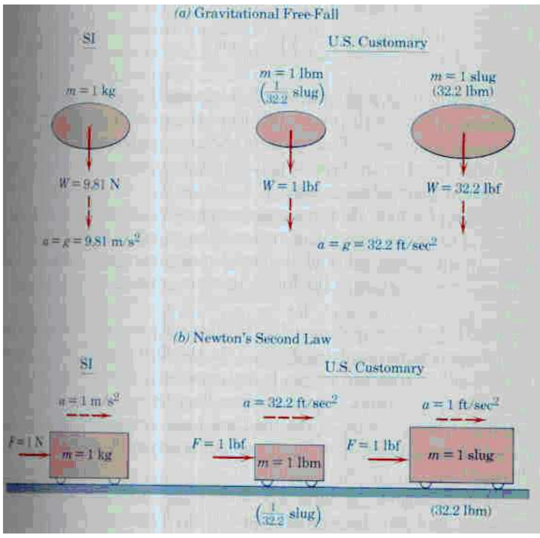
Kuvvet ve ivme arasındaki temel ilişki Newton'un ikinci kanununda bulunabilir.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

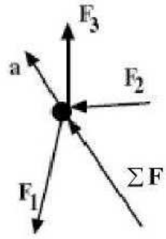
Bu kanunun sağlanımı tamamen deneyseldir. İdeal deney sisteminde kuvvet ve ivmenin hata olmadan ölçüldüğü varsayılır.

a) **Atalet sistemi:** İdeal deney sonuçları sabit bir koordinat sistemine göre ölçme ile bulunduğu gibi, sabit hızla dönmeden öteleme yapan bir koordinat sistemine göre geçerlidir, çünkü hız sabit olduğu için bu hareketli koordinat sistemindede aynı ivme ölçülür. Bu sisteme atalet sistemi denir.

b) **Birim sistemleri:** SI ve U.S birim sistemlerini kullanacağız. SI sistemi mutlak sistem, U.S sistemi ise yerçekimi sistemi diye adlandırılır.




Şekil 1:




Şekil 2:

# 3 Hareketin Denklemleri ve Problemlerin Çözümleri

Eğer $m$ kütlesindeki bir cisim $\mathbf{F}_1$ , $\mathbf{F}_2$ ve $\mathbf{F}_3$... $\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ kuvvetlerinin etkisi altındaysa Newton'un ikinci kanunu, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ yazılır. Bu denklem haraketin denklemi olarak bilinir.

**a) Dinamiğin iki problemi:**

- Birinci tip problemde ivme verilir veya bilinen kinematik durumdan direk olarak belirlenir ve noktasal cisme gelen kuvvetin hesaplanması istenir.
- İkinci tip problemde; kuvvetler belirtilir ve bunun sebep olduğu hareket istenir.

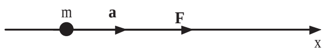
**a) Sınırlı ve Serbest Hareket:**

- Serbest harekette noktasal cisim mekanik olarak yataklanmamıştır veya hareketi herhangibir şekilde sınırlandırılmamıştır. Örneğin bir uçağın hareketi.
- İkinci hareket tipi ise sınırlı harekettir. Bu bir topun zeminde hareketi gibi yarı sınırlı veya bir trenin raylar üzerindeki hareketi gibi tam sınırlı olabilir.

**b) Sınırlı ve Serbest Hareket:**

Serbest-CisimDiyagaramının doğru çizilmesi mühendislik mekaniği konusunun en önemli dersidir. Serbest cisim diyagramı çizmeyi şöylece özetleyebiliriz.

- Noktasal cisme etki eden tüm kuvvetleri göz önüne alın. (sadece büyüklüğü diğerlerine göre çok küçük olan kuvvetler ihmal edilebilir).
- $\sum \mathbf{F}$ vektörel kuvvetlerin toplamı cisme etki eden tüm kuvvetlerin vektörel toplamıdır.
- Birbiriyle temas halindeki cisimlerden birisini diyagramdan çıkarılırsa onun uyguladığı reaksiyon kuvveti eklenir.




Şekil 3:

# 4 Doğrusal Hareket

Öğrendiğimiz kavramları şimdi cismin doğrusal hareketine uygulayacağız. Eğer hareketi $x$ ekseni doğrultsunda seçersek, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ prensibinden,

$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma_x \\ &\sum F_y = 0 \\ &\sum F_z = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer hareketin yönünü gösteren koordianatı seçme özgürlüğüne sahip değilsek hareketin üç bileşeninide göz önüne almalıyız.

$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma_x \\ &\sum F_y = ma_y \\ &\sum F_z = ma_z \end{aligned}$$

Yukarıdaki formüldeki ivme ve bileşke kuvvetini şu şekilde ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &\sum \mathbf{F} = \sum F_x\mathbf{i} + \sum F_y\mathbf{j} + \sum F_z\mathbf{k} \\ &|\sum \mathbf{F}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \end{aligned}$$

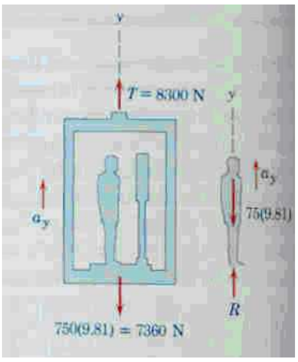
**Problem 3/1:** $75kg$. kütlesindeki bir adam asansörde, bir tartının üzerinde duruyor. Asansöre kablolar yardımı ile $3sn$. Kadar $8300N$luk bir kuvvet uygulanıyor.

- Tartıda okunan kuvveti Newton cinsinden bulunuz.
- 3 saniye sounda asansörün hızını bulunuz. (Asansör tartı ve adamın toplam kütlesi $750kg$. dır.)

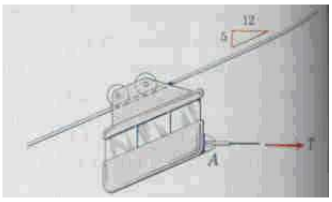
**Çözüm 3/1:** Serbest Cisim Diyagramı aşağıdaki gibidir.
*ASANSÖR İÇİN:*

$$\begin{aligned} &\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \sum F_y = ma_y \\ &8300 - 7360 = 750a_y \Rightarrow a_y = 1.257m/sn^2 \end{aligned}$$

*ADAM:*




Şekil 4:




Şekil 5:

$$\sum F_y = ma_y = R - 736 = 75(1.257)$$
$$R = 830N$$

$$\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^3 adt = \int_0^3 1.257dt$$

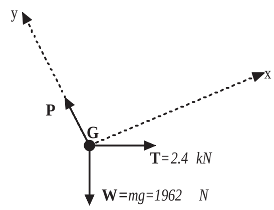
$$v - 0 = 1.257(t - 0)$$

$t = 3$ için

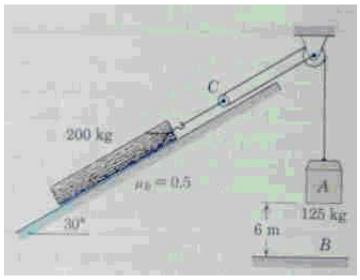
$$v = 1.257(3) = 3.77m/sn$$

**Problem 3/2:** $200kg$. kütlesindeki bir kontrol teleferiği tepesindeki sabit bir kablo üzerinde $A$ noktasından bağlı bir kablo yardımıyla hareket etmektedir. $A$'daki kablo yatay olarak $T = 2.4kN$ luk bir gerilme uygulandığı anda teleferiğin ivmesini ve onu destekleyen kablonun teleferiği destekleyen makaralara uyguladığı kuvvetini bulunuz.

**Çözüm 3/2:**




Şekil 6:




Şekil 7:

Tekerlekler ile arabayı birlikte düşünerek arabayı çizersek
**P** kablonun tekerleğe uyguladığı kuvvet
$\sum F_y = 0$, $y$'de haraket yok. ($a_y = 0$)

$$P - 2.4(\frac{5}{13}) - 1.962(\frac{12}{13}) = 0 \Rightarrow P = 2.73kN$$

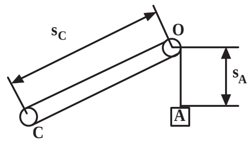
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow 2400(\frac{12}{13}) - 1962(\frac{5}{13}) = 200a \Rightarrow a = 7.30m/sn^2$$

**Problem 3/3:** $125kg$. kütlesindeki bir $A$ bloğu hareketsiz halden şekilde göterildiği gibi serbest bırakılıyor ve $200kg$. kütlesindeki bir kütüğü 30 derecelik bir rampa boyunca yukarı çekiyor. Eğer rampa ile kütük arasındaki sürtünme katsayısı 0.5 ise $A$ bloğunun yere çarptığı andaki hızını bulunuz.

**Çözüm 3/ 3:**
Toplam kablo $L = 2s_C + s_A + \text{sabit}$
Türev alarak

$$0 = 2\dot{s}_C + \dot{s}_A$$
$$0 = 2\ddot{s}_C + \ddot{s}_A$$

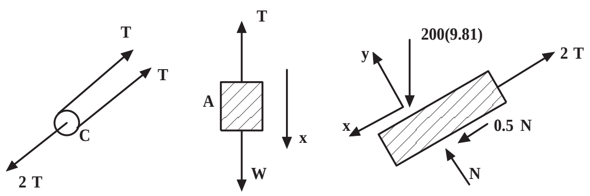
$$0 = 2a_C + a_A \tag{1}$$




Şekil 8:

Görüldüğü üzere kütüğün yukarı doğru olan ivmesi $A$'nın ivmesinin yarısına eşittir.

Makaranın kütlesini ihmal ederek ve haraketini sürtünmesiz sayarsak serbest cisim diyagramları aşağıdaki gibi olur.




(a) C için (b) A için (c) Kütük için

Şekil 9: Serbest cisim diyagramları

*Kütük:*

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow N - 200(9.81)\cos 30 = 0 \Rightarrow N = 1699\text{Newton}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow 0.5(1699) - 25 + 200(9.81)\sin 30 = 200a_C \tag{2}$$

*A Bloğu:*

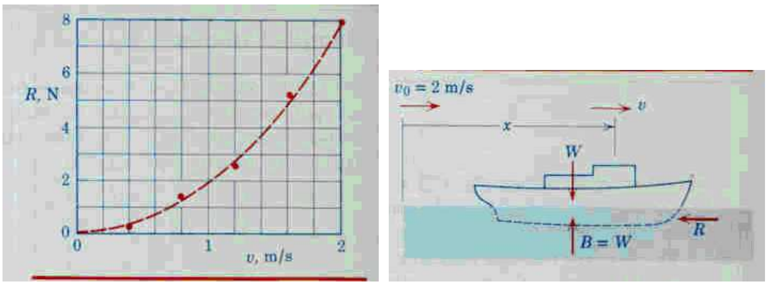
$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow 125(9.81) - T = 125a_A \tag{3}$$

1, 2 ve 3 denklemlerini ortak çözerek ($a_C$, $a_A$ ve $T$ için), $a_A = 1.777m/sn^2$, $a_C = -0.888m/sn^2$, $T = 1004N$ bulunur. A bloğu sabit ivme ile $6m$ düşerse çarpma hızı $v^2 = 2ax \Rightarrow v_A = \sqrt{2(1.777)6} = 4.62m/sn$

**Problem 3/ 4:** $10kg$.lık bir gemi tasarım modeli deney havuzunda test ediliyor. Çeşitli hızlarda direnç kuvveti grafiksel olrak çiziliyor ve parabolik bir eğri ile yaklaşık olarak temsil ediliyor. Eğer model $2m/sn$ lik bir hız ile hareket ederken serbest bırakılırsa hızının $1m/sn$ ye deüşmesi için gerekli zamanı ve bu zaman aralığında hareket ettiği $x$ mesafesini bulunuz.

**Çözüm 3/4:**

Direnç hız verilerini matematiksel olarak $R = kv^2$ parabolü ile ifade edebiliriz. $8 = k(2^2) \Rightarrow k = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow R = 2v^2$




(a) (b)

Şekil 10:

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -R = ma_x \Rightarrow -2v^2 = 10\frac{dv}{dt}$$

Buradan

$$\int_0^t dt = -5\int_2^v \frac{dv}{v^2} \Rightarrow t = 5(\frac{1}{v} - \frac{1}{2})s$$

$v = v_0/2 = 1m/sn$ için zaman:

$$t = 5(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2})s = \tfrac{5}{2}s = 2.5s$$

*Yol:* $v = \frac{dx}{dt}$ idi.

$$t = 5(\frac{2-v}{2v}) \Rightarrow 2vt = 10 - 5v \Rightarrow v = \frac{10}{2t+5}$$

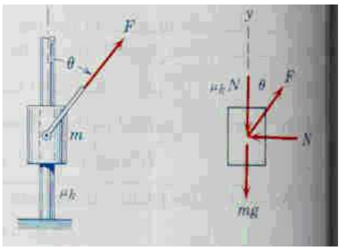
$$\frac{10}{2t+5} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int_0^{2.5} \frac{10}{2t+5}dt = \frac{10}{2}\ln 2t + 5|_0^{2.5}$$

$$x = 5(\ln 10 - \ln 5) = 5\ln\frac{10}{5} = 5\ln 2 = 3.47m$$

**Problem 3/5:** $m$ kütlesindeki bir yüzük düşey bir şaft boyunca büyüklüğü sabit fakat yönü $\theta = kt$ ($k$ sabit) formülü ile değişen bir kuvvet etkisi altında yukarı kayıyor. Yüzük $\theta = 0$ durumundan harekete başlıyor, $\theta = \pi/2$ olduğu anda yüzüğün durması için gerekli $F$ kuvvetini hesaplayın. Yüzük ile şaft arasındaki sürtünme katsayısı $\mu_k$'dır.

**Çözüm 3/5:**

Serbest cisim diyagramından




Şekil 11:

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow F\cos\theta - \mu_k N - mg = m\frac{dv}{dt}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -N + F\sin\theta = 0$$

$N = F\sin\theta$ yerine yazılırsa

$$(F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta - mg)dt = mdv$$

$$\int_0^t (F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta - mg)dt = \int_0^v mdv$$

$$mv = \frac{F}{k}[\sin kt + \mu_k(\cos kt - 1] - mgt$$

$\theta = \pi/2$ için $t = \frac{\pi}{2k}$ olur. Hız sıfırdır.

$$0 = \frac{F}{k}[\sin\frac{\pi}{2} + \mu_k(\cos\frac{\pi}{2} - 1] - mg\frac{\pi}{2k}$$

Buradan

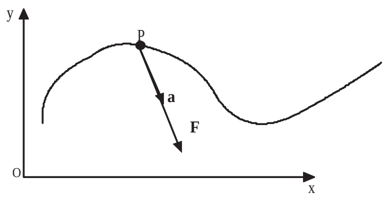
$$F = \frac{mg\pi}{2(1-\mu_k)}$$

# 5 Eğrisel Hareket

Şimdi dikkatimizi noktasal cismin bir düzlemsel eğri üzerinde hareketinin kinetiğine çevireceğiz. Newton'un 2. kanununu uygularken daha evvel 3 koordinat sisteminde de elde ettiğimiz ifadeleri kullanabiliriz.

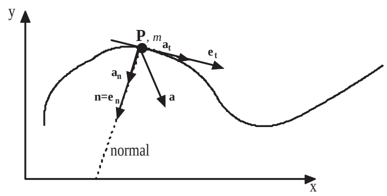
- Kartezyen koordinat sistemi

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{array}$$




x

Şekil 12:




Şekil 13:

$$a_x = \ddot{x} \quad \text{ve} \quad a_y = \ddot{y}$$

- Normal ve tanjant koordinat sistemi

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum F_n = ma_n \\ \sum F_t = ma_t \end{array}$$

Burada

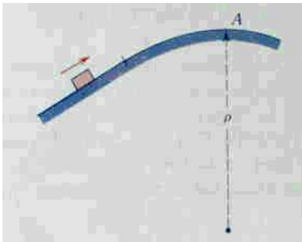
$$a_n = \rho\dot{\beta}^2 = v^2/\rho, \; a_t = \dot{v} \quad \text{ve} \quad v = \rho\dot{\beta}$$

- Polar koordinat sistemi

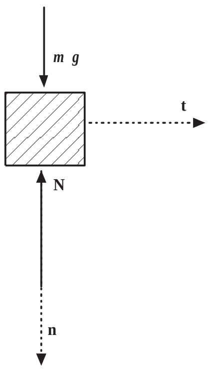
$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum F_r = ma_r \\ \sum F_\theta = ma_\theta \end{array}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{ve} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

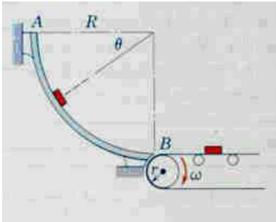
**Problem 3/6:** Şekilde gösterilen eğrisel yüzeyde kayan bloğun yüzeyle teması kesilmeden A noktasını geçebilmesi için gerekli minumum hızı bulunuz.




Şekil 14:




Şekil 15:




Şekil 16:

**Çözüm 3/6:**

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow -N + mg = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$v = \sqrt{g\rho}$$

Denkleme $N$ tepkisi yazılmadı çünkü temasın kesilmesi için $N = 0$ olmalı (yolun-bloğa). Eğer $A$'daki hız $\sqrt{g\rho}$ dan az ise $N$ mevcut temas sürer.

**Problem 3/7:** Ufak parçalar A noktasından hareketsiz halden serbest bırakılıyor ve dairesel düzgün bir yüzeyden bir B bandına kayıyorlar.

- Cisim ile dairesel yüzey arasındaki normal temas kuvvetini veren ifadeyi $\theta$ cinsinden bulunuz.
- Cisim ile band arasında temas esnasında bir kayma olmaması için, $r$ yarıçapındaki palanganın $\omega$ açısal hızını hesaplayınız.

**Çözüm 3/7:**

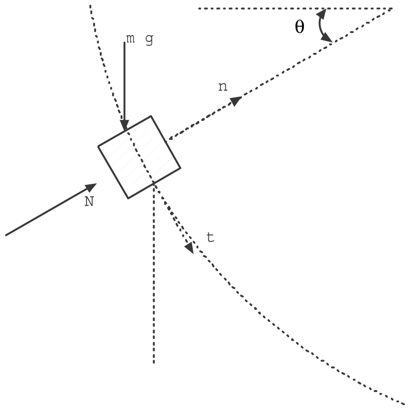
$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \sum F_t = ma_t \Rightarrow mg\cos\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\cos\theta$$

$$vdv = a_t ds \Rightarrow \int_0^v v\ dv = \int_0^\theta g\cos\theta d(R\theta)$$

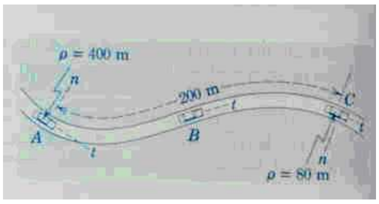
$v^2 = 2gR\sin\theta$ bulunur.

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow N - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = 3mg\sin\theta$$

Makara $v = r\omega$ hızı ile döner (Kayma olmasın isteniyor. Makaranın hızı paketin hızına eşit olmalı). Bu $\theta = \frac{\pi}{2}$ konumunda isteniyor. $\theta = \frac{\pi}{2}$ için:




Şekil 17:




Şekil 18:

$$v = \sqrt{2gR} = r\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{2gR}r$$

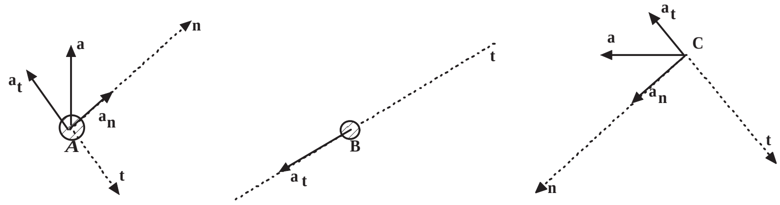
**Problem 3/8:** $1500kg$. kütlesindeki bir araba yatay bir düzlemdeki virajlı bir yolda sabit bir teğetsel(rate of speed) ivmeyle $A$ noktasında $100km/saat$ hızından $B$ noktasındaki $50km/saat$ hızına yavaşlıyor. $A$'daki eğrilik yarıçapı $400m$ ve C'deki eğrilik yarıçapı $80m$ dir. $A$, $B$ ve $C$ noktalarında yolun arabanın tekerlerine uyguladığı toplam yatay kuvveti hesaplayın. $B$ noktası eğriliğin yön değiştirdiği büküm noktasıdır.

**Çözüm 3/8:**

Yolun tekerleklere uyguladığı kuvvetleri tek bir kuvvet olarak görebiliriz. Bu nedenle arabayı maddesel nokta olarak ele alabiliriz.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) = v_0^2 + 2a_t\Delta s$$

$$a_t = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{(50/3.6)^2 - (100/3.6)^2}{2(200)} = 1.447m/sn^2$$

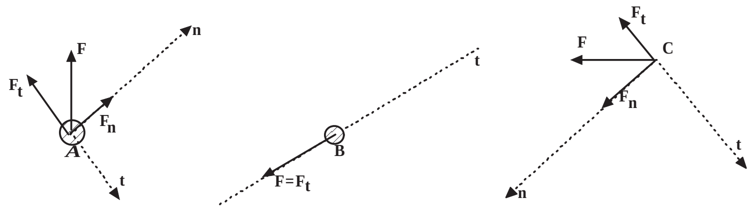



(a) (b) (c)

Şekil 19: İvme.

$A$, $B$ ve $C$'deki normal ivmeler

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \begin{cases} A: & a_n = \frac{(100/3.6)^2}{400} = 1.929 m/sn^2 \\ B: & a_n = 0; B \text{ dönüm noktası } \rho \to \infty \\ C: & a_n = \frac{(50/3.6)^2}{80} = 2.41 m/sn^2 \end{cases}$$




(a) (b) (c)

Şekil 20: Serbest cisim diyagramları.

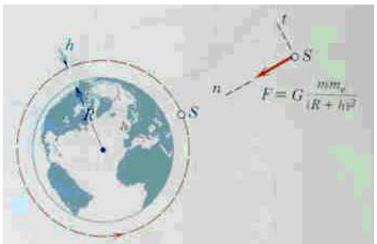
Arabanın serbest cisim diyagramına $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ uygulanırsa:

$$\sum F_t = ma_t \Rightarrow F_t = 1500(1.447) = 2170N$$

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow \begin{cases} A: & F_n = 1500(1.929) = 2890N \\ B: & F_n = 0 \\ C: & F_n = 1500(2.41) = 3620N \end{cases}$$

Arabaya etkiyen toplam kuvvetler:

$$\begin{aligned} A: \quad & F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(2890)^2 + (2170)^2} = 3620N \\ B: \quad & F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = 2170N \\ C: \quad & F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(3620)^2 + (2170)^2} = 4220N \end{aligned}$$




Şekil 21:

**Problem 3 /9:** $S$ uydusunun $320km$ uzaklıktaki bir dairesel yörünge izlemesi için gerekli hızını hesaplayın.

**Çözüm 3/9:**

Uyduya etkiyen tek kuvvet ağırlığıdır.

$$\sum F_n = ma_n \Rightarrow G\frac{m\ m_d}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{\rho} = \frac{mv^2}{R+h}$$

$$v = \sqrt{G\frac{m_d}{(R+h)}}g = G\frac{m_d}{R^2}$$

yazılırsa

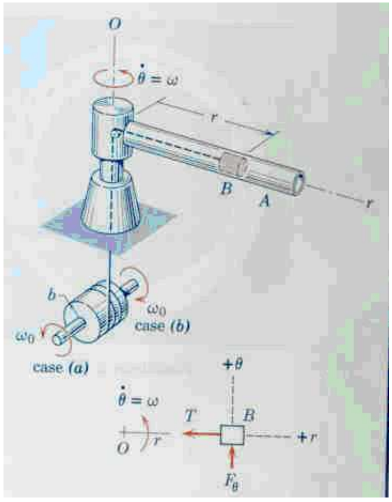
$$v = \sqrt{\frac{m_d g R^2}{m_d(R+h)}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

$$v = 6371(1000)\sqrt{\frac{9.825}{(6371+320)(1000)}} = 7720m/sn$$

**Problem 3/10:** $A$ tübü $O$ ekseni etrafında sabit bir $\omega$ açısal hızı ile dönüyor, tübün içinde $m$ kütlesinde ufak bir silindirik $B$ tıkacı var. Bu $B$ tıkacının radyal konumu; bir kablo tarafından, tübün içinden geçerek bir şafta bağlı $b$ yarıçapındaki bir kasnak tarafından kontrol ediliyor.

- Kablodaki $T$ gerilmesini ve yatay $F_\theta$ kuvvet bileşenini kasnağın şekilde gösterildiği yönde sabit $\omega_0$ açısal hızı ile dönmesi durumunda hesaplayınız.

- Aynı terimleri ters yönde dönen bir kasnak için hesaplayın.




Şekil 22:

**Çözüm 3/10:**
$(r, \theta)$ polar koordinat sistemini kullanalım.

$$\sum F_r = ma_r \rightarrow -T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\sum F_\theta = ma_\theta \rightarrow F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

**(a) hali:** $\dot{r} = b\omega_0$; $\ddot{r} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$

$$T = m(r\dot{\theta}^2) = mr\omega^2$$
$$F_\theta = m(0 + 2b\omega_0\omega) = 2bm\omega_0\omega$$

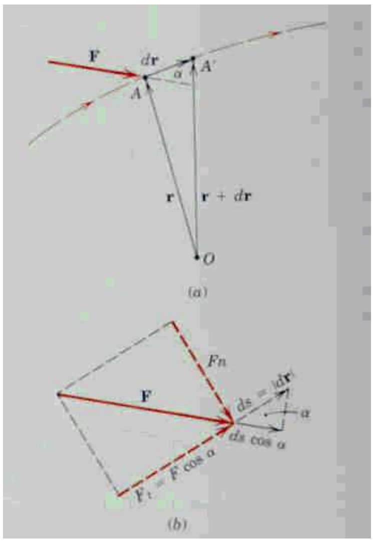
**(b) hali:** $\dot{r} = -b\omega_0$; $\ddot{r} = 0$; $\ddot{\theta} = 0$

$$T = -m(0 - r\omega^2) = mr\omega^2$$
$$F_\theta = m(0 + 2(-b\omega_0)\omega) = -2bm\omega_0\omega$$

# 6 İş ve Kinetik Enerji

Cisme etki eden kuvvetlerin, oluşturduğu yer değiştirmeye göre integrali iş ve enerji denklemleriyle; zamana göre integralide impals ve momentum denklemleriyle sonuçlanır. Böylece elde edilen sonuçları haraketin diğer denklemleri ile birleştirerek çözüme gideriz. İvmeyi elde etmey gerek kalmaz(Kolaylık).

**a) İş:F** kuvveti etkisi altında eğrisel bir yörüngede hareket eden $A$ noktasal cismini göz önüne alın. **F** kuvveti tarafından $d\mathbf{r}$ yerr değiştirmesi esnasında yapılan iş




Şekil 23:

$$dU = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

formülü ile tanımlanır.

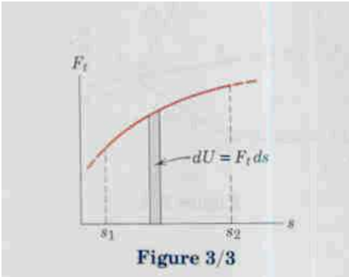
Elemansel iş;

$$\begin{array}{l} \mathbf{F}(F_x, F_y, F_z); d\mathbf{r}(dx, dy, dz) \\ \mathbf{F}(F_r, F_\theta, F_z); d\mathbf{r}(dr, d\theta, dz) \\ \mathbf{F}(F_r, F_\theta, F_\Phi); d\mathbf{r}(dr, d\theta, d\Phi) \end{array}$$

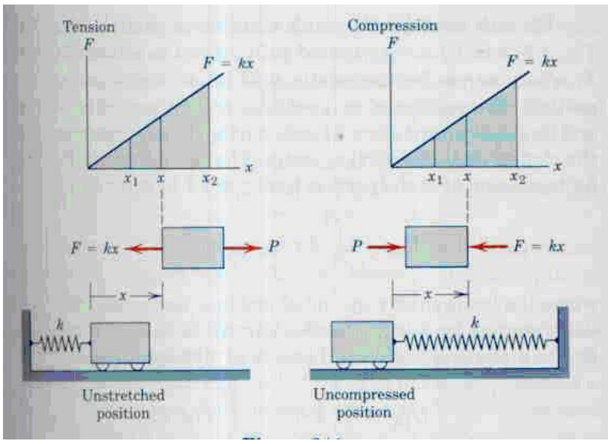
Bu skaler çarpımın büyüklüğü $dU = Fdscos\alpha$' dir.$\alpha < 90^o$ iken $dU > 0$, $\alpha = 90^o$ iken $dU = 0$ ve $\alpha > 90^o$ iken $dU < 0$ dir. Bu eşitlik $dU$ işinin, hareket yönündeki kuvvet tarafından yapıldığı ve harekete normal (dik) kuvvetin bir iş yapmadığı şeklindede yorumlanabilir. Yukarıdaki ifadeyi $dU = F_t\ ds$ şeklinde yazabiliriz ($F_t = F\cos\alpha$ dir). Eğer $F_t$ ve $ds$ (yerdeğiştirme) aynı yöndeyse yapılan iş pozitif aksi halde negatifdir. İş yapan kuvvetler aktif kuvvetler, iş yapmayan kuvvetler sınırlandırıcı (reaksiyon) kuvvetleri diye adlandırılır.

SI birim sisteminde birim kuvvet ($1N$) çarpı birim yerdeğiştirme ($1m$); $Nm$ ($Joule$) diye adlandırılır. Bunu moment ile karıştırmamak gerekir. Sonlu bir yerdeğiştirmede yapılan işi bulmak için $dU$'nun hareket boyunca integralini

$$U = \int \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \\ d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \end{array}$$




Şekil 24:




Şekil 25:

veya

$$U = \int F_t ds; \;\; F_t = F \cos\alpha; \;\; ds = |dr|$$

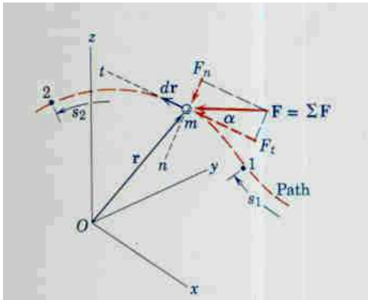
eşitliklerinden birini kullanarak almalıyız.

NOT: İş skaler bir büyüklüktür. Moment vektöreldir. Her ikisininde birimi $Nm$ dir. İşte bu büyüklük $\boldsymbol{JOULE}$(Jul) adını alır.

Bir yayın şıkıştırılması ve esnemesi ile cisme yaptığı iş negatiftir ve şöyle ifade edilir,

$$U_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

NOT: Gerilme sıkışma halinde cisim serbest bırakılırsa yay kuvveti ile yer değiştirme aynı yönde olur. Yani yayı uzattıktan veya sıkıştırdıktan sonra




Şekil 26:

yayın serbest bırakılması halinde: yay kuvvetinin cisim üzerindeki işi pozitiftir. $F = kx$ ifadesinde $x$, metre ise k, $N/m$ dir.

Şimdi cisme etki eden $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}$ kuvvetleri etkisi altında hareket eden $m$ kütleli noktasal cismi göz önüne alalım, 1 noktasından 2 noktasına kadar **F** tarafından yapılan iş,

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_1^2 (F_t \mathbf{e_t} + F_n \mathbf{e_n}) \cdot d(s\mathbf{e_t});\ \ F_n\text{'in işi sıfırdır.}$$

Yukarıdaki eşitlikte $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$' yı yerine koyarsak,

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = a_t ds$ ve $a_t ds = vdv$ ifadelerini yerine koyarsak

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Yukarıdaki formülde integrasyon eğri boyunca 1 ve 2 noktaları arasında yapılmıştır.

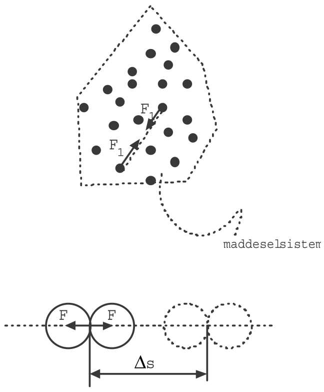
**NOT:** İşin hız cisnsinden ifadesini:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt$$

$$U_{1-2} = m \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} dt = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} d(\mathbf{v}^2)$$

$$U_{1-2} = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} d(\mathbf{v}^2) = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 |_{t_1}^{t_2}$$

$$U_{1-2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$




Şekil 27:

**b) Kinetik Enerji:**

Noktasal cismin kinetik enerjisi $T = 1/2mv^2$ formülü ile tanımlanır. Bu aynı zamanda noktasal cismi hareketsiz halden $v$ hızına ulaştırmak için yapılan toplam iştir. Kinetik enerji hızın yönü ne olursa olsun daima pozitftir. Birimi $Nm$'dir veya Joule dir.

$U_{1-2}$ ifadesini $U_{1-2} = T_2 - T_1$ şeklinde yazabiliriz. Bu noktasal cismin iş$-$enerji eşitliğidir. Bu eşitliği noktasal cisme etki eden tüm kuvvetlerin; cismin 1 durumundan 2 durumuna gelmesi sırasında yaptığı işin, cismin kinetik enerjisindeki değişmeye eşit olduğu şeklinde okuyabiliriz.

**NOT:** $T_1 - T_2 = \Delta T$; $\Delta T > 0$, $\Delta T = 0$, $\Delta T < 0$ olabilir.

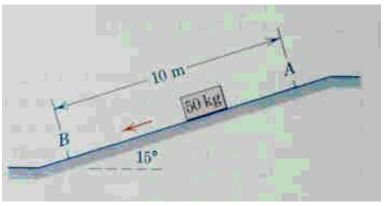
İş enerji denklemini genelinde $T_1 + U_{1-2} = T_2$ şeklinde kullanırız.

**NOT:** İvmeye gerek kalmaz ve sadece iş yapan kuvvetler bulunur.

**NOT:** İki maddesel nokta sürtünmesiz olarak birbirine temas etseler veya karşılıklı yalnız bulunsalar birbirlerine ters yönlü aynı doğrultuda ve eşit büyüklükte kuvvet uygularlar. Bu iki bağlı maddesel noktanın haraketinde kuvvetlerin tatbik noktası aynı $\Delta s$ yolunu alırlar. Sonuç olarak iki bağlı maddesel noktadan oluşan sistemin iç kuvvetlerinin toplam işi sıfırdır. $U_{1-2} = T_2 - T_1$ tüm sisteme uygulanabilir. $U_{1-2}$ toplam iş veya net iş adını alır(Dış kuvvetlerin). $\Delta T = T_2 - T_1$ dir. Toplam kinetik enerji sistemin tüm elemanlarının kinetik enerjilerinin toplamını ifade eder.

**NOT:** Birbirine bağlı olan sistemleri parçalarına ayırmadan inceleme şansı ilave bir avantajdır.

**c) Güç:** Bir makinanın kapasitesi birim zamanda yaptığı iş veya verdiği enerji ile ölçülür. Yapılan toplam iş veya enerji çıktısı kapasiteyi göstermez. Çünkü bir motor ne kadar küçük olursa olsun eğer yeterli zaman verilirse büyük bir iş veya enerji çıktısı verebilir. Bundan dolayı makinanın kapasitesi




Şekil 28:

onun gücü ile ölçülür ve buda birim zamanda yapılan iş olarak tanımlanır.

$$P = dU/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$$

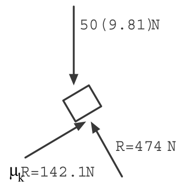
$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{F}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

**d) Verim:** Bir makinanın verimi, o makina tarafından yapılan işin ona verilen işe oranı olarak tanımlanır. Herhangibir andaki mekanik verim mekanik güç cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$e_m = P_{\text{çıktı}}/P_{\text{girdi}} = \frac{dU_{\text{çıktı}}}{dU_{\text{girdi}}} = \frac{(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})_{\text{çıktı}}}{(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})_{\text{girdi}}} = \frac{\text{Alınan İş}}{\text{Verilen İş}} = \frac{\text{Çıkış İş}}{\text{Giriş İş}}$$

**NOT:** Elektriksel ve ısıl enerji kaybıda olabilir. $e_e$ =elektriksel verim, $e_t$ =termal verim; temsili ile genel verimlilik $e = e_m \cdot e_t \cdot e_e$ şeklindedir.

**Problem 3/11:** $50kg$'lık bir sandık $4m/sn$ lik ilk hızı ile $A$ noktasından bırakılıyor. $B$ noktasına ulaştığındaki hızını bulunuz. Kinetik sürtünme katsayısı 0.3 tür.




Şekil 29:

**Çözüm 3/11:**
Haraket boyunca toplam iş $U = F \cdot s$.

$$U_{1-2} = [50(9.81)\sin 15 - 142.1]10 = -151.9J$$

Kinetik enerji değişimi:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2}m(v^2 - 4^2)$$

İş−enerji denkleminden:

$$-151.9 = 25(v^2 - 16) \Rightarrow v^2 = 9.93(m/sn)^2 \Rightarrow v = 3.15m/sn$$

**Problem 3/12:** Düz kasalı bir tır $80kg$ lık sandığı taşırken hareketsiz halden başlayıp $75m$ de $72km/saat$ hızına düz bir yolda sabit ivme ile ulaşıyor. Sandığa etki eden sürtünmenin bu mesafede yaptığı işi hesaplayın. Sandıkla tırın kasası arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları

**a)** 0.3 ve 0.28

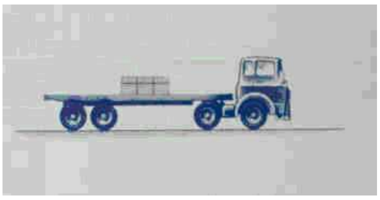
**b)** 0.25 ve 0.20 dir.

**Çözüm 3/12:**
Sandık kaymıyorsa ivmesi tırın ivmesi olacaktır.

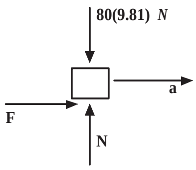
$$v^2 = \cancelto{0}{v_0^2} + 2a(s - \cancelto{0}{s_0}) = 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(72/3.6)^2}{2(75)} = 2.67m/sn^2$$

a)

$$\sum F = ma = 80(2.67) = 213N = F$$



Şekil 30:




x

Şekil 31:

Bu kuvvet $\mu_s$N $= 0.3(80)(9.81) = 235N$ sürtünme kuvvetinden küçüktür. O halde KAYMAZ. Gerçek sürtünme kuvvetinin işi:

$$U_{1-2} = 213(75) = 1600J$$

b) $\mu_s = 0.25$, maksimum mümkün olan sürtünme kuvveti $F_{mak} = \mu_s$N $= 0.25(80)(9.81) = 196.2N$ bu kaymama için gerekli olan $213N$'dan küçüktür. O halde sandık kayar. Kinetik sürtünme katsayısı kullanılarak haraket hali için sürtünme kuvveti:

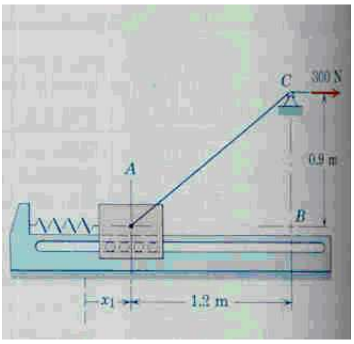
$$F = 0.20(80)(9.81) = 157.0N$$

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{157}{80} = 1.962m/sn^2$$

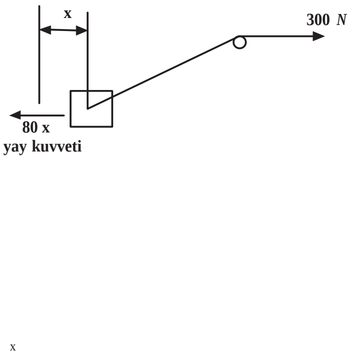
Sandığın aldığı yol ile tırın aldığı yol ivmeleri ile orantılı olup, sandık $\frac{1.962}{2.67}75 = 55.2m$ yol alır.

Kinetik sürtünme kuvvetinin işi:

$$U = Fs \Rightarrow U_{1-2} = 157.0(55.2) = 8660J$$




Şekil 32:




Şekil 33:

**Problem 3/13:** $50kg$ lık bir blok bilyalı yataklanmıştır böylece yatay raylar üzerinde ihmal edilebilir bir sürtünmeyle kablo vasıtasıyla uygulanan $300N$ luk bir kuvvet yardımıyla hareket ediyor. Blok hareketsiz halden $0.233m$ esnemiş yaya bağlı bir şekilde bırakılıyor (Yay sabiti $k = 80N/m$ dir). Bloğun $B$ noktasına ulaştığı andaki hızını hesaplayınız.

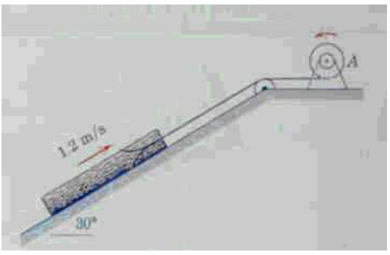
**Çözüm 3/13:**

Rayların tepkisi iş yapmadıkları için serbest cisim diyagramına alınmadılar. İş yapan kuvvetler, yay kuvveti ile 300 N yatay kuvvettir.

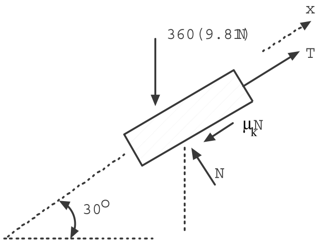
Blok $x = 0.233m$'den $x = 0.233 + 1.2 = 1.433m$'ye yer değiştirdiği zaman yay kuvveti NEGATİF iş yapar.

$$U = \int F dx \Rightarrow U_{1-2} = -\int_{0.233}^{1.1433} 80x\ dx = -40x^2|_{0.233}^{0.1433} = -80J$$

Yatay $300N$ kuvvetinin işi: kuvvet ile kablonun yatay yönde aldığı yolun çarpımından elde edilir. Yatay yol= $\sqrt{(1.2)^2 + (0.9)^2} - 0.9 = 0.6m$. O halde




Şekil 34:




Şekil 35:

iş = 300(0.6) = 180$J$.

İş−enrji denklemini tüm sistem için yazarsak

$$U_{1-2} = \Delta T \Rightarrow -80 + 180 = \frac{1}{2}(50)(v^2 - 0) \Rightarrow v = 2m/sn$$

**Problem 3/14:** Bir motorlu tambur 360$kg$ lık bir kütüğü 30$^o$ lik bir eğik düzlem üzerinde 1.2$m/sn$ hızı ile yukarı çekiyor. Eğer motorun güç çıktısı 4$kW$ ise kütük ile eğik düzlem arasındaki kinetik sürtünme kuvvetini hesaplayın. Eğer motorun gücü ani olarak 6$kW$'a çıkarılırsa kütüğün buna karşılık ani ivmesi ne olur.

**Çözüm 3/14:**

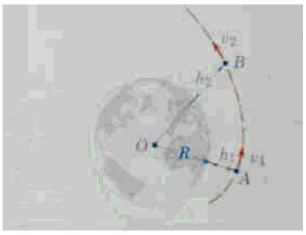
$$\mathrm{N} = 360(9.81)\cos 30 = 3060N$$

$\mu_k$N = kinetik sürtünme = 3060$\mu_k$ olur.

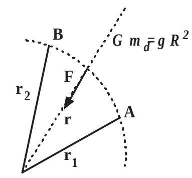
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - 3060\mu_k - 360(9.81)\sin 30^o = 0$$

$$T = 3060\mu_k + 1766$$

$$P = Tv \Rightarrow T = \frac{P}{v} = \frac{4000}{1.2} = 3330N$$



Şekil 36:



Şekil 37:

yerine yazılırsa

$$3330 = 3060\mu_k + 1766 \Rightarrow \mu_k = 0.513$$

Ani olarak güç arttırıldığında

$$P = Tv \Rightarrow T = \frac{P}{v} = \frac{6000}{1.2} = 5000N$$

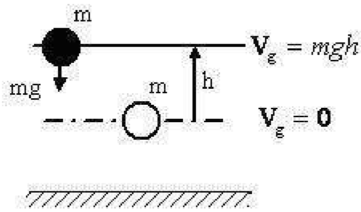
$$\sum F_x = 360\ a \Rightarrow 5000 - 3060\mu_k - 360(9.81)\sin 30^o = 360a$$
$$a = 4.63m/sn^2$$

**Problem 3/15:** $m$ kütlesindeki bir uydu dünya etrafındaki eliptik bir yörüngede dönüyor. Dünyadan $h_1 = 500km$ mesafesinde $v_1 = 30000km/saat$ hızına sahipse, dünyadan $h_2 = 1200km$ mesafesindeki $B$ noktasına eriştiğinde uydunun $v_2$ hızını hesaplayınız.

**Çözüm 3/15:**

$$F = G\frac{m_d m}{r^2} = \frac{gR^2 m}{r^2}$$

$$U_{1-2} = -\int_{r_1} r_2 F\ dr = -\int_{r_1} r_2 \frac{gR^2 m}{r^2} dr = -gR^2 m \int_{r_1} r_2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$




Şekil 38:

İş enerji denklemi $U_{1-2} = \Delta T$:

$$mgR^2(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2gR^2(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$$

$$v_2^2 = 69.44(10^6) - 10.72(10^6) = 58.73(10^6)(m/sn^2)$$

$$v_2 = 7663m/sn = 25590km/h$$

# 7 Potansiyel Enerji

Bu bölümde yer çekimi ve yay kuvvetlerinin yaptığı işi Potansiyel Enerji kavramını tanıtarak bulacağız.

## 7.1 Yerçekimi Potansiyel Enerjisi

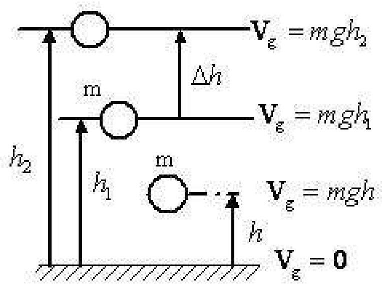
Yeryüzüne yakın mesafedeki m kütlesindeki bir noktasal cismin hareketini göz önüne alalım, cismin ağırlığı sabit kabulu yapabiliriz. Yerçekimi potansiyel enerjisi m kütleli cismi referans konumundan h yüksekliğine çıkaran, yerçekimine karşı yapılan mgh işine denir.

Burada Vg herhangibir referans düzleminde Vg= 0 kabulu yapılır. Noktasal cisim $h = h_1$ mesafesinden daha yukarıdaki $h = h_2$ mesafesine kaldırılırsa potansiyel enerjideki değişme

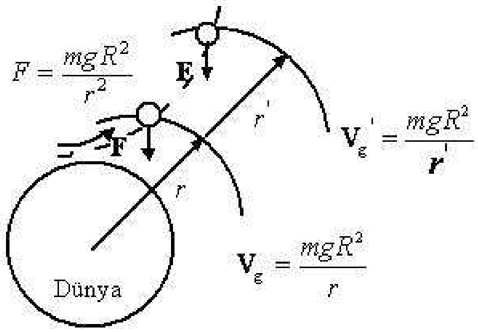
$$\triangle V_g = mgh_2 - mgh_1 \Rightarrow \triangle V_g = mg(h_2 - h_1) = mg\triangle h$$

**NOT:** Potansiyel Enerji konuma bağlıdır. Yörüngeye bağlı değildir. Burada yerçekimi kuvvetinin cisme yaptığı iş $-mg\triangle h$dır.

Eğer yükseklikteki değişmeler çok büyükse çekim kuvveti $F = \frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{mgR^2}{r^2}$ artık sabit değildir. Noktasal cismin radyal konumundaki değişiklik r den r' noktasına ise, iş $\mathbf{F} = \frac{mgR^2}{r^2}\mathbf{e_r}$ ve $\mathbf{dr} = dr.\mathbf{e_r}$ alınarak




Şekil 39:




Şekil 40:

$$U_{(r-r')} = \int_r^{r'} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2 (\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}) = V_g' - V_g$$

$r' = \infty$ olduğu anda $V_g = 0$ almak geleneğine uyarsak,

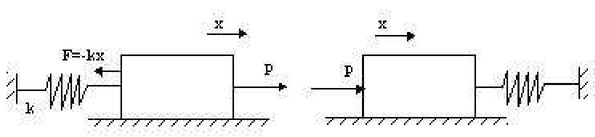
$$V_g = \frac{mgR^2}{r}$$

$r_1$ den $r_2$ ye giderken potansiyel enerjideki değişim aşağıdaki gibidir.

$$\triangle V_g = mgR^2 (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

# 8 Elastik Potansiyel Enerji

İkinci tip PE örneği elastik cisimlerin deformasyonunda (örneğin yay) görülür. Yaya onu esneterek veya sıkıştırarak yapılan iş yayda PE olarak depolanır.




Şekil 41:

Yaydaki PE'yi

$$V_e = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

olarak tanımlıyoruz.

**NOT:** $U = \int \mathbf{F}.\mathbf{dr}$, doğrultusu x ise U yay kuvveti işini göstermek üzere:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} = -kx\mathbf{i}, \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$$
$$U = \int_0^x (-kx\mathbf{i}).(dx\mathbf{i})$$
$$U = -k\frac{x^2}{2}$$

yazılabilir.

PE'deki değişme, eğer yay x1 konumundan x2 konumuna geliyorsa ikinci PE ile ilk PE arasındaki fark olarak tanımlanır,

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = V_e2 - V_e1$$

**NOT:** $x_2 > x_1$ ise $V_{e_2} - V_{e_1} > 0$ , Eğer $x_2 < x_1$ ise $V_{e_2} - V_{e_1} < 0$ olur. Yayda deformasyon yok ise ( $x_2 = x_1$ hali) PE=0 dır.

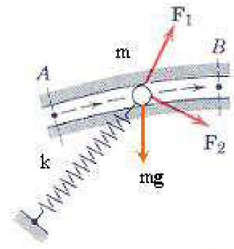
temsil ederiz.

# 9 İş-Enerji Denklemi

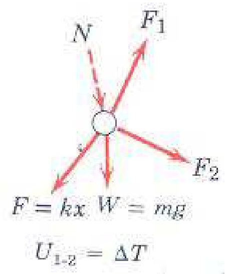
Sisteme elastik elemanları da ekliyerek daha evvel yazdığımız iş enerji denklemini ($U'_{1-2} = \triangle T$ ve $\triangle T = T_2 - T_1$ idi.)

Sisteme elastik elemanları da ekliyerek daha evvel yazdığımız iş enerji denklemini $U'_{1-2} = \triangle T + \triangle Vg + \triangle Ve = T_2 - T_1 + V_{g2} - V_{g1} + V_{e2} - V_{e1}$ şeklinde yazabiliriz. Burada $U'_{1-2}$ ağırlık ve yay kuvvetleri dışında tüm dış kuvvetlerin yaptığı iştir.

Yukarıdaki eşitliği,




Şekil 42:




Şekil 43:

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

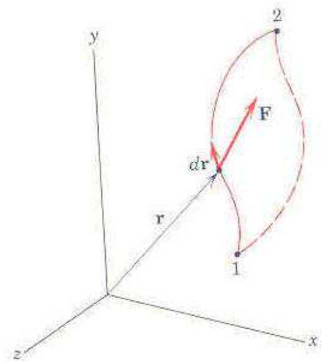
veya $U'_{1-2} = \triangle(T + V_g + V_e) = \triangle E$ şekillerinde yazabiliriz.

**Not:** Sadece; yerçekimi (ağırlık), elastik (yay kuvveti) ve iş yapmayan bağ kuvvetleri olan problemlerde $U'_{1-2} = 0$ olup $\triangle E = 0 \Rightarrow E = sbt$ ve sistem korunumludur.

**Not:** Eğer sisteme etkiyen $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$ gibi dış kuvvetler yok ise $U' = 0 \Rightarrow \triangle E = 0 \Rightarrow E = Top.Mek.En. = T + V_g + V_e = sbt$ elde edilir. Buradan toplam enerjinin korunumu denklemi:

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

şeklinde ifade edilir.




Şekil 44:

# 10 KORUNUMLU KUVVET ALANLARI

$V_g$ ve $V_e$ , yörüngeye değil, cismin konumuna bağlı.

**Tanım:** Potansiyel enerjinin konuma bağlı olması (yörüngeye bağlı olmaması) özelliğine sahip kuvvet alanına Korunumlu (Potansiyelli) Kuvvet Sistemi denir. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{konum}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ alınarak iş $=d$U $= \mathbf{F}.d\mathbf{r} \Rightarrow U = \int \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$ bulunur. Burada $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ ifadesi bir V skaler fonksiyonun $-dV$ tam diferansiyeli ise yani $\mathbf{F}.d\mathbf{r} = -dV$ ise

$$U_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = -V|_{V_1}^{V_2} = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2$$

$V = V(x, y, z)$ dir. Bu, işin 1 ve 2 konumundaki potansiyel fonksiyonların farkına eşit olduğu, yörüngeye bağlı olmadığı anlamına gelir.

$$V = V(x, y, z) \Rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -\mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

$$= -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Öyleyse V potansiyel fonksiyonu (enerji) ile kuvvet arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Bu ifadeler kuvvet ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$

elde edilir.

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$
$$V = V(x, y, z)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \quad V = V(x, y, z)$$

**Not:** $d\phi = Pdx + Qdy + Rdz$ ifadesinde $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ İfadeleri aynı anda sağlanırsa $d\phi$ bir tam diferansiyeldir. Buna göre $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ den y'ye göre türev alırsak,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}; \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}; \frac{\partial F_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \frac{\partial F_z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

yazılır. Buradan

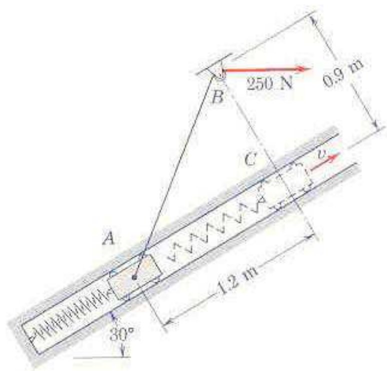
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

ifadesi elde edilir. Verilen kuvvet alanı bu üç denlemi aynı anda sağlıyorsa kuvvet potansiyellidir denir. V(x,y,z) potansiyel fonksiyondur. $\mathbf{F} = -\nabla V$ dir. $U_{1-2} = V_1 - V_2$ dir.

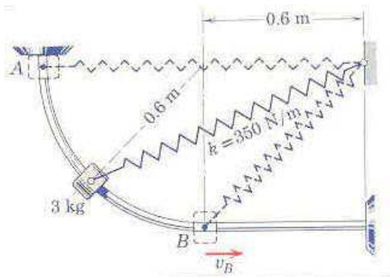
**Not:** $\nabla V$ 'ye V(x,y,z) potansiyel fonsiyonunun gradyeni denir. Yani **F** dış kuvveti V(x,y,z)'nin gradyeninden elde edilebiliyorsa **F** potansiyellidir.

**Örnek Problem 3/16:** 10 kg lik bir sürgü sürtünmesiz olarak şekildeki yatakta yukarıya doğru hareket etmekte olup, yay sabiti k=60 N/m ve yayın uzaması(deformasyonu) A konumunda 0.6m dir. A da sürgü sükünet halindeyken hareket başlatılıyor. Kablodaki sabit kuvvet 250 N olup makarada sürtünme yoktur. Sürgü C den geçerken v hızını belirleyiniz.

**Çözüm 3/16:** sürgü, uzamayan kablo ve yayı bir sistem olarak alalım.$U'_{1-2}=\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e$ 250 N lik kuvvetin tatbik noktasının aldığı yol AB-BC dir.




Şekil 45:




Şekil 46:

$AB = \sqrt{(1.2)^2 + (0.9)^2} = 1.5m$
Alınan yol:1.5-0.9=0.6m $U'_{1-2} = 250(0.6) = 150J$
Kinetik enerjideki değişim:
$\Delta T = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(10)(v^2 - 0) = 5v^2$
$\Delta V_g = mg\Delta h = 10(9.81)(1.2\sin 30^o) = 58.9J$
$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}(60)[(1.2 + 0.6)^2 - (0.6)^2] = 86.4J$
Yerlerine yazılırsa:
$150 = \frac{1}{2}(10v^2) + 58.9 + 86.4 \Rightarrow v = 0.974m/s$

**Örnek Problem 3/17:** 3 kg lik bir sürgü hızsız olarak bırakıldığı A konumundan sürtünmesiz olarak dairesel bir çubuk üzerinde kaymaktadır. Yay sabiti 350 N/m ve normal yay uzunluğu 0.6m dir. Sürgünün B konumundaki hızını bulunuz.

**Çözüm 3/17:** Ağırlığın ve yay Kuvvetinin potansiyel enerjilerinin Değişim sözkonusu. Yolun sürgüye Tepkisi dış bağ kuvvetidir. Yola dik olduğundan $U'_{1-2} = 0$ olur. Sürgü ile yayı bir sistem olarak alırsak :

$$OB^2 = 0.6^2 + 0.6^2 \Rightarrow OB = 0.6\sqrt{2}$$
$$x_B = OB - 0.6 \Rightarrow x_B = 0.6(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) = \frac{1}{2}(350)[0.6(\sqrt{2}-1)^2 - (0.6)^2] = -52.2J$$

$$\Delta V_g = mg\Delta h = 3(9.81)(-0.6) = -17.66J$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(3)(v_B^2 - 0) = 1.5v_B^2$$

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0 \Rightarrow 1.5v_B^2 - 17.66 - 52.2 = 0$$
$$\Rightarrow v_B = 6.82m/s$$

**Örnek Problem:** Bir maddesel noktaya etkiyen kuvvet alanı $\mathbf{F} = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} - 2x^3z\mathbf{k}$ şeklindedir. Kuvvetin potansiyeli olduğunu gösteriniz ve potansiyel fonksiyonunu elde ediniz.

**Çözüm:** $\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ dersek buradan

$$X = 4yx - 3x^2z^2$$
$$Y = 2x^2$$
$$Z = -2x^3z$$

yazılır.

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

eşitlikleri aynı anda sağlanmalı.

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 4x, \frac{\partial Y}{\partial x} = 4x \qquad \text{sağlanır.}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -6x^2z, \frac{\partial Z}{\partial x} = -6x^2z \qquad \text{sağlanır.}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \text{sağlanır.}$$

F kuvveti potansiyellidir.

$\frac{\partial V}{\partial x} = -X = -4yx + 3x^2z^2 \Rightarrow V = -2x^2y + x^3z^2 + f(y,z)$
$\frac{\partial V}{\partial y} = -Y = -2x^2 \Rightarrow -2x^2 = -2x^2 + 0 + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0$

Ve f(y,z)=f(z) alınır. Böylece$V = -2x^2y + x^3z^2 + f(z)$ olur.

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -Z \Rightarrow 2x^3z = 0 + 2x^3z + \frac{df(z)}{dz} \Rightarrow \frac{df(z)}{dz} = 0 \Rightarrow f(z) = C = sabit$$

Böylece cevap $V = x^3z^2 - 2x^2y + C = V(x,y,z)$ olarak elde edilir.

**Örnek Problem:** Maddesel cisme etkiyen kuvvet alanı $\mathbf{F}(X,Y,Z)$

$$X = \frac{y}{z}, Y = \frac{x}{z}, Z = -\frac{yf(x)}{z^2}$$

şeklindedir. f(x) fonksiyonunu öyle belirleyiniz ki F kuvveti potansiyelli olsun. Potansiyel fonsiyonunu ve kuvvetin tatbik noktasının $M_1(x_1,y_1,z_1)$ konumundan $M_2(x_2,y_2,z_2)$ noktasına gitmesi halinde kuvvetin işini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

sağlanmalı.

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \Rightarrow -\frac{y}{z^2} = -\frac{yf'(x)}{z^2}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \Rightarrow -\frac{x}{z^2} = -\frac{f(x)}{z^2}$$

$$-\frac{x}{z^2} = -\frac{f(x)}{z^2} \Rightarrow f(x) = x$$

bulunur. Bunu

$$-\frac{y}{z^2} = -\frac{yf'(x)}{z^2}$$

de yerine koyarsak

$$-\frac{y}{z^2} = -\frac{y(1)}{z^2}$$

sağlanır. f(x)=x olmalı. Böylece

$$\mathbf{F}(X,Y,Z) = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{x}{z}\mathbf{j} - \frac{y}{z^2}\mathbf{k}$$

olur ve bu kuvvet potansiyellidir. V(x,y,z) için

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X, \frac{\partial V}{\partial y} = -Y, \frac{\partial V}{\partial z} = -Z$$

buradan hareketle

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{y}{z} \Rightarrow V = -\frac{y}{z}x + F(y,z)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -Y \Rightarrow -\frac{x}{z} + \frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = -\frac{x}{z} \Rightarrow \frac{\partial F(y,z)}{\partial y} = 0$$

ise F(y,z) foksiyonu y'ye bağlı değil, o halde F=F(z) alınır.

$$V = -\frac{yx}{z} + F(z)$$

yazılır.

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -Z \Rightarrow \frac{yx}{z^2} + \frac{dF(z)}{dz} = \frac{yx}{z^2} \Rightarrow \frac{dF(z)}{dz} = 0 \Rightarrow F(z) = C$$

$$F(z) = sabit = C \Rightarrow V = -\frac{yx}{z} + C$$

**Not:** C sabiti konulmayabilir.

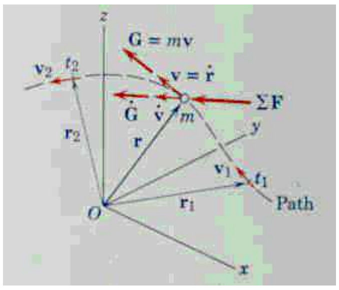
$$U_{M_1-M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -dV = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2$$

$$U_{M_1-M_2} = -\frac{y_1x_1}{z_1} + C - (-\frac{y_2x_2}{z_2} + C) = \frac{y_2x_2}{z_2} - \frac{y_1x_1}{z_1}$$

# 11 IMPALS VE MOMENTUM

## 11.1 GİRİŞ

Önceki bölümlerde hareketin denklemi $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ yı yerdeğiştirmeye nazaran integre ettik. Bu bölümde hareketin denklemini zamana göre integre edip impals ve momentum eşitliklerini bulacağız. Cisme etki eden kuvvetler eğer tanımlanmış zaman aralığında oldukça kısa bir sürede etki ediyorsa, bu denklemler problemin çözümünü çok kolaylaştırır. (ÇARPIŞMALARDA OLDUĞU GİBİ)




Şekil 47:

# 12 LİNEER IMPALS VE LİNEER MOMENTUM

Uzayda eğrisel bir yörüngede hareket eden m kütlesindeki noktasal cismi göz önüne alalım,

m kütlesini sabit varsayarsak hareketin denklemi,

$$\sum \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = \frac{dm\mathbf{v}}{dt}$$

veya

$$\sum \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemde $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ noktasal cismin lineer momentumu olarak tanımlanır ve SI birim sisteminde kg.m/sn veya N .sn olarak ifade edilir. Yukarıdaki eşitlik bir vektör eşitliği olduğu için bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sum \mathbf{F}_x = \dot{\mathbf{G}}_x$$

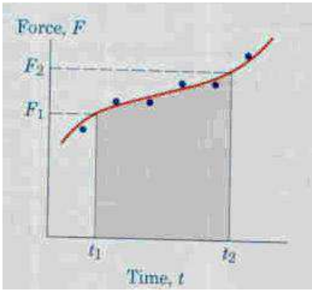
$$\sum \mathbf{F}_y = \dot{\mathbf{G}}_y$$

$$\sum \mathbf{F}_z = \dot{\mathbf{G}}_z$$

(Lineer Momentumun (Hareket Miktarının) skaler denklemleri)

Bu eşitlikler sistemin kütlesi değişmedikçe geçerlidir ve birbirlerinden bağımsız olarak uygulanabilir. Bu vektörel eşitliği zamana göre integre edersek

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \triangle \mathbf{G} = (m\mathbf{v})_2 - (m\mathbf{v})_1$$




Şekil 48:

elde ederiz. Yukarıdaki denklemde $t_1$ anındaki lineer momentum $G_1$ ve $t_2$ anındaki lineer momentum (hareket miktarı) $G_2$ dir. Bu eşitlik lineer momentumdaki değişme toplam lineer impalsa eşittir diye de ifade edilebilir. Yukarıdaki eşitliği

$$\mathbf{G_1} + \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G_2}$$

şekline koyarsak, bunu cismin ilk momentumu artı cisme etki eden liner impals, cismin son momentumuma eşittir diye okuyabiliriz. Bu eşitliğin kartezyen koordiatlardaki bileşenlerini yazarsak skaler denklemleri elde ederiz.

**NOT:**Kuvvetin zamana göre integraline impals (IMPULS) denir.

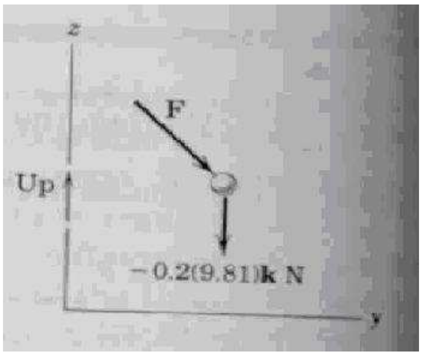
Cisme etki eden kuvvetin zamanla nasıl değiştiğinin bilindiği veya deneysel olarak tespit edildiği durumlar vardır. Böyle durumlarda grafik veya nümerik integrasyon yapılmalıdır.

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G_2} - \mathbf{G_1} = (m\mathbf{v})_2 - (m\mathbf{v})_1 \\
&ox : \textstyle\int_{t_1}^{t_2} \sum F_x dt = (mv_x)_2 - (mv_x)_1 \\
&oy : \textstyle\int_{t_1}^{t_2} \sum F_y dt = (mv_y)_2 - (mv_y)_1 \\
&oz : \textstyle\int_{t_1}^{t_2} \sum F_z dt = (mv_z)_2 - (mv_z)_1
\end{aligned}$$

**Not:** Maddesel cisme etkiyen tüm kuvvetlerin impulsları toplamı bileşke impulsu verir. Serbest cisim diagramı çizilerek ihmal edilecek küçük kuvvetleri göz ardı etmek mümkündür.

Lineer Momentumun Korunumu Eğer cisme etki eden bileşke kuvvetlerinin toplamı hareket boyunca sıfırsa, onun lineer momentumu G sabit kalır. Bu durumda cismin lineer momentumunun korunduğu söylenir. Lineer momentum örneğin x ekseni doğrultusunda korunup, y ve z eksenleri doğrultusunda korunmayabilr. Bunun için serbest cisim diyagramının dikkatlice incelenmesi gerekilidir (İlgili yöndeki toplam impalsın sıfır olup olmadığı kontrol edilmelidir).

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G_2} - \mathbf{G_1}$$




Şekil 49:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{G} = 0 \quad \text{veya} \quad \mathbf{G_1} = \mathbf{G_2}$$

Yukarıdaki formül lineer momentumum korunma prensibini ifade eder.

**Problem 3/ 18:** 0.2 kg kütlesindeki bir cisim, düşey y-z düzleminde (z düşey, y yatay) kendi ağırlığı ve zamanla değişen bir F kuvveti etkisi altında hareket ediyor. Cismin lineer momentumu $G = (3/2)(t^2+3)\ \mathbf{j} - (2/3)(t^3-4)\mathbf{k}$ ifadesi ile (t saniye cinsinden) veriliyor. Cisme etki eden kuvveti t= 2 sn. iken bulun.

**Çözüm 3/18:** Kuvvet-momentum (hareket miktarı) denklemi:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F} - \mathbf{W} = \dot{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{F} - 0.2(9.81)\mathbf{k} = \frac{d}{dt}[\frac{3}{2}(t^2+3)\mathbf{j} - \frac{2}{3}(t^3-4)\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = 0.2(9.81)\mathbf{k} + \frac{3}{2}(2t)\mathbf{j} - \frac{2}{3}(2t^2)\mathbf{k}]$$

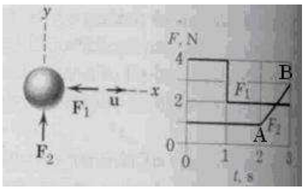
$$\mathbf{F} = 0.2(9.81)\mathbf{k} + 3t\mathbf{j} - 2t^2\mathbf{k}$$

t=2 saniye için $\mathbf{F} = 6\mathbf{j} - 6.04\mathbf{k}$ ve $F = |\mathbf{F}| = \sqrt{6^2 + 6.04^2} = 8.51N$

$$\tan\theta = \frac{F_z}{F_y} = \frac{6.04}{6} \Rightarrow \theta = \arctan(\frac{6.04}{6}) = 45.19^o$$

**Problem 3/19 :** 0.5 kg kütlesindeki bir cisim t=0 anında x ekseni yönünde v=10m/s hızı ile hareket ediyor. Cisme etki eden F1 ve F2 kuvvetlerinin büyüklükleri grafiksel olarak verilmiştir. Cismin t= 3 s. anındaki hızını bulunuz.

**Çözüm 3/19:** Hareket Düzlemsel.




Şekil 50:

$\int_{t_1}^{t_2}\sum \mathbf{F}dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta\mathbf{G}, \mathbf{G} = m\mathbf{v}$

$\int_{t_1}^{t_2}\sum F_x dt = m(v_{x2} - v_{x1}) = m\Delta v_x (1)$

$\int_{t_1}^{t_2}\sum F_y dt = m(v_{y2} - v_{y1}) = m\Delta v_y (2)$

$(1) \Rightarrow \int_0^1 -4dt + \int_1^3 -2dt = 0.5(v_x - 10) = -4t|_0^1 + (-2t)|_1^3 = 0.5v_x - 5$
$\Rightarrow -4 - 6 + 2 = 0.5v_x - 5 \Rightarrow v_x = \frac{-3}{0.5} = -6m/s$

$(2) \Rightarrow \int_0^2 1dt + \int_2^3 (2t-3)dt = 0.5v_y \Rightarrow 2 + (\frac{2t}{2} - 3t)|_2^3 = 0.5v_y$
$\Rightarrow 2 + 9 - 9 - (4 - 6) = 0.5v_y \Rightarrow V_y = \frac{4}{0.5} = 8m/s$

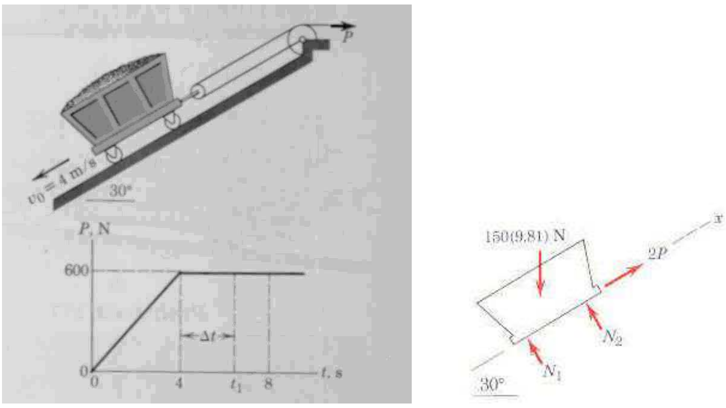
$$\mathbf{v} = (-6\mathbf{i} + 8\mathbf{j})m/s \Rightarrow \tan\theta_x = \frac{8}{-6} \Rightarrow \theta_x = 126.9^o$$

**Problem 3/20 :** 150 kg kütlesindeki bir araba bir eğik yüzeyde 4 m/s hızı ile aşağı doğru hareket edrken t=0 anında P kuvveti onu çeken palanga sistemine uygulanıyor. P kuvveti grafikte gösterildiği gibi 4 saniyede liner olarak 600 newtona ulaşıyor ve ondan sonra sabit kalıyor.

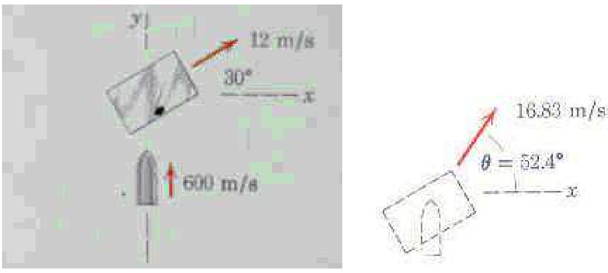
- Arabanın yön değiştirdiği $t = t_1$ anını
- t= 8 s. anında arabanın hızını hesaplayın

**Çözüm 3/20:**
**a)** Araba, hızı sıfır oluncaya kadar aşağıya hareketine devam eder. Hızının sıfır olduğu anı $t = (4 + \triangle t)s$ ile temsil edelim. Pozitif x doğrultusunda impuls-momentum denklemi güvenle uygulanabilir: Denklemin x üzerindeki iz düşümü:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum F_x dt = m(v_{x2} - v_{x1}) = m\Delta v_x$$




Şekil 51:




Şekil 52:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(4)(2)(600) + 2(600)\Delta t - 150(9.81)\sin 30^o(4 + \Delta t) = 150[0 - (-4)]$$

$$2400 + 1200\Delta t - 2942.99 - 735.74\Delta t = 600$$
$$\Rightarrow t = 4 + \Delta t = 4 + 2.46 \Rightarrow t = 6.46$$

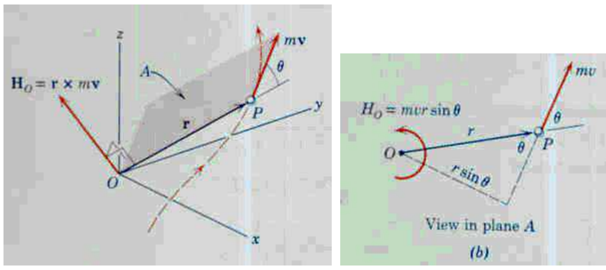
**b)** Tüm zaman aralığında impuls-momentum uygulanırsa

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(4)(2)(600) + 2(600)\Delta t - 150(9.81)\sin 30^o(8) = 150[v - (-4)]$$

$$150v = 714 \Rightarrow v = 4.76m/s$$

**Problem 3/21:** 50 g kütlesindeki bir mermi 600 m/s hızı ile hareket ederken 4 kg lık bir bloğa saplanıyor. Eğer blok çarpışmadan önce yatay bir düzlemde şekilde gösterildiği gibi 12 m/s hızı ile hareket ediyorsa, çarpışmadan sonra bloğun hızını bulunuz.

**Çözüm 3/21:** Blok ile mermiyi tek sistem olarak alırsak (çarpmadan sonra), çarpışma kuvveti iç kuvvet olur. Başka bir dış kuvvet (hareket düzleminde) olmadığına göre




Şekil 53:

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F} dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta \mathbf{G} = 0$$

O halde,

$$\mathbf{G_1} = \mathbf{G_2} \Rightarrow 0.05(600\mathbf{j}) + 4(12)(\cos 30^{o\mathbf{i}} + \sin 30^o \mathbf{j}) = (4 + 0.05)\mathbf{v}$$

Çarpışmadan sonra hızlar eşittir:

$$\mathbf{v} = (10.26\mathbf{i} + 13.33\mathbf{j})m/s \qquad v = |\mathbf{v}| = 16.83m/s$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{13.33}{10.26} = 1.299 \Rightarrow \theta = 52.4^o$$

# 13 Açısal İmpuls ve Açısal Momentum

Lineer hız ve lineer momentum eşitliklerine paralel olarak açısal impuls ve açısal momentum eşitlikleri bulunur (mevcuttur). Şekilde gösterildiği gibi bir uzaysal eğride hareket eden noktasal cismin sabit bir eksen takımındaki lineer momentumu G= mv idi. G nin O noktasına göre momentine AÇISAL MOMENTUM denir ve $\mathbf{H_O} = \mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v}$ ile temsil edilir.

$$H_O = |\mathbf{H_O}| = mvr\sin\theta = |\mathbf{r}|\, m\, |\mathbf{v}| \sin\theta$$
$$mv\sin\theta = h, H_O = |\mathbf{r}|\, h = A$$

Açısal momentumun yönü sağ el kuralına göre belirlenir.Açısal momentum, r ve mv vektörlerinin düzlemine diktir.Yukarıdaki eşitliği vektörel bileşenler cinsinden yazarsak:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r}xm\mathbf{v} = (v_z y - v_y z)\mathbf{i} + (vxz - vzx)\mathbf{j} + (vyx - vzx)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H_O} = m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Bundan dolayı $H_x = m(v_z y - v_y z)$, $H_y = m(v_x z - v_z x)$ ve $H_z = m(v_y x - v_z x)$ şeklindedir.

Şimdi bir cisme etki eden kuvvetlerin momenti ile cismin açısal momentumu arasındaki ilişkiyi bulabiliriz. Cisme etki eden kuvvetlerin orijin O noktasına göre momentini göz önüne alalım, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} = r \times m(d\mathbf{v}/dt) = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$ Şimdi $\mathbf{H_O} = \mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v}$ ifadesinin zamana göre türevini alalım,

$$\dot{\mathbf{H}}_\mathbf{O} = \dot{\mathbf{r}}\mathrm{x}m\mathbf{v} + \mathbf{r}\mathrm{x}m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\mathrm{x}m\mathbf{v} + \mathbf{r}\mathrm{x}m\dot{\mathbf{v}} = \sum \mathbf{M_O}$$

Yukarıdaki denkleme göre; noktasal bir cisme etki eden kuvvetlerin sabit bir O noktasına göre momenti; O noktasına göre açısal momentumun zamana göre değişim oranına (türevine) eşittir. (Niye? Çünkü $\mathbf{v}\mathrm{x}m\mathbf{v} = 0$)

**Not:** Bu bağıntı, maddesel cisimler sistemi veya bir katı cisim alındığında başarı ile uygulanır.

**Not:** Bu bağıntı, maddesel cisimler sistemi veya bir katı cisim alındığında başarı ile uygulanır.

$\sum \mathbf{M_O} = \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{O}$ izdüşümleri: $\sum \mathbf{M}_{\mathbf{O}_x} = \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{O}_x}, \sum \mathbf{M}_{\mathbf{O}_y} = \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{O}_y}, \sum \mathbf{M}_{\mathbf{O}_z} = \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{O}_z}$

Açısal İmpuls $\sum \mathbf{M_O} = \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{O}$ eşitliğini dt ie çarpıp integre edersek

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M}_O dt = \mathbf{H}_{O2} - \mathbf{H}_{O1} = \triangle \mathbf{H}_O$$

veya

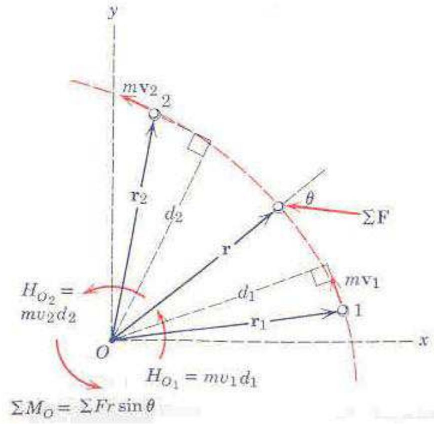
$$\mathbf{H}_{\mathbf{O_1}} + \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \mathbf{H}_{\mathbf{O_2}}$$

ifadesini elde ederiz. Burada $\mathbf{H}_{O_2} = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{H}_{O_1} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1$ dir.

**Tanım:** Moment ile zamanın çarpımı açısal impals diye tanımlanır. Yukarıdaki eşitliği sabit bir O noktasındaki açısal momentumdaki değişme o noktadaki toplam açısal impalsa eşittir şeklinde de okuyabiliriz.. Açısal impals ve açısal momentum birimleri SI sisteminde N.m.s veya $kg.m^2/s$, US sisteminde ft.lb.sec dır.

**Not:**$\mathbf{H}_{\mathbf{O_1}} + \int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \mathbf{H}_{\mathbf{O_2}}$ifadesini başka türlü yorumlarsak, 1 konumundaki açısal momentum ile açısal impulsun toplamı ikinci konumdaki açısal momentuma eşittir.

**Not:** $\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \mathbf{H}_{\mathbf{O_2}} - \mathbf{H}_{\mathbf{O_1}} = \Delta \mathbf{H_O}$ denklemi vektöreldir. x, y, z eksenlerine izdüşümleri yazılırsa:




Şekil 54:

$\int_{t_1}^{t_2}\sum \mathbf{M_{O}}_x dt = (\mathbf{H_{O}}_x)_2 - (\mathbf{H_O})_1 = m[(u_z y - u_y z)_2 - (u_z y - u_y z)_1]$
$= [(\mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v})_x]_2 - [(\mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v})_x]_1$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum \mathbf{M_{Oy}} dt = (\mathbf{H_{Oy}})_\mathbf{2} - (\mathbf{H_{Oy}})_\mathbf{1} = [(\mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{mv})_\mathbf{y}]_\mathbf{2} - [(\mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{mv})_\mathbf{y}]_\mathbf{1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum \mathbf{M_{O}}_z dt = (\mathbf{H_{O}}_z)_2 - (\mathbf{H_{O}}_z)_1 = [(\mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v})_z]_2 - [(\mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v})_z]_1$$

skaler denklemleri bulunur (üç boyutlu hal). Düzlemsel halde moment hareket düzlemine dik olan bir doğrultuya göre alınır.

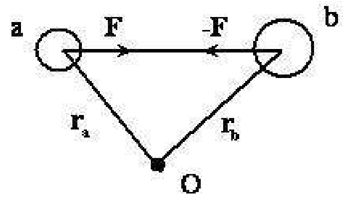
$$H_{O_1} = |\mathbf{r}_1\mathrm{x}m\mathbf{v}_1| = r_1 m v_1 \sin\theta = m v_1 d_1$$
$$H_{O_2} = |\mathbf{r}_2\mathrm{x}m\mathbf{v}_2| = m v_2 d_2$$

$\int_{t_1}^{t_2}\sum \mathbf{M_O} dt = \mathbf{H_{O_2}} - \mathbf{H_{O_1}} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\sum Fr\sin\theta dt$
$= m v_2 d_2 - m v_1 d_2$

$$d_1 = r_1\sin\theta, d_2 = r_2\sin\theta$$

**Açısal Momentumun Korunumu:**

Noktasal bir cisme sabit bir O noktasına göre etki eden tüm kuvvetlerin momenti ilgili zaman aralığında sıfıra eşitse cismin açısal momentumu $\mathbf{H_O}$ sabit kalır. Bu durumda noktasal cismin açışal momentumunun korunduğu söylenir. Açısal momentum bir eksende korunup diğerlerinde korunmayabilir, bunun için serbest cisim diyagramının dikkatlice incelenip ilgili eksenlerde kuvvetlerin momentinin sıfıra eşit olup olmadığı incelenmelidir.




Şekil 55:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \mathbf{H_{O_2}} - \mathbf{H_{O_1}} = \Delta \mathbf{H_O} \Rightarrow \Delta \mathbf{H_O} = 0 \text{veya} \mathbf{H_{O_1}} = \mathbf{H_{O_2}} = sbt$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
$$\sum \mathbf{M_O} = \mathbf{r_a} \text{x} \mathbf{F} + \mathbf{r_a} \text{x} (-\mathbf{F}) = 0$$

Yukarıdaki formül açısal momentumun korunumu prensibini ifade eder.
a için: $\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r_a} \text{x} \mathbf{F}) dt = -(\mathbf{H_{O_2}} - \mathbf{H_{O_1}}) = -\Delta \mathbf{H_O}$
b için:$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{r_a} \text{x} (-\mathbf{F})] dt = \mathbf{H_{O_2}} - \mathbf{H_{O_1}} = \Delta \mathbf{H_O}$

$$0 = -\Delta \mathbf{H_a} - \Delta \mathbf{H_b} \Rightarrow \Delta \mathbf{H_a} = \Delta \mathbf{H_b}$$

**Problem 3/ 22:** 2 kg kütlesindeki bir blok yatay sürtünmesiz bir düzlemde bir yaya bağlı olarak kaymaktadır. Bloğun O noktasına göre açısal momentumu grafikte verildiği gibi değişmektedir t=6.5 s anında r=150 mm ve $\beta = 60^o$ ise bu andaki F kuvvetini hesaplayınız.

**Çözüm 3/22:** Yay kuvveti O dan geçer, moment, sıfırdır. O'ya göre sadece F nin momenti yazılabilir.

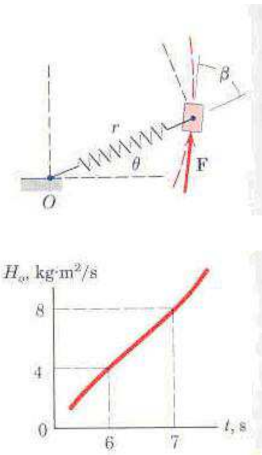
$$\sum \mathbf{M_O} = \mathbf{r} \text{x} \mathbf{F} \Rightarrow \sum \mathbf{M_O} = rF \sin \beta$$

Vektörel ifadeye gerek yok. Hareket düzlemsel ve $\mathbf{H_O}$' nun doğrultusu hareket düzlemine diktir. eğrisinin eğimi

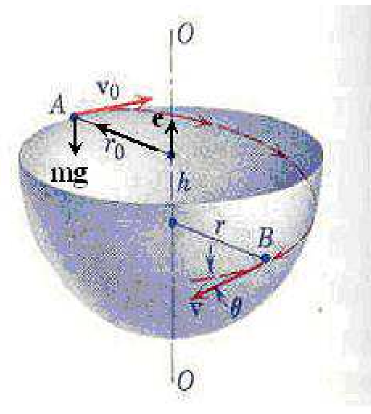
$$\tan \alpha = \frac{dH_O}{dt} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{7-6} = 4 = \dot{H}_O$$

olarak elde edilir.

$$\sum M_O = \dot{H}_O \Rightarrow (0.150) F \sin 60^o = \dot{H}_O = 4 \Rightarrow F = 30.8N$$




Şekil 56:




Şekil 57:

**Problem 3/ 23:** Ufak kütleli bir cisim A noktasında sürtünmesiz küresel bir kabın kenarına teğet yere paralel $v_0$ ilk hızı ile bırakılıyor. Noktasal cisim A'dan h mesafe aşağıdaki ve düşey eksenle r mesafedeki bir B noktasından geçerken noktasal cismin v hızı kürenin yatay teğeti ile $\theta$ açısı yapıyorsa; $\theta$ açısını bulunuz.

**Çözüm 3/23:** Maddesel noktaya etkiyen kuvvetler; ağırlık ve yüzeyin normal tepkisidir. Normal tepki OO yu keser. OO eksenine göre momenti sıfırdır. mg ağırlığı OO'ya paraleldir. Moment yaratmaz. Buna göre açısal momentum korunumlu olur.

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{M_O} dt = \mathbf{H_{O_2}} - \mathbf{H_{O_1}} = \Delta \mathbf{H_O} \Rightarrow \mathbf{H_{O2}} = \mathbf{H_{O1}} \Rightarrow \mathbf{H_{O1}} = \mathbf{H_{O2}}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{H_{O1}}| = |\mathbf{H_{O2}}| \Rightarrow m r_0 v_0 = m v r \cos\theta \qquad \text{(a)}$$

Etkiyen kuvvetler yalnızca ağırlık ve iş yapmayan normal tepki olduğu için $U'_{1-2} = \Delta(T + V_g + V_e) = \Delta E$ 'deki $U'_{1-2} = 0$ olup enerji korunumludur.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \qquad \text{(b)}$$

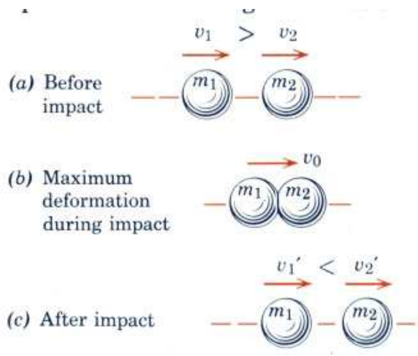
(a) ve (b) arasında v yok edilip $r^2 = r_0^2 - h^2$ konulursa:

$$v_0 r_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\sqrt{r_o^2 - h^2}\cos\theta \Rightarrow \theta = a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1 - \frac{h^2}{r_o^2}}}\right)$$

**KISIM D ) ÖZEL UYGULAMALAR**

# 14 ÇARPIŞMA

İmpals ve momentum prensipleri çarpışan cisimlerin davranışını incelerken önemli bir kullanım alanı bulur. Çarpışma terimi; iki cismin birbirine vurmasını ve bu anda oluşan kuvvetlerin cisme etki eden diğer kuvvetlere nazaran daha büyük ve çok kısa süreli olmasını ifade etmektedir. Çarpışma şartlarında; ses, ısı oluşumu ve çarpışan cisimlerde DEFORMASYON (ŞEKİL BOZUKLUĞU) ve ESKİ ŞEKLİNİ ALMA gibi kompleks olaylar ortaya çıkar. Çarpışma şartlarındaki ufak değişiklik, çarpışma olayında ve çarpışmayı takip eden kısa anda olan olaylarda büyük değişimlere sebep olabilir. Bu nedenle her çarpışmanın kendi şartlarına göre incelenmesi gerekir. Çarpışma problemlerinde asıl amaç: çarpışma sonrasında cisimlerin hızlarının hesabıdır.




Şekil 58:

Çarpışma etki-tepki pransibine göre olmaktadır. Bunların dışında başka kuvvet yoktur(sürtünme gibi).

**a) Direk Merkezi Çarpışma**

$m_1$ ve $m_2$ kütlesinde aynı doğrultuda $v_1$ ve $v_2$ hızı ile hareket eden iki küresel cismi düşünelim: Eğer $v_1 > v_2$ ise çarpışma oluşur ve kontak (temas) kuvvetleri merkezlerin doğrultusundadır. Buna direk merkezi çarpışma denir.

b) şeklinde görülen çarpışma esnasında cisimler BİR SİSTEM (tek bir maddesel cisim) oluştururlar. Kuvvetler zıt yönlü ve eşit olur. Sistemin liner momentumunun korunumundan,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{4}$$

yazabiliriz. Burada iki tane bilinmeyenimiz ($v_1'$ ve $v_2'$) var. Bunları çözebilmek için bir eşitliğe daha ihtiyacımız var. Çarpışma katsayısını ($e$) aşağıdaki gibi tanımlayalım,

*1. cisim için*

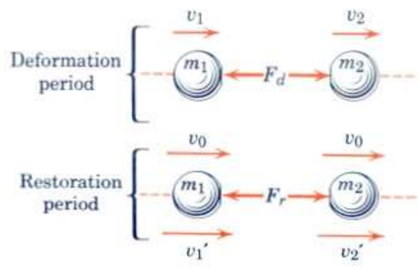
$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_1[-v_1' - (-v_0)]}{m_1[-v_0 - (-v_1)]} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$

2. cisim için

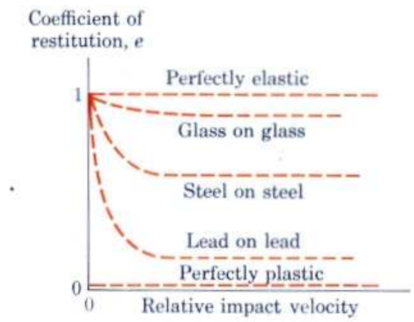
$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_0^{t_0} F_d dt} = \frac{m_2(v_2' - v_0)}{m_2(v_0 - v_2)} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$

Yukarıdaki iki denklem arasında $v_0$'ı elimine edersek

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{|\text{Ayrılmanın bağıl hızı}|}{|\text{Yaklaşmanın bağıl hızı}|} \tag{5}$$




Şekil 59:




Şekil 60:

elde ederiz. Denklem (4) ve (5)'den $v'_1$ ve $v'_2$ son hızları çözülür.

**NOT:** Klasik impact (çarpışma) teorisine göre; hiç enerji kaybı olmayan tam elastik çarpışma için $e = 1$'dir, diğer taraftan çarpışmadan sonra cisimler birbirine kenetlenirse $e = 0$'dır (Tam plastik çarpışma). Genelde ise $0 \leq e \leq 1$ dir.

**b) Açısal Merkezi Çarpışma**

Şimdi cisimlerin ilk hızlarının birbirine paralel olmadığı durumu inceleyelim,

**NOT:** Enerji kaybı:

$$\Delta T = (\text{Toplam Kinetik Enerji})_1 - (\text{Toplam Kinetik Enerji})_2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2)$$

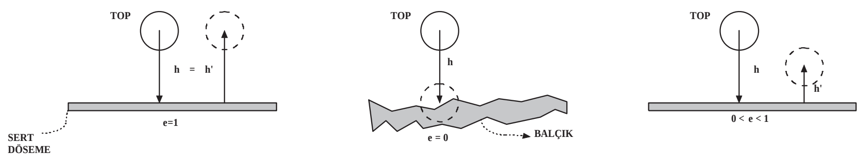
$$\Delta T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2) + \frac{1}{2}(m_2 v_2^2 - m_2 v_2'^2)$$

**NOT:** Doğrusal çarpışmada $y$ doğrultusunda kuvvet yoktur. Bu doğrultuda cisimlerin momentumları korunumludur.

**NOT:**

1. Çarpışmadan sonra cisimlerin tamamen eski formlarına dönerse bunlara TAM ELASTİK cisimler denir. Enerji kaybı yoktur. Toplam enerji sabittir. $e = 1$ olur.

2. Çarpışmadan sonra deformasyon kalıcı olursa, cisimlere plastik cisimler ve çarpışmaya plastik çarpışma denir. Enerji kaybı vardır. Çarpışmadan sonra hızları aynıdır. Bu iki hal ekstrem haldir. Gerçek cisimlerde sağlanmaz.

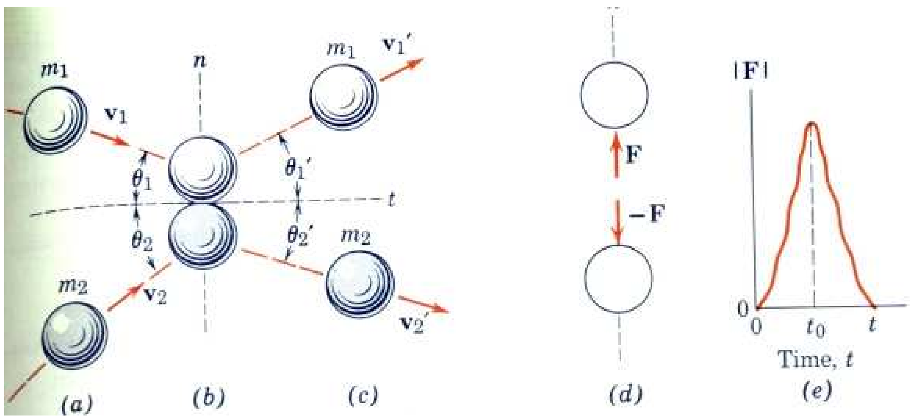



(a) Mükemel ELASTİK çarpışma: ENERJİ KAYBI YOK.

(b) Mükemmel Plastik Çarpışma: TÜM ENERJİ DEFORMASYONA GİDER.

(c) Normal Çarpışma

Şekil 61:




Şekil 62:

## AÇISAL MERKEZİ (EĞİK) ÇARPIŞMA

Doğrusal merkezi çarpışma eğik çarpışmaya genelleştirilebilir. Eğik çarpışma, cisimler arasında sürtünme olmadığı hal için $t$ ve $n$ ekseni boyunca yaptıkları haraketlerin SÜPERPOZİSYONU olarak ele alırız. Cisimlerin $t$ doğrultusundaki haraketi cisimlerin paralel iki doğru boyunca haraketine denktir. Bu harakette çarpışma yoktur. $n$ doğrultusundaki haraket ise doğrusal merkezi çarpışmaya karşıtlık gelir. Çarpışmadan önce ve sonra $t$ doğrultusundaki hız bileşenleri eşittir. $(v_1)_t = (v_1')_t$, $(v_2)_t = (v_2')_t$ dir.

$$e = \text{çarpışma katsayısı} = \frac{|\text{Çarpışmadan sonraki bağıl hız}|_n}{|\text{Çarpışmadan önceki bağıl hız}|_n}$$

şeklinde geçerlidir.

Bu çarpışma, direkt çarpışmanın bir genelleştirmesidir.

$$(v_1)_n = -v_1 \sin\theta_1; \;\; (v_1)_t = v_1 \cos\theta_1; \;\; (v_2)_n = v_2 \sin\theta_2; \;\; (v_2)_t = -v_2 \cos\theta_2$$

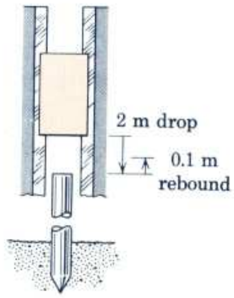
$m_1$, $m_2$, $(v_1)_t$, $(v_1)_n$, $(v_2)_t$, $(v_2)_n$ verilenler (bilinenler), $(v_1')_t$, $(v_1')_n$, $(v_2')_t$, $(v_2')_n$ bilinmeyenlerdir. Amaç bu bilinmeyenlerin elde edilmesidir.

Çarpışmadan önce $v_1$ ve $v_2$ hızlarına sahip $m_1$ ve $m_2$ kütlesindeki noktasal cisimler, çarpışmadan sonra $v_1'$ ve $v_2'$ hızlarıyla yollarına devam ediyor. $v_1'$ ve $v_2'$ hızlarını bulmak için dört denkleme ihtiyacımız var:

1 Sistemin momentumunun $n$ yönünde korunumu,

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n \tag{6}$$

2 ve 3 her cismin momentumunun $t$ yönünde korunumu ($t$ doğrultusunda impulsif kuvvet yoktur)




Şekil 63:

$$m_1 \text{ için: } m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t \tag{7}$$

$$m_2 \text{ için: } m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \tag{8}$$

4 çarpışma katsayısı

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \tag{9}$$

Yukarıdaki denklemlerde $(v_1)_n = -v_1 \sin\theta_1$, $(v_1)_t = v_1 \cos\theta_1$, $(v_2)_n = v_2 \sin\theta_2$, $(v_2)_t = v_2 \sin\theta_2$. 6, 7, 8 ve 9 denklemleri ortak çözülerek bilinmeyenler elde edilir. Sonra $\theta_1'$ ve $\theta_2$ hesaplanır.

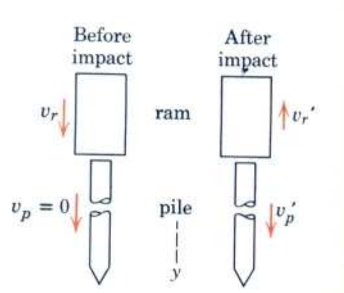
NOT: Direkt merkezi çarpışmada yazılan enerji kaybı $n$ doğrultusunda yazılarak buradada kullanılır.

**Problem 3/ 24:** Bir kazık çakıcının 800 $kg$ kütlesindeki çekici 2400 $kg$'lık kazığın üzerine 2 $m$ yükseklikten hareketsiz halden bırakılıyor. Eğer çekiç çarpışmadan sonra 0.1 $m$ yukarı şıçrarsa:

- Kazığın çarpışmadan hemen sonra hızını bulun.
- ÇArpışma katsayısı $(e)$ yi hesaplayın.
- Çarpışma sırasındaki enerji kaybını hesaplayın

**Çözüm 3/ 24:**

Çekicin ve kazığın ağırlıkları çarpışma kuvvetinin yanında çok küçük olur. İhmal edilir. Serbest düşmede enerjinin korunumundan çekicin ilk ve son hızını $v = \sqrt{2gh}$ formülünden elde ederiz.




Şekil 64:

$$v_y = \sqrt{2(9.81)(2)} = 6.26\ m/s \quad \text{çekicin ilk hızı}$$

Sıçrama hahalinde

$$v_y' = \sqrt{2(9.81)(0.1)} = 1.40\ m/s \quad \text{çekicin son hızı}$$

**1)** $\mathbf{G_1} = \mathbf{G_2}$ Haraket miktarının (momentumun) korunumundan çekiç ve kazık tek sistem alınarak

$$m_Ç v_Ç + m_k v_k = m_Ç v_Ç' + m_k v_k'$$

$$800(6.26) + 0 = 800(-1.40) + 2400 v_k' \Rightarrow v_k' = 2.55\ m/sn$$

**2)**

$$e = \frac{|\text{ayrılmadaki bağıl hız}|}{|\text{yaklaşımdaki bağıl hız}|} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{2.55 - (-1.40)}{6.26 + 0} = 0.63$$

**3)** Sistemin kinetik enerjisi çarpışmadan hemen önceki çekicin kinetik enerjisidir.

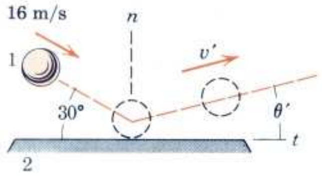
$$T = \frac{1}{2} m_Ç v_Ç^2 + \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m_Ç v_Ç^2 + 0 = \frac{1}{2} m_Ç (2gh)$$

$$T = m_Ç g h = 800(9.81)(2) = 15700\ J$$

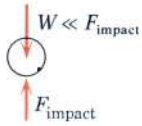
Çarpışmadan sonraki kinetik enerji

$$T' = \frac{1}{2} m_Ç v_Ç'^2 + \frac{1}{2} m_k v_k'^2 = \frac{1}{2}(800)(1.40)^2 + \frac{1}{2}(2400)(2.55)^2 = 8620 J$$

Kayıp enerji oranı




Şekil 65:




Şekil 66:

$$\text{Kayıp enerji oranı} = \frac{\text{Enerji kaybı}}{\text{Toplam enerji}} = \frac{15700 - 8620}{15700} = \%45$$

**Problem 3/ 25:** Bir top 16 $m/s$ hızı ile bir zemine şekilde görüldüğü 30 derece açı ile çarpıyor. Eğer çarpışma katsayısı $e = 0.54$ ise geri şıçrama hızı $v'$ ve açısını $\theta'$ hesaplayın.

**Çözüm 3/ 25:**

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \Rightarrow 0.5 = \frac{(0 - (v_1')_n}{16 \sin 30^o - 0} \Rightarrow (v_1')_n = 4\ m/s$$

$t$ doğrultusunda topun momentumu değişmez. (Sürtünme yok ve $t$ doğrultusunda topa etkiyen başka kuvvet yok)

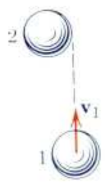
$$m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t \Rightarrow (v_1')_t = (v_1)_t = 16 \cos 30^o = 13.86\ m/s$$

$$v_1' = \sqrt{(v_1')_t^2 + (v_1')_n^2} = \sqrt{4^2 + (13.86)^2} = 14.42\ m/s$$

$$\tan \theta' = \frac{(v_1')_n}{(v_1')_t} = \frac{4}{13.86}$$

$$\theta' = \arctan \frac{4}{13.86} = 16.1^o$$

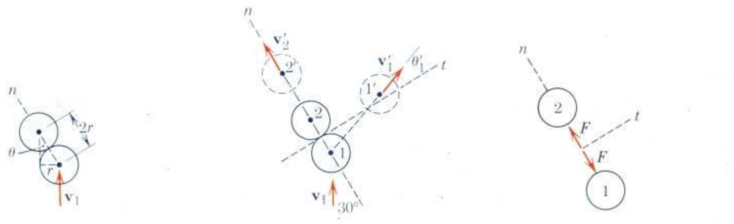
**Problem 3/ 26:** Küresel bir cisim $6m/s$ hızı ile hareket ederken aynı kütle ve yarıçaptaki hareketsiz bir başka küresel cisimle şekilde gösterildiği gibi çarpışıyor. Eğer restitution katsayısı $e = 0.6$ ise




Şekil 67:

- Çarpışmadan sonraki her bir cismin hızını ve yönünü bulun.
- Çarpışma esnasındaki enerji kaybını bulun.

**Çözüm 3/ 26:**




(a) (b) (c)

Şekil 68:

$$v_1 = 6\ m/s; \quad v_2 = 0\ /s; \quad e = 0.6$$

$$\sin\theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{1}{2} = 30^o$$

$$\begin{array}{ll} (v_1)_n = v_1 \cos 30 = 6\cos 30 = 5.196\ m/s & (v_2)_n = 0 \\ (v_1)_t = v_1 \sin 30 = 6 \sin 30 = 3\ m/s & (v_2)_t = 0 \end{array}$$

momentumun korunumundan: ($n$ doğrultusunda)

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v_1')_n + m_2(v_2')_n$$

$m_1 = m_2$ olduğundan

$$(v_1)_n + (v_2)_n = (v_1')_n + (v_2')_n \Rightarrow 5.196 + 0 = (v_1')_n + (v_2')_n \tag{10}$$

$$e = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \Rightarrow 0.6 = \frac{(v_2')_n - (v_1')_n}{5.156 - 0} \tag{11}$$

10 ve 11'den $(v_1')_n = 1.039\ m/s$ ve $(v_2')_n = 4.16\ m/s$ bulunur.
$t$ doğrultsunda her cismin momentumu korunumludur.

$$\begin{array}{l} m_1(v_1)_t = m_1(v_1')_t \\ m_2(v_2)_t = m_2(v_2')_t \end{array} \Rightarrow (v_1')_t = (v_1)_t = 3\ m/s \text{ ve } (v_2')_t = (v_2)_t = 0 \ \text{ bulunur.}$$

**NOT:** Son iki denklem ve onlardan elde edilen sonuçlar $t$ doğrultusunda sürtünme kuvvetinin ve başka dış kuvvetin olmadığı halde geçerlidir.

$$v_1' = \sqrt{(v_1')_n^2 + (v_1')_t^2} = \sqrt{(1.039)^2 + 3^2} = 3.17\ m/s$$

$$v_2' = \sqrt{(v_2')_n^2 + (v_2')_t^2} = \sqrt{(4.16)^2 + 0^2} = 4.16\ m/s$$

$$\tan\theta' = \frac{(v_1')_n}{(v_1')_t} \Rightarrow \theta' = \arctan\frac{(v_1')_n}{(v_1')_t} = \arctan\frac{1.039}{3} = 19.1^o$$

$m = m_1 = m_2$ alınarak çarpmadan hemen önce ve sonra kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m(6)^2 + \frac{1}{2}m(0)^2 = 36m$$

$$T' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m(3.17)^2 + \frac{1}{2}m(4.16)^2 = 13.68m$$

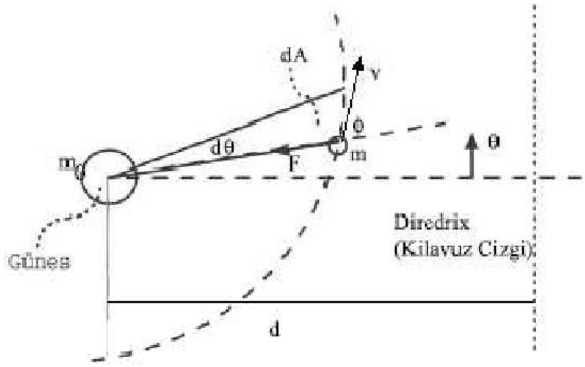
$$\text{Enerji kaybı oranı} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{T - T'}{T} = \frac{18m - 13.68m}{18m} = \%24$$

# 15 Merkezi Kuvvet Etkisinde Düzlemsel Haraket

**Tanım:** Maddesel, cisim doğrultusu sabit bir noktadan geçen bir kuvvetin etkisinde haraket ediyorsa; kuvvete MERKEZİ KUVVET ve harakete MERKEZİ KUVVET etkisinde haraket denir. Sabit nokta çekim merkezi adını alır.

Gök cisimlerinin haraketinde bu olayla karşılaşılır.

Etkiyen kuvvet $F = G\frac{m_0 m}{r^2}$ dir. $r - \theta$ kutupsal koordinatlar bu haraketin çözümü için uygundur.




Şekil 69:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{array}{l} \sum F_r = ma_r \\ \sum F_\theta = ma_\theta \end{array}$$

$$r: \qquad G\frac{m_0 m}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\theta: \qquad 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) = 0 \Rightarrow r^2\frac{d\theta}{dt} = h = \text{sabit}$$

$$(\mathbf{H_O} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \Rightarrow H_O = rmv\sin\phi,\ v\sin\phi = v_\theta;\ v_\theta = r\dot{\theta} \text{ idi.})$$

$$H_0 = rm(r\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta} = mh = \text{sabit}$$

Yukarıdaki denklem $m_0$'a göre $m$ cisminin açısal momentumu SABİTTİR. Yani korunumludur.

**NOT:** $m_0$' Güneş ise, $m$ dünya ise dünyanın güneş etrafındaki haraketi, $m_0$' dünya ise, $m$ ay ise ayın dünya etrafındaki haraketi ve $m_0$' dünya , $m$ dünya etrafındaki bir yörünegede bir peyk olabilir.

Şekilden

$$dA = (\frac{1}{2}r)(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \dot{A} = Alan\ Hızı = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

yazılır.

$$r^2\dot{\theta} = h = \text{sabit} \Rightarrow \dot{A} = \frac{h}{2} = sb. \text{ Keplerin ikinci kanunu}$$

ifadesi: Gökcisimleri eşit zamanlarda eşit alan tararlar.

## YÖRÜNGENİN ŞEKLİ

$$-G\frac{mm_0}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12}$$

$r = \frac{1}{u}$ dönüşümü yazılırsa: $r = r(\theta),\ u = u(\theta)$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}) = \frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\frac{dr}{d\theta})\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}\frac{dr}{d\theta})$$

$r^2\dot{\theta} = h \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ konulursa

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}) = \frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta})$$

Bu değerleri 12'da yerine yazarsak

$$-Gm_0u^2 = h^2u^2\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}) - \frac{1}{u}(h^2u^4) \Rightarrow -Gm_0 = h^2\frac{d}{d\theta}(u^2\frac{dr}{d\theta}) - h^2u$$

$$-Gm_0 = h^2\frac{d}{d\theta}(u^2\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}) - h^2u \Rightarrow -Gm_0 = h^2\frac{d}{d\theta}(u^2\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}) - h^2u$$

$$-Gm_0 = -h^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_0}{h^2}$$

yukarıdaki lineer, homojen olmayan sabit katsayılı 2. mertebeden diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülerek $u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = r(\theta)$ şeklinde yörünge elde edilir.

**NOT:** Haraket denkleminin radyal bileşeni

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2),\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

Şeklinde ele alırsak, yani sol tarafı herhangi bir **F** merkezikuvvet düşünürsek $\dot{\theta}$ yerine yazılarak

$F = m(\ddot{r} - r(\frac{h}{r^2})^2) = m(\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3})$ bulunur. $t$'den kurtulmak için $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{\theta}\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = hu^2\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta}$$

ve

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -h(hu^2)\frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$F$'de yazarsak

$$F = m(-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3)$$

$$F = m(-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2u^3)$$

$$F = -mh^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)$$

veya

$$F = -mh^2(\frac{1}{r})^2(\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r})$$

*BİRİNCİ BİNET (BİNE) FORMÜLÜ*
**NOT:** Birinci ve ikinci Bine formülü problem çözümüne uygundur.

## HIZ

$r = r(\theta)$ biliniyor ikenyörüngenin herhangi bir noktasında maddesel cismin (gök cisminin) hızı:

$$v = \frac{dr}{dt}e_r + r\frac{d\theta}{dt}e_\theta \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \text{ yazılır. } \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \text{ idi.}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\frac{h^2}{r^4} = \dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

elde edilir.

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}(hu^2)\frac{du}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \text{ bulunur.}$$

$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}$'yi $v^2$'de yerine yazarsak,

$$v^2 = (-h\frac{du}{d\theta})^2 + h^2u^2 = h^2[\frac{du}{d\theta}^2 + u^2]$$

$$v^2 = h^2[\frac{du}{d\theta}^2 + u^2] = h^2[\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}^2 + (\frac{1}{r})^2]$$ elde edilir. (İKİNCİ BİNET DENKLEMİ)

**Diferansiyel Denklemin Çözümü:** $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_0}{h^2}$'nin çözümü
*Homojen çözüm(Sağ tarafsız çözüm):*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$$

$$u = e^{k\theta}$$
$$\frac{du}{d\theta} = ke^{k\theta}$$
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = k^2e^{k\theta}$$

$$k^2e^{k\theta} + e^{k\theta} = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \mp i$$

$$u_h = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta$$

*İkinci taraflı çözüm:*

$$u^* = A = \text{sabit}$$
$$u^{*'} = 0$$
$$u^{*''} = 0$$

Denklemde $u^{*'}$ ve $u^{*''}$ yerine yazılırsa

$$0 + A = \frac{Gm_0}{h^2} \Rightarrow u^* = \frac{Gm_0}{h^2} \text{ olur.}$$

Genel çözüm:

$$u = u_h + u^* = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + \frac{Gm_0}{h^2}$$

elde edilir.

$$u = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + \frac{Gm_0}{h^2}$$

$$u = \frac{Gm_0}{h^2} + \sqrt{C_1^2 + C_2^2}(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos\theta + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin\theta)$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \cos\delta$$
$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = -\sin\delta$$

$$u = \frac{Gm_0}{h^2} + \sqrt{C_1^2 + C_2^2}(\sin\delta\cos\theta - \cos\delta\sin\theta)$$

$$u = \frac{Gm_0}{h^2} + \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos(\theta + \delta)$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = C$$

$\frac{1}{r} = u = C\cos(\theta + \delta) + \frac{Gm_0}{h^2}$ bulunur. $C$ ve $\delta$ integral sabitleridir.

$\theta = 0^o$ iken $r = r_{min}$ olacak şekilde $x$ ekseni seçilerek $\delta$ faz açısı elimine edilirse

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{Gm_0}{h^2} \tag{13}$$

yörünge elde edilir. Bu denklem ile belirli bir noktadan (odaktan) olan uzaklığının directrix (Kılavuz doğruya) e olan uzaklığına oranı sabit olan bir konik kesiminin denklemi benzer formdadır.

Şekilden bu oranı yazarsak $e = \frac{r}{d - r\cos\theta}$ yazılır. $e$ burada EKSTENTRİSİTE dir. Buradan $\frac{1}{r}$ çözülürse

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}\cos\theta + \frac{1}{ed} \tag{14}$$

elde edilir. 13 ve 14 denklemleri aynı formdadır. Yukarıdaki denklmede $d = \frac{1}{C}$ ve $e = \frac{h^2C}{Gm_0}$ dir.

1. $e < 1$ ise yörünge ELİPS
2. $e = 1$ ise yörünge PARABOL
3. $e > 1$ ise yörünge HİPERBOL

**ELİPS HALİ:** $e < 1$ iken 14 denkleminde $r$, $\theta = 0$ için minimum ve $\theta = \pi$ için maksimum olur.

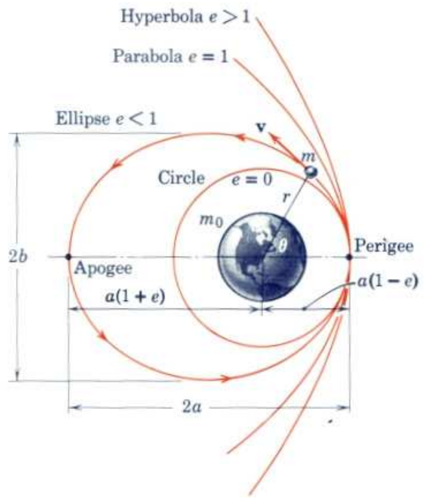
$$2a = r_{min} + r_{max} = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} = \frac{2ed}{1-e^2} \Rightarrow a = \frac{ed}{1-e^2} \text{ bulunur.}$$

14 denklemini $a$ cinsinden yazarsak

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1-e^2)}$$

elde edilir. Buradan

$$r_{min} = a(1-e),\ \theta = 0 \text{ için} \tag{15}$$




Şekil 70:

$$r_{max} = a(1+e), \ \theta = \pi \text{ için} \tag{16}$$

Elipsin küçük ekseni $b = a\sqrt{1-e^2}$ dir. (Geometriden)

**NOT:**$e = 0$ iken yörünge $r = a$ olan bir çemberdir.

**NOT:** 15 ve 16 denklemleri Keplerin birinci kanunu olarak bilinir. İfadesi: Gökcisimleri odağında Güneş olan eliptik yörünge çizerler.

## ELİPTİK YÖRÜNGE HALİNDE PERYOT

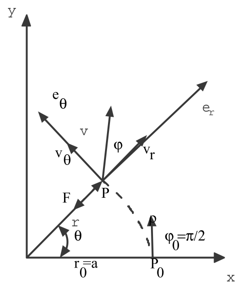
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dA = \frac{h}{2}dt \Rightarrow \int_0^A dA = \int \frac{h}{2}dt$$

$A = \frac{h}{2}t|_0^\tau = \frac{h\tau}{2}$ bulunur. Bir turun alanı=Elipsin alanı

$$\pi ab = \frac{h}{2}\tau \Rightarrow \tau = \frac{2piab}{h}$$

$e = \frac{h^2C}{Gm_0}$, $d = \frac{1}{C}$, $a = \frac{ed}{(1-e^2)}$ ve $b = a\sqrt{1-e^2}$ elips için ve $Gm_0 = gR^2$ konularak $\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{R\sqrt{g}}$ elde edilir. Burada $R$ çekim yapan cismin ortalama çapıdır. $g$ yerçekimi ivmesidir. Bu sonuç Keplerin üçüncü kanunudur.

***ifadesi:*** Haraketin peryodunun karesi yörüngenin (elipsin) yarı büyük ekseninin küpü ile orantılıdır. Yani $\tau^2 = \lambda a^3$, $\lambda = \frac{4\pi^2}{R^2g}$ dir.




Şekil 71:

**ÖRNEK PROBLEM:** $\mathbf{F} = -m\mu\frac{1}{r^7}\mathbf{e_r}$,$\mu > 0$ kuvveti bir $P$ maddesel cismine etkimektedir. $t = 0$ anında $r = a$, $\theta = 0$ ve ilk hız $\mathbf{v_0} = \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{mu}{3}}\mathbf{j}$ dir. Yörüngeyi bulunuz Yörüngenin orijinden geçtiğini gösteriniz. Cismin orjine gelmesi için geçen zamanı hesaplayınız.

**ÇÖZÜM:**

Haraket momenti $\mathbf{H_0}$ ise

$$\mathbf{H_0} = \mathbf{r_0} \times m\mathbf{v_0} = a\mathbf{i} \times m\frac{1}{a^3}\sqrt{mu/3}\mathbf{j} = sb$$

$$H_0 = \frac{m}{a^2\sqrt{\mu/3}}\mathbf{k} = mh\mathbf{k} \Rightarrow h = \frac{1}{a^2}\sqrt{\mu/3} \Rightarrow \mu = 3h^2a^4 \text{ bulunur.}$$

$$F = -\frac{m3h^2a^4}{r^7}\mathbf{e_r} = -3mh^2a^4u^7\mathbf{e_r} \text{ olur.}$$

$$F = -mh^2a^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u) \Rightarrow -3mh^2a^4u^7 = -mh^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)$$

$u'' + u = 3a^4u^5$ diferansiyel denklemi elde edilir.

**NOT:** Diferansiyel denklem bilgileri ile veya aşağıdaki gibi çözülür.

$$p = \frac{du}{d\theta} \Rightarrow \frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{du}\frac{du}{d\theta} = p\frac{dp}{du} = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

yerine yazılırsa

$$p\frac{dp}{du} + u = 3a^4u^5 \Rightarrow \frac{d}{du}(\frac{1}{2}p^2) + u = 3a^4u^5$$

$$\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}u^2 = \frac{3a^4u^6}{6} + \frac{A}{2} \Rightarrow p^2 + u^2 = a^4u^6 + A$$

$$u'^2 = a^4u^6 - u^2 + A \tag{17}$$

$$\tan\varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{r\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{u}}{\frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}} = \frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}}$$

$\tan\varphi = \frac{-u}{\frac{du}{d\theta}}$ elde edilir.

İlk anda $\tan\varphi_0 = \frac{-u_0}{(\frac{du}{d\theta})_0}$, $\tan\frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow (\frac{du}{d\theta})_0 = 0$ bulunur.

$$0 = \frac{a^4}{a^6} - \frac{1}{a^2} + A$$

$$A = 0 \Rightarrow u'^2 = a^4u^6 - u^2$$

$$\frac{du}{d\theta} = \pm u\sqrt{a^4u^4 - 1} \text{ bulunur.}$$

$t = 0$'da $\frac{du}{d\theta}|_0 = 0$ olduğundan cisim maksimum veya minimum noktasından geçer. Bunun için ikinci türeve bakmalıyız.

$$u'^2 = a^4u^6 - u^2 \Rightarrow 2u'u'' = 6a^4u^5u' - 2uu' \Rightarrow u'' = 3a^4u^5 - u$$

$$(\frac{d^2u}{d\theta^2})_0 = 3a^4(\frac{1}{a^5}) - \frac{1}{a} = \frac{2}{a} > 0$$

O halde $t = 0$'da $u = u(\theta)$'nın minimumu var. Bundan sonra $u$, $\theta$ ile artacaktır. O halde $\frac{du}{d\theta} = u' > 0$ alınır.

$$\frac{du}{d\theta} = +u\sqrt{a^4u^4 - 1} \Rightarrow \frac{du}{u\sqrt{a^4u^4 - 1}} = d\theta$$

Ayrıca $a^2u^2 = \frac{1}{\cos\beta}$ dönüşümü yapılırsa $a^4u^4 = \frac{1}{\cos^2\beta}$ olur. Buradan

$$a^4u^4 - 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \frac{1 - \cos^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{-1}{a^2}\frac{2udu}{u34d\theta} = -\sin\beta\frac{d\beta}{d\theta} \Rightarrow \frac{2du}{a^2u^3} = \sin\beta d\beta$$

$$\frac{2du}{u(a^2u^2)} = \sin\beta d\beta \Rightarrow \frac{2du}{u} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}d\theta$$

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}d\theta \text{ yazılır.}$$

Yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}d\beta = d\theta \Rightarrow 2\theta + \alpha = \beta \text{ bulunur.}$$

$$\theta = 0 \text{ da } r = a = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{r},\ \frac{1}{a^2u^2} = \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{a^2}(a^2)$$

$\cos\beta = 1 \Rightarrow \beta = 0^o$ yerine yazılırsa $0 = 2\cancelto{=0}{\theta_0} + \alpha \rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 2\theta$ elde edilir.

$$\frac{1}{a^2u^2} = \cos\beta = \cos 2\theta \Rightarrow \frac{1}{a^2}r^2 = \cos 2\theta$$

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \text{ yörünge}$$

Yörüngenin orijinden geçmesi için r=0 olmalı.

$$\cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ olur.}$$

Zaman:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\mu}{3}} \Rightarrow a^2\cos 2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\mu}{3}}$$

$$\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{a^4}\sqrt{\frac{\mu}{3}}dt \Rightarrow \frac{1}{a^4}\sqrt{\frac{\mu}{3}}t|_0^T = \frac{1}{2}\sin 2\theta|_0^{\pi/4}$$

$$\frac{1}{a^4}\sqrt{\frac{\mu}{3}}T = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{1}{2}a^4\sqrt{\frac{3}{\mu}} \text{ bulunur.}$$