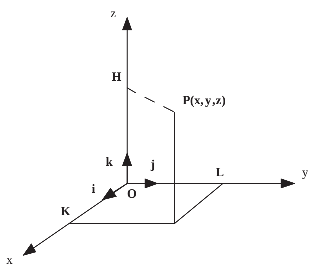
1 Giriş

Kinematik, dinamiğin kuvvetlere referans verilmeden çalışıldığı bir dalıdır. Kinematik hareketin geometrisi olarakta adlandırılır. Kinematik, kinetiğin bir ön gereksinimidir. Kinetik, hareket ve buna sebep olan kuvvetleri inceler.

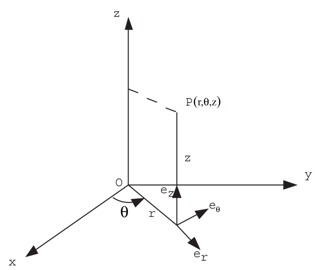
Bu bölümde parçacık (maddesel nokta) kinematiğini anlatacağız. Maddesel nokta fiziksel boyutları izlediği yörüngenin eğrilik çapının büyüklüğüne göre çok küçük olan (ihmal edilebilen) cisimdir.

Bir noktasal cismin herhangi bir t anındaki pozisyonu onun

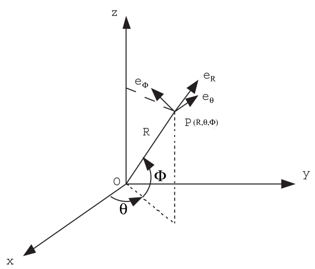
- Kartezyen koordinatlarını (x, y, z)
- Silindirik koordinatlarını (r, θ, z)
- Küresel koordinatlarını (R, Θ, Φ) belirtmekle anlatılabilir.
- Noktasal cismin hareketi aynı zamanda yörüngenin teğetsel ve normal parametrelerini (t, n) belirtmekle de anlatılabilir.



(a) Kartezyen koordinatlar

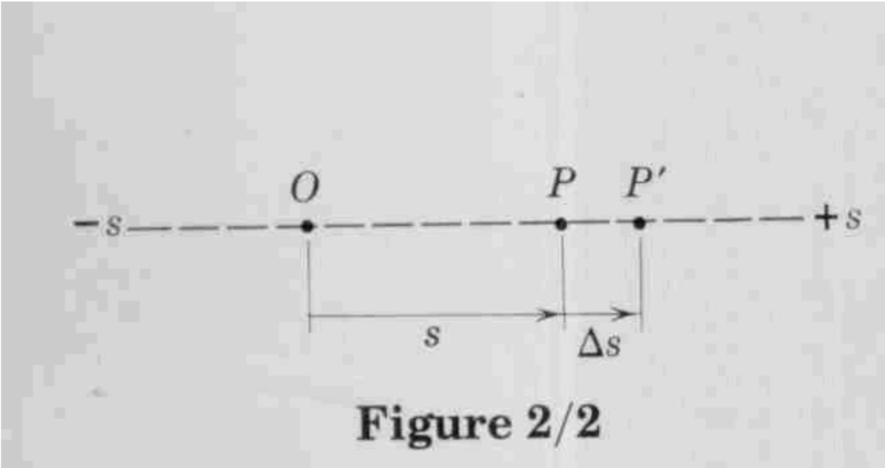


(b) Silindirik Koordinatlar



(c) Küresel Koordinatlar

Şekil 1: Koordinat Sistemleri



Şekil 2:

2 Doğrusal Hareket

Bir doğru üzerinde hareket eden şekildeki P noktasal cismini göz önüne alın, s koordinatı sabit O noktasından ölçülür ve parçacığın konumunu tanımlar.

Yerdeğiştirme eğer noktasal cisim negatif s yönünde hareket ettiyse negatiftir.

Δt zaman aralığında maddesel noktanın ortalama hızı onun yerdeğiştirmesinin zaman aralığına bölünmesi ile bulunur ($v_{ort} = \Delta s/\Delta t$). Δt giderek sıfıra yaklaştığında, cismin ortalama hızı cismin anlık hızına yaklaşır bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad s = s(t)$$

Bundan dolayı hız yerdeğiştime koordinatı s'nin zamana göre değişme oranıdır (türevidir).

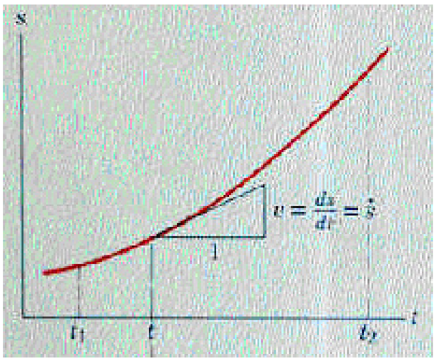
Δt zaman aralığında noktasal cismin ortalama ivmesi onun hızındaki değişmenin zaman aralığına bölünmesi ile bulunur ($a_{ort} = \Delta v/\Delta t$). Δt giderek sıfıra yaklaştığında, cismin ortalama ivmesi cismin anlık ivmesine yaklaşır bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \qquad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

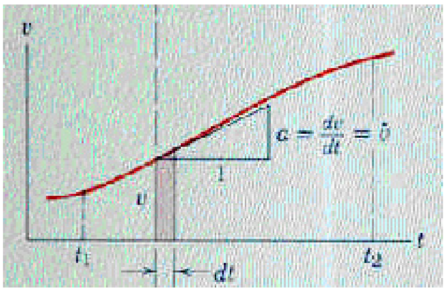
Yukarıdaki hız ve ivme ifadelerindeki dt zamanını yok ederek konum, hız ve ivme arasındaki diferansiyel bağıntıları buluruz, bunlar:

$$v\ dv = a\ ds \qquad \dot{s}\ d\dot{s} = \ddot{s}\ ds$$

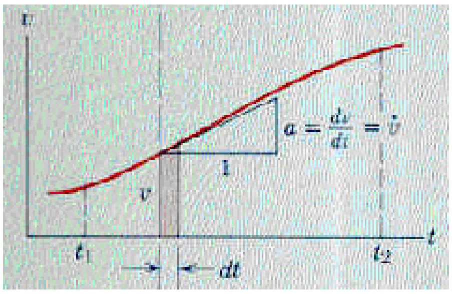
Hız ve ivme arasındaki bu bağıntılar aşağıdaki grafiklerde de görülebilir.



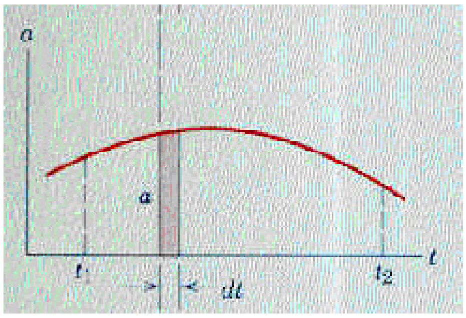
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 3:

2.1 Doğrusal Hareketin Veriliş Türleri

İvme a; hız v, konum s ve zaman t arasında bağıntı aşağıdaki şekillerde verilmiş olabilir:

1. Sabit ivme ($a = sabit$) verilir.
2. İvme zamanın fonksiyonu olarak $a = f(t)$ verilir.
3. İvme hızın fonksiyonu olarak $a = f(v)$ verilir.
4. İvme konumun fonksiyonu $a = f(s)$ verilir.

1) **Sabit İvme;**

İvme= $a = a_0 = sb$ ise $v\ dv = a\ ds$ veya $\dot{s}\ d\dot{s} = \ddot{s}\ ds$ doğrudan integre edilebilir. İntegral sabitleri için $t = 0$ ilk anında $s = s_0$ ve $v = v_0$ verilir.

$$v\ dv = a\ ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\ dv = a \int_{s_0}^{s} ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \Rightarrow dv = adt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_{t_0=0}^{t} dv = a \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

elde edilir.

Yolu bulmak için ise $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ kullanılır.

$$(v_0 + at)dt = ds$$

$$\int_{t=0}^{t} (v_0 + at)dt = \int_{s_0}^{s} ds \Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

elde edilir.

UYARI: Yukarıdaki işlemler sadece sabit ivme için geçerlidir.

2) **İvme Zamanın Fonksiyonu;**

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a(t) = f(t) \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} f(t)dt$$

Buradan $v = v_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)dt$ elde edilir. Eğer $\int_{t_0}^{t} f(t)dt$ olarak tanımlanırsa

$$v = v_0 + H(t)$$

bulunur.

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + H(t) \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t=0}^{t} (v_0 + H(t))dt$$

$$s = s_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} (v_0 + H(t))dt}_{G(t)} \Rightarrow s = s_0 + G(t)$$

NOT: Belirsiz integral kullanılması halinde her integral için bir ***İNTEGRAL SABİTİ*** konulur ve verilen ilk şartlardan integral sabiti belirlenir.

3) **İvme Hızın Fonksiyonu;**

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt$$

$$t = \int_{t_0}^{t} dt = \underbrace{\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}}_{\Phi(v)}$$

$t = \Phi(v)$ elde edilir. Buradan $v = F(t)$ çözülür.

Yol:

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad v\ dv = a\ ds$$

$$v\ dv = f(v)\ ds \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \underbrace{\int \frac{v\ dv}{f(v)}}_{\varphi(v)} \Rightarrow s = s_0 + \varphi(v)$$

bulunur.

4) **İvme Yer Değiştirmenin Fonksiyonu;**

$$a = f(s)$$

$$v\ dv = a\ ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v dv = \int_{s_0}^{s} f(s) ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s) ds$$

elde edilir.
Bu sonuçtan $v = g(s)$ şeklinde çözeriz.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow g(s) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{g(s)} = h(s)$$

elde edilir.
Buradan $s = s(t)$ çözülür.

Problem 2/1**:**Düzgün bir doğru boyunca hareket eden bir noktasal cismin konumu $s = 2t^3 - 24t + 6$ formülü ile veriyor (s metre ve t saniye cinsinden)

a) Noktasal cismin $t = 0$ anından $72m/s$ hızına erişmesi için gerekli zamanı bulunuz.

b) Noktasal cismin $v = 30m/s$ hızına eriştiğindeki ivmesini bulunuz.

c) $t = 1s$ den $t = 4s$ ye kadar noktasal cismin net yerdeğiştirmesini bulunuz.

Çözüm 2/1**:**

$$s = s(t) = 2t^3 - 24t + 6$$

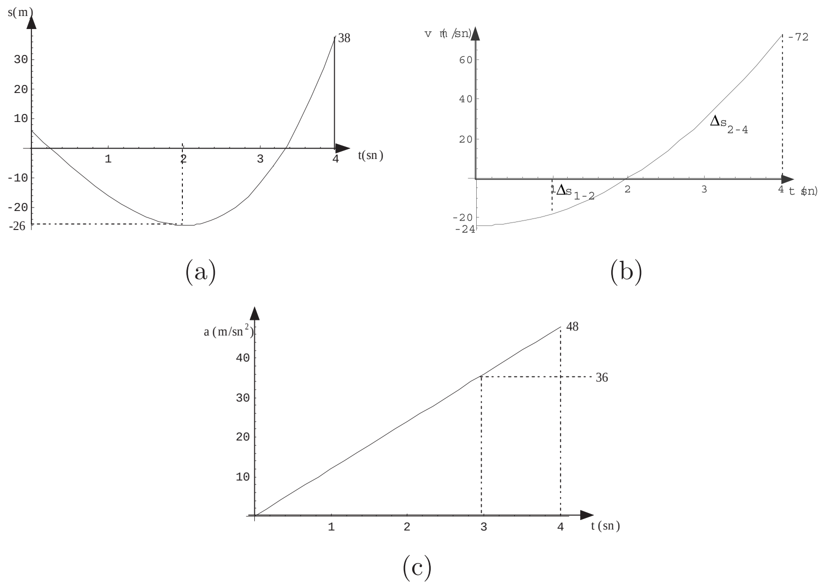
$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 24 \qquad a = \frac{dv}{dt} = 12t$$

a)

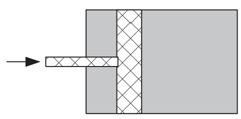
$$72 = 6t^2 - 24 \Longrightarrow t = \pm 4s \Longrightarrow t = 4s$$

b) $v = 30m/s$, $30 = 6t^2 - 24 \Longrightarrow t = 3s$
$a = 12 \cdot 3 = 36m/s^2$
c)

$$\Delta s = s(4) - s(1) = [2(4^3) - 24(4) + 6] - [2(1^3) - 24(1) + 6]$$



Şekil 4:



Şekil 5:

$$\Delta s = 54m$$

Problem:Şekildeki piston akışkan içerisinde $a = -kv$ ivmesi ile haraket edebilmektedir. Haraketi $v = v(s)$ şeklinde elde ediniz. $t = 0$ anında $s = s_0$, $v = v_0$ dir.

Çözüm:

$$\frac{dv}{dt} = a = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^t k\ dt \Rightarrow \ln(v) - \ln(v_0) = -kt$$

$$v = v_0 e^{-kt}$$

bulunur.

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0\ e^{-kt} \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v_0\ e^{-kt} dt$$

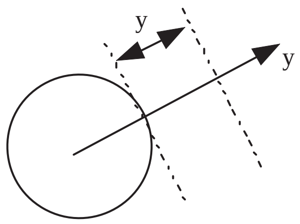
$$s - s_0 = -\frac{v_0}{k}\ e^{-kt} + \frac{v_0}{k} \Rightarrow s = s_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

elde edilir.

v ile s arasında t elimine edilirse $v = v_0 - k(s - s_0)$ elde edilir.

NOT: $t \to \infty$ iken $s = s_0 + \frac{v_0}{k} = sabit$ olur.

Problem: Bir cisim yeryüzünden atmosfere doğru fırlatılıyor. Hava direnci ihmal ediliyor. $g_0 = 9.81 m/sn^2$, $R = 6356 km$ olduğuna göre cismin yeryüzüne düşmemesi için minimum fırlatma hızını bulunuz.



Şekil 6:

Çözüm:

$$v\ dv = a\ ds \Rightarrow a = v\frac{dv}{ds}$$

$$a = v\frac{dv}{dy} = -g_0\frac{R^2}{(R+y)^2}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\ dv = -g_0\ R^2 \int_0^y \frac{dy}{(R+y)^2}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = 2g_0R^2\left[\frac{1}{R+y} - \frac{1}{R}\right]$$

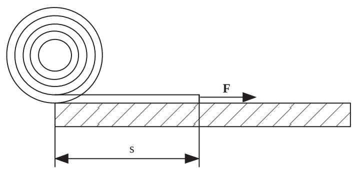
$$v^2 = v_0^2 + 2g_0R^2\left[\frac{1}{R+y} - \frac{1}{R}\right]$$

Yeryüzüne düşmemesi için $y \to \infty$ iken $v = 0$ olmalı.

$$0 = v_0^2 + 2g_0R^2\left[0 - \frac{1}{R}\right] = v_0^2 - 2g_0R$$

$$v_0 = \sqrt{2g_0R}$$

Problem: Birim uzunluk başına kütlesi m' olan bir kumaş sürtünme katsayısı μ olan yüzey üzerinde sabit $\mathbf{F}$ kuvveti ile çekiliyor. a) Kaç metre kumaş çekilebilir. b) Bu çekme kaç saniye sürer? (Kumaşın genişliğini birim sayınız.) $s_0 = 1m$



Şekil 7:

Çözüm:
Sürtünme kuvveti $F_s = \mu N = \mu m' \ g \ s$'dir.

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow F = \mu \ m' \ g \ s = m' \ s \ a$$

$$a = \frac{F}{m's} - \mu \ g$$

$$v \ dv = a \ ds = (\frac{F}{m's} - \mu \ g)ds$$

$$\int_0^v v \ dv = \int_{s_0}^s (\frac{F}{m's} - \mu \ g)ds$$

$$\frac{v^2}{2} - 0 = (\frac{F}{m'}\ln s - \mu \ g \ s)_1^s = \frac{F}{m'}\ln s - \mu \ g \ s + \mu \ g$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{F}{m'}\ln s + \mu \ g(1 - s)$$

Haraket durduğunda $v = 0$ olur.

$$\frac{F}{m'} \ln s + \mu\ g(1-s) = 0 \Rightarrow \frac{\ln s}{s-1} = \frac{\mu\ g\ m'}{F}$$

Problem: Yatay bir doğru üzerinde $a = k\ t - k^2x$ ivmesi ile haraket eden cismin(maddesel nokta) haraketini $s = s(t)$ şeklinde elde ediniz. K ve k sabit, $t = 0$ anında $x_0 = \dot{x_0} = 0$.

Çözüm:

$$a = \frac{dv}{dt} = K\ t - k^2x$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = K - k^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + k^2v = K$$

Yukarıdaki adi diferansiyel denklemin karakteristik denklemi $\alpha^2 + k^2 = 0$ olarak hesaplanır. Buradan karakteristik denklemin kökleri $\alpha = \mp ki$ olarak bulunur.

Diferansiyel denklemin homojen ve özel çözümü

$$v_h = A\cos kt + B\sin kt,\ v_{oz} = \frac{K}{k^2}$$

olarak bulunur.

Genel çözüm

$$v_g = v_h + v_{oz} = A\cos kt + B\sin kt + \frac{K}{k^2}$$

$t = 0$'da $\dot{x_0} = 0$ olduğundan, $A = -\frac{K}{k^2}$ olarak bulunur.

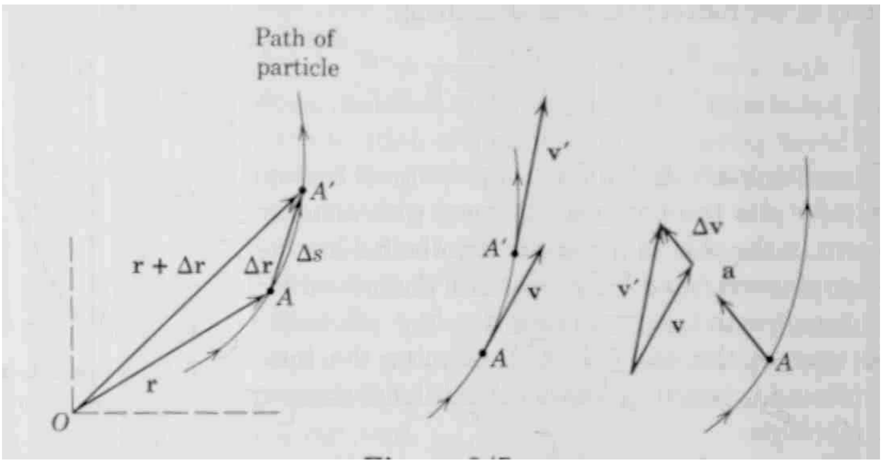
$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{K}{k^2}(1 - \cos kt) + B\sin kt$$

$$x = \frac{K}{k^2}(t - \frac{1}{k}\sin kt) - \frac{B}{k}\cos kt$$

$t = 0$'da $x = 0$ olduğundan, $B = 0$ bulunur.

Buna göre sonuç aşağıdaki gibi bulunur.

$$x = \frac{K}{k^3}(kt - \sin kt)$$



Şekil 8:

3 Düzlemsel Hareket

Maddesel cismin yörünge eğrisi daima bir düzlem içerisinde ise haraket düzlemsel harakettir.

Koordinat sistemlerini kullanmadan önce haraketi vektörel olarak ele alacağız.

$$f = f(t) \Longrightarrow \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

bağıntısı herhangi bir $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vektörel bağıntısınada uygulanır.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}$$

olarak tanımlanır.

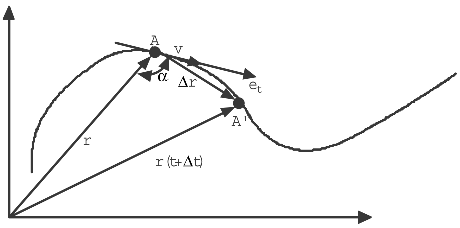
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ giderken Δs ile $\Delta\mathbf{r}$'nin doğrultuları çakışır, büyüklükleri eşit olur. Ortak doğrultu A noktasındaki teğet doğrultudadır. Böylece $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_t$ elde edilir. $|v| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ dir.

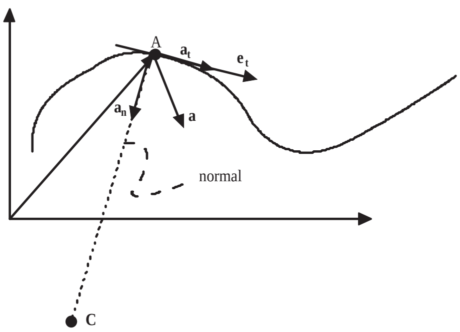
* Hız vektörü yörüngeye teğettir.

Uyarı: Yer vektörü ile hız vektörü arasındaki α açısı herhangi bir açıdır. Bazıları bu açıyı 90^o sanırlar. Yanlıştır. SADECE DAIRESEL HARAKETTE 90^o dir.

İVME: Hız vektörünün zamana göre yazılan türevi ivme olup **a** ile gösterirlir.



Şekil 9:



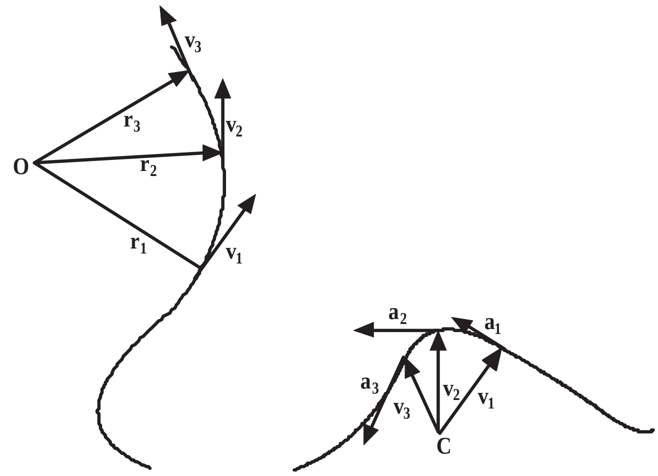
Şekil 10:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

NOT: İvmede $\mathbf{v}$ hızının büyüklüğünün ve $\mathbf{v}$'nin doğrultusunun önemi vardır. (Hızda yer vektörünün olduğu gibi)

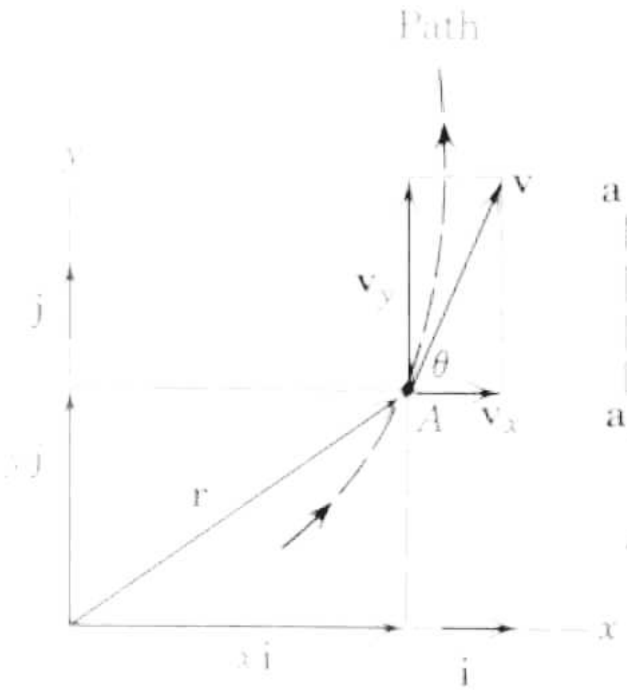
NOT: Eğrisel düzlemsel harakette maddesel cismin ivmesi ne yörüngeye teğet ne de diktir.

İvmeyi, hız vektörünün bir noktadan gözlenerek çizilen geometrik yerine teğet olarak tanımlayabiliriz. Böylece hızı yer vektörlerinin geometrik yeri olan yörüngeye teğettir. İvme ise hız vektörlerinin geometrik yeri olan eğriye teğettir. Bu eğrilere sırası ile yer vektörünün ve hız vektörünün ***HODOGRAFI*** denir.

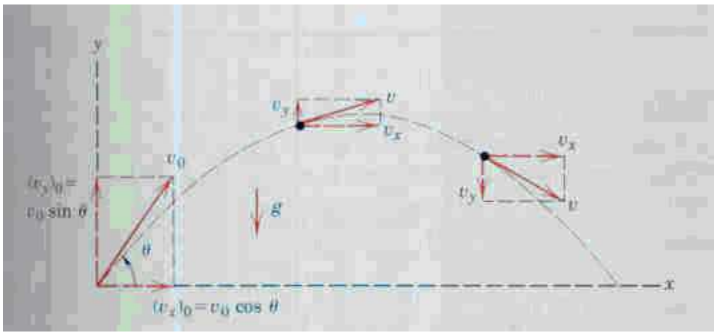


(a) Hız vektörünün hodografı (b) İvme vektörünün hodografı

Şekil 11:



Şekil 12:



Şekil 13:

4 Dik Koordinatlar (x, y)

$\mathbf{r}$: yer vektörü	$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$: hız vektörü	$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$: ivme vektörü	$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$

$\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ skaler hız $\quad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

NOT: Eğer θ açısı x ekseninden $\mathbf{v}$ hızına doğru saatin tersi yönünde ölçülürse $tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$ yazılır. Yani yörüngenin eğimine eşittir.

NOT: 2. kısımda gördüğümüz doğrusal haraketin x veya y için yazılan ifadelerinin süperpozisyonu $(x - y)$ ekseni için ortaya çıkar

Mermi Hareketi

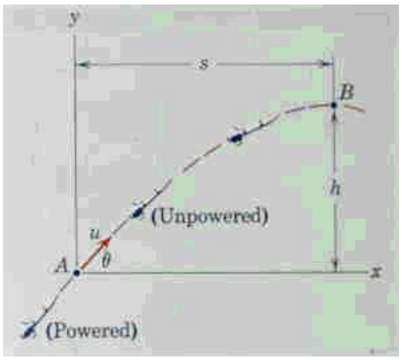
İki boyutlu kinematik haraketin önemli bir uygulama alanı mermilerin haraketidir. Havanın direncini, dünyanın eğrilik yarıçapını ve dünyanın dönmesini ihmal ederek ve merminin yükselmesinin $g = 9.81 = (sabit)$ alınmasına etkisiz olacak kadar küçük olduğunu varsayarak, kartezyen koordinatları kullanarak olayı inceleyebiliriz.

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j} \Rightarrow a_x = 0,\ a_y = -g$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = (v_x)_0 = sabit$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (v_x)_0 \Rightarrow x = (v_x)_0 t + x_0$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y = -gt + (v_y)_0$$



Şekil 14:

$$\frac{dy}{dt} = v_y \Rightarrow y = \int (-gt + (v_y)_0 dt = -g\frac{t^2}{2} + (v_y)_0 t + y_0$$

v_y ile y arasından t elimine edilirse $v_y^2 = (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)$ elde edilir.

Problem 2/6**:** Şekildeki roket A konumuna vardığı zaman yakıtını bitirmiştir. Yakıtsız haraketine devam ederek A'dan h (maksimum) yüksekliğinde olan B konumuna erişmiştir. A'dan itibaren yatay uzaklık S'dir. A'dan B'ye gelinceye kadar geçen zamanı ve yörüngeyi belirleyiniz. ($g = sabit$, hava direnci yok)

Çözüm 2/6**:**

$$a_x = 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = (v_x)_0 = u\cos\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = u\cos\theta \Rightarrow x = u\ t\cos\theta + K_1$$

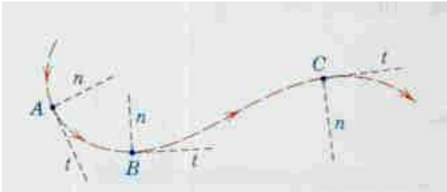
$t = 0$'da $x = x_0 = 0$'dır. Buradan $K_1 = 0$ bulunur.

$$a_y = -g = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = -gt + K_2$$

$t = 0$'da $u_y = u\sin\theta$'dır. Buradan $K_2 = u\sin\theta$ bulunur. Buradan $v_y = -gt + u\sin\theta$ yazılır.

$$y = -g\frac{t^2}{2} + ut\sin\theta + K_3$$

$t = 0$'da $y = 0$'dır. $K_3 = 0$ bulunur.



Şekil 15:

$$y = -g\frac{t^2}{2} + ut\sin\theta$$

B noktasında $v_y = 0$'dır. Buradan $0 = -gt + u\sin\theta$ yazılır ve t çekilirse $t = \frac{u}{g}\sin\theta$ olarak bulunur.

t'yi y'de yaparsak ($y = h$ olarak)

$$h = -\frac{1}{2}g(\frac{u\sin\theta}{g})^2 + u\frac{u\sin\theta}{g}\sin\theta = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

B'de $s = x = u\frac{u\sin\theta}{g}\cos\theta$ cevap.

NOT: $\theta = 45^o$ için $s = s_{maks} = \frac{u^2}{2g}$

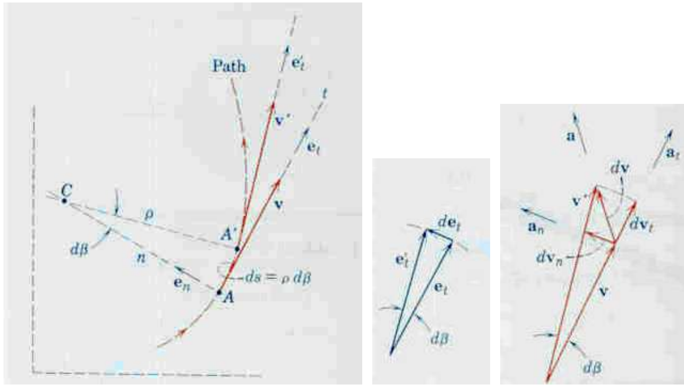
x ile y arasında t'yi yok ederek yörünge denklemi $y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta$ elde edilir. Bu ifade yörüngenin KARTEZYEN denklemidir. $x = ut\cos\theta$ ve $y = -\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\theta$ bağıntılarıda yörünge denklmidirler. Ancak bu son iki denklem yörüngenin $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ şeklindeki parametrik denklemleridir. Bunların arasından t parametresi elimine edilerek $y = y(x)$ kartezyen denklemi bulunur.

5 Eğrisel Koordinatlarda Düzlemsel Haraket(n-t)

Bir cismin düzlemsel bir eğri üzerindeki hareketini tarif ederken yörünge değiskenleri ile tarif edilmesi oldukça yaygındır. Bu değişkenler noktasal cismin yörüngesine teğet ve normal olarak yapılır.

Yukardaki şekilde pozitif n yönünün eğrilik yarıçapının (curvature) merkezi merkezi yer değiştirince değiştiğine dikkat edin.

Burada n ve t koordinatları noktasal cismin hızını ve ivmesini tanımlamada kullanılacaktır. $\mathbf{e_n}$ ve $\mathbf{e_t}$, n ve t doğrultusundaki birim vektörlerimiz olsun.



(a) (b) (c)

Şekil 16:

$$\widehat{AA'} = ds = \rho d\beta, v = ds/dt = \rho(d\beta/dt)$$

$\mathbf{v} = v\mathbf{e_t} = \rho(d\beta/dt)\mathbf{e_t} = \rho\dot{\beta}\mathbf{e_t}$, $\dot{\beta}$ =AÇISAL HIZ.
Noktasal cismin ivmesi $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} = dv/dt$ olarak tanımlanmıştı.
$\mathbf{a} = (d\mathbf{v}/dt) = d(v\mathbf{e_t})/dt = v(d\mathbf{e_t}/dt) + (dv/dt)\mathbf{e_t}$
Burada birim vektörlerin ($\mathbf{e_t}$ ve $\mathbf{e_n}$) yönleri değiştiği için zamana göre türevi sıfır değildir. $d\mathbf{e_t}$ vektörünün

- Büyüklüğü $|d\mathbf{e_t}| = |\mathbf{e_t}|d\beta = d\beta$
- Yönü $\mathbf{e_n}$ birim vektörünün yönündedir. $d\mathbf{e_t} = d\beta\mathbf{e_n}$ eşitliğinin her iki tarafınıda dt ile bölersek $(d\mathbf{e_t}/dt) = (d\beta/dt)\mathbf{e_n}$ elde ederiz.

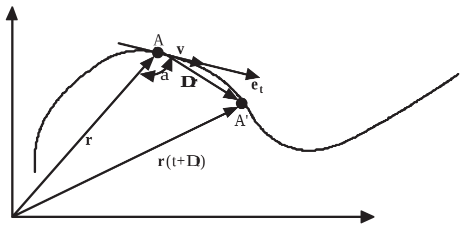
Bunu daha evvel elde ettiğimiz ivme eşitliğinde yerine koyarsak

$$\mathbf{a} = v\frac{d\beta}{dt}\mathbf{e_n} + \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} = \dot{v}\mathbf{e_t} + v\dot{\beta}\mathbf{e_n}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_n = v\dot{\beta}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + v\dot{\beta}\mathbf{e_n}$$

$\mathbf{v} = v\mathbf{e_t} = \rho\dot{\beta}\mathbf{e_n}$'di.



Şekil 17:

$$v = \rho\dot{\beta} \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{v}{\rho}$$

Yerine yazılırsa

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + v\frac{v}{\rho}\mathbf{e_n} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e_n}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

ρ: Eğrilik yarıçapı
$\frac{1}{\rho}$: Eğrilik$= K$
Skaler ivme $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\frac{dv}{dt})^2 + (\frac{v^2}{\rho})^2}$

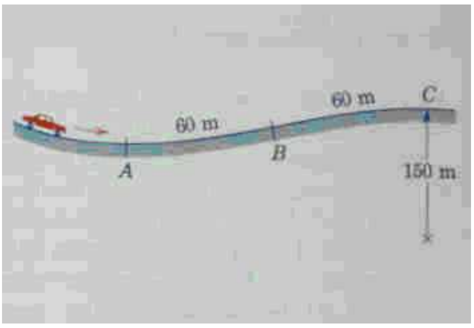
NOT:$a_t = \dot{v} = \frac{(d(\rho\dot{\beta})}{dt} = \rho\ddot{\beta} + \dot{\rho}\dot{\beta}$ ifadesi $\dot{\rho}$ 'nün hesabında kullanılır. a_n daima C eğrilik merkezine yönlenir. a_t daima yörüngeye teğettir. **a** ivme vektörü daima yörüngenin konkavlık tarafına yönlenir.

Dairesel haraket : Düzlemde eğrisel haraketin özel bir durumudur(Bir alt kümesidir). Dairesel harekette ρ (eğrilik yarıçapı) yerine sabit daire yarıçapını koyarız ve β açısı yerine θ açısı kullanılır.

$$v = r\frac{d\beta}{dt} = r\dot{\theta}$$

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e_t} = v\mathbf{e_t}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_t} + v\frac{d\beta}{dt}\mathbf{e_n} = \frac{dr\dot{\theta}}{dt}\mathbf{e_t} + r\dot{\theta}\dot{\theta}\mathbf{e_n} = r\ddot{\theta}\mathbf{e_t} + r\dot{\theta}^2\mathbf{e_n}$$



Şekil 18:

$$v = r\dot{\theta}$$
$$a_n = v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta}$$
$$a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta}$$

Problem 2/7: Yoldaki aşağıya ve yukarı doğru olan kavisi hissetmek için şöför sabit bir yavaşlama ivmesi oluşturacak şekilde frene basıyor. Aracın hızı aşağıya doğru kavisin en alt olduğu A noktasında $100km/saat$ ve en üst olduğu C noktasında $50km/saat$ dır. Eğer yolcu A noktasında $3m/sn^2$'lik bir ivme hissediyorsa ve C'deki eğrilik yarıçapı $150m$ ise;

- A'daki eğrilik yarıçapını,
- Büküm noktası B'deki ivmeyi,
- C'deki toplam ivmeyi hesaplayınız.

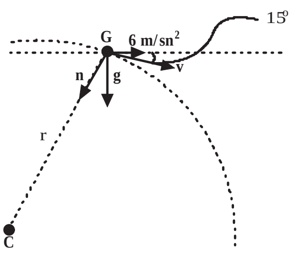
Çözüm 2/7: Arabayı maddesel nokta olarak görebiliriz.
$v_A = 100km/saat = 27m/sn$ ve $v_C = 50km/saat = 13.89m/sn$

$$vdv = ads = a_t ds \Rightarrow \int_{v_A}^{v_C} v\ dv = a_t \int_0^S\ ds$$

$$a_t = \frac{1}{2s}(v_C^2 - v_A^2) = \frac{(13.89)^2 - (27.8)^2}{2(100)} = -2.41m/sn^2$$

a) A'daki hal:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n^2 = 3^2 - (2.41)^2 = 3.19m^2/sn^4 \Rightarrow a_n = 1.785m/sn^2$$



Şekil 19: problemin şekili

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(27.8)^2}{1.785} = 432m$$

b) B'de: Büküm (dönüm) noktası olduğundan $\rho \to \infty$ alınır.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_n = 0$$

$$a_t = a = -2.4m/sn^2$$

c) C noktasında:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{13.89^2}{150} = 1.286n/sn^2$$

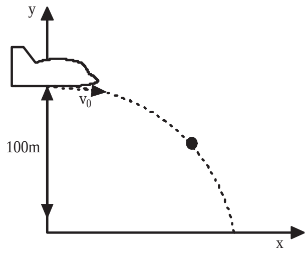
$$\mathbf{a} = (1.286\mathbf{e_n} - 2.41\mathbf{e_t})m/sn^2$$

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(1.286^2 + 2.41^2)} = 2.73m/sn^2$$

Problem 2/8: Şekildeki roket belirli yükseklikte yatay yol almaktadır. Haraketin ivmesinin yatay bileşeni $6m/sn^2$ düşey bileşeni yer çekimi ivmesinin bulunulan yükseklikteki değeri olan $g = 9m/sn^2$ dir. Roketin G kütle merkezinin hızı $20000km/saat$ olup, yatayla 15^o açı yapmaktadır.

a) ρ eğrilik yarıçapını,
b) Hızın(skaler) artımını (rate of speed),
c) GC'den itibaren $\dot{\beta}$ açısal hızı,
d) ivme vektörünü bulunuz.

Çözüm 2/8:



Şekil 20:

$$a_n = 9\cos 15^o - 6\sin 15^o = 7.14 m/sn^2$$

$$a_t = 9\sin 15^o - 6\cos 15^o = 8.12 m/sn^2$$

a)

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{20 \cdot 10^3/(3.6)^2}{7.14} = 4.32\ 10^6 m$$

b)

$$\dot{v} = a_t = 8.12 m/sn^2$$

c)

$$v = \rho\dot{\beta} \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{v}{\rho} = \frac{20\ 10^3/(3.6)^2}{4.32\ 10^6}$$

$$\dot{\beta} = 12.85\ 10^{-4} rad/sn$$

d)

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{e_t} + a_n\mathbf{e_n} = (8.12\mathbf{e_t} + 7.14\mathbf{e_n}) m/sn^2$$

Problem: Şekildeki uçaktan $\mathbf{v_0} = 200 m/sn\mathbf{i}$ hızı ile fırlatılan paketin ivmesi $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$ dir. Hava direnci yok.

a) Paketin yere çarpıncaya kadar aldığı yolu,

b) $\mathbf{v_0} = (200\mathbf{i} + 10\mathbf{j}) m/sn$ olduğu zaman yolu bulunuz.

Çözüm:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$a_x = 0$, $a_y = -g$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -gt + K_1 \Rightarrow y = \frac{-gt^2}{2} + K_1 t + K_2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = C_1 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$$

a)
$t = 0$'da $y_0 = 100 \Rightarrow K_2 = 100$
$t = 0$'da $(u_y)_0 = 0 \Rightarrow K_1 = 0$

$$y = \frac{-gt^2}{2} + 100$$

Çarpmada $y = 0$ olur. Buradan yere düşme zamanı $0 = \frac{-gt^2}{2} + 100$ eşitliğinide t çekilerek bulunur. Burdan $t_{12} = 4.55sn$ olarak hesaplanır.

$t = 0$'da $(v_x)_0 = 200 \Rightarrow C_1 = 200$ ve $t = 0$'da $x = 0 \Rightarrow 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ bulunur. Buradan $x = 200t$ elde edilir.

Alınan yol:

$$x = 200\ 4.5 = 900m$$

b)
$\mathbf{v} = (200\mathbf{i} + 10\mathbf{j})m/sn$ için

$$x = x_0 + (v_x)_0 t = 200t$$

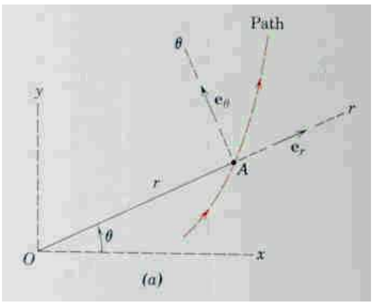
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_y)_0 t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t + 100$$

Çarpma anında $y = 0$ olur. Buradan yere düşme zamanı $0 = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t + 100$ eşitliğinde kökler hesaplanarak bulunur. Buradan $t_1 = 5.65sn$ olarak hesaplanır.

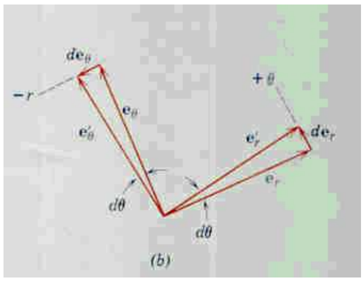
Alınan yol $x = 200t = 200\ 5.6 = 1130m$

6 Polar Koordinat Sistemi $(r - \theta)$

Şimdi, düzlemsel eğrisel hareketin 3'üncü bir koordinat sistemi ile tanımlanmasını göreceğiz. Polar koordinat sisteminde, noktasal bir cismin konumu sabit orijinden r radyal mesafesi ve x ekseni ile yaptığı θ açısı ile ölçülür. Bu koordinat sistemi özellikle, noktasal cismin bir noktaya olan mesafesi ve açısı kontrol



(a)



(b)

Şekil 21:

ediliyorsa veya noktasal cismin hareketi sabit bir noktadan gözlemleniyorsa yararlıdır.

Birim vektörlerimiz şekilde gösterildiği gibi $\mathbf{e_r}$ ve $\mathbf{e}_\theta$ olsun, konum vektörü $\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}$, hız vektörü $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)$ ve ivme vektörü $\mathbf{a} = (d\mathbf{v}/dt)$ için ifadeleri birim vektörlerin türevlerini kullanarak elde edelim.

$$(d\mathbf{e_r}/dt) = (d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta$$

$$(d\mathbf{e}_\theta/dt) = (-d\theta/dt)\mathbf{e_r}$$

Şimdi $\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}$ bağıntısının zaman göre türevini almaya hazırız. $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt) = r(d\mathbf{e_r}/dt) + (dr/dt)\mathbf{e_r}$, $(d\mathbf{e_r}/dt)$ ifadesini yerine koyarsak

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

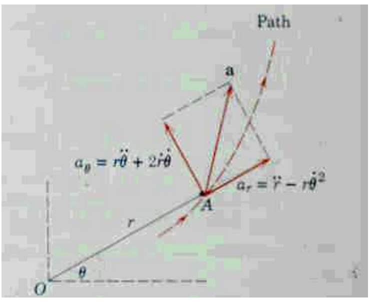
Yukarıdaki hız ifadesindeki hız vektörünün r bileşeni konum vektörünün uzamasından dolayı, θ bileşeni de konum vektörünün yön değiştirmesinden dolayıdır. Aynı işlemleri $\mathbf{a} = (d\mathbf{v}/dt)$ ivmesi için tekrar edelim,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{e_r} + \dot{r}\mathbf{e_r}) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta)$$

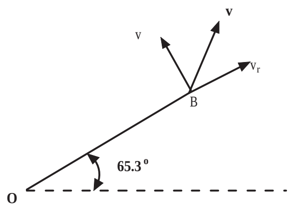
Birim vektörlelerin türevleri için bulduğumuz ifadeleri yerine koyarsak,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$



Şekil 22:



Şekil 23:

elde ederiz

Problem 2/9 : Radyal şekilde yataklanmış bir kolun hareketi $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ denklemi(θ radyan, t saniye) veriliyor. Aynı zamanda bir vida yardımıyla B kayıcı mesnetine $r = 0.2 + 0.04t^2$ (r metre, t saniye) hareketi veriliyor. Kayıcı mesnetin $t = 3sn.$ anındaki hızını ve ivmesini hesaplayınız

Çözüm 2/9 :

$$r = 0.2 + 0.4t^2$$

$$\dot{r} = 0.08t$$
$$\ddot{r} = 0.08$$

$$r_3 = 0.2 + 0.04(3) = 0.56m$$
$$\dot{r}_3 = 0.08(3) = 0.24m/sn$$
$$\ddot{r}_3 = 0.08m/sn^2$$

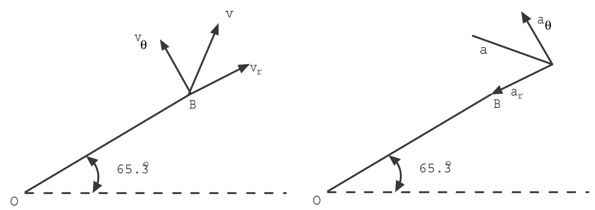
$$\theta = 0.2t + 0.02t^3$$
$$\dot{\theta} = 0.2 + 0.06t^2$$
$$\ddot{\theta} = 0.12t$$

$$\theta_3 = 1.14 rad$$
$$\dot{\theta}_3 = 0.74 rad/sn$$
$$\ddot{\theta}_3 = 0.36 rad/sn^2$$

$$v_r = \dot{r} = 0.24 m/sn$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} = 0.56(0.74) = 0.414 m/sn.$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(0.24)^2 + (0.414)^2} = 0.479 m/sn$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.08 - 0.56(0.74)^2 = -0.227 m/sn^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.56(0.36) + 2(0.24)(0.74) = 0.557 m/sn^2$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(-0.227)^2 + (0.557)^2} = 0.601 m/sn^2$$

$$\theta_3 = 1.14 rad \Rightarrow \begin{array}{ll} 3.14 rad & 180^o \\ 1.14 rad & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{1.14(180)}{3.14} = 65.3^o$$



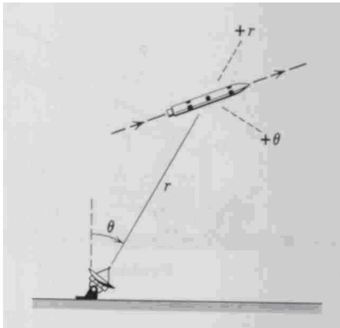
(a) (b)

$$\mathbf{v} = 0.24\mathbf{e_r} + 0.414\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -0.227\mathbf{e_r} + 0.557\mathbf{e}_\theta$$

Problem 2/10: Atmosferde yakıtsız olarak yoluna devam eden bir roketin hareket düzleminde bulunan bir radar şu verileri elde ediyor, $\theta = 30^o$, $r = 8\ 10^4 m$, $dr/dt = 1200\ m/sn$ ve $d\theta/dt = 0.80 derece/sn$. Roketin ivmesi sadece yerçekimi ivmesinden dolayı ve bulunduğu yükseklikte $g = 9.2\ m/sn.^2$ ise bu durumda:

- Roketin v hızını,
- d^2r/dt^2 ve $d^2\theta/dt^2$ değerlerini bulunuz.



Şekil 24:

Çözüm 2/10:

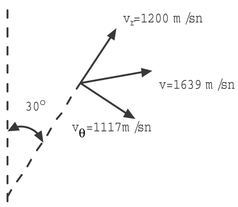
$$v_r = \dot{r} \qquad\qquad v_r = 1200 m/sn$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \quad v_\theta = 8\ 10^4(0.8)(\tfrac{\pi}{180}) = 1117 m/sn$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(1200)^2 + (1117)^2} = 1639 m/sn$$

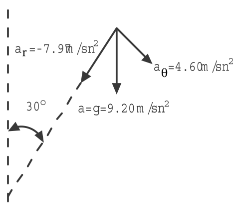
$$a_r = g_r = -9.2 \cos 30^o = -7.97 m/sn^2$$
$$a_\theta = 9.2 \sin 30^o = 4.6 m/sn^2$$

$$a_r = r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow -7.97 = \ddot{r} - 8(10^4)(0.8\frac{\pi}{180})^2 \Rightarrow \ddot{r} = 7.63 m/sn^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow 4.6 = 8(10^4)\ddot{\theta} + 2(1200)(0.8\frac{\pi}{180}) \Rightarrow \ddot{\theta} = -3.61(10^{-4}) rad/sn^2$$

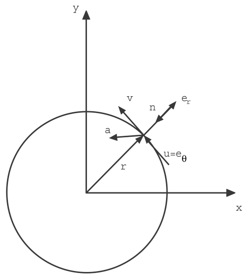


(a)



(b)

Genel Notlar



Şekil 25:

Dairesel Haraket:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

$$r = sb \qquad v = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta \text{ olur.}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}e_\theta) = \dot{r}\nearrow^0\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\mathbf{e_r})$$

$$a = r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e_r}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{d\theta}{dt} = \omega & \text{açısal hız} \\ \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon & \text{açısal ivme} \end{array}$$

$$a = -r\omega^2\mathbf{e_r} + r\varepsilon\mathbf{e}_\theta$$

NOT:$\mathbf{e_r} = \mathbf{n}$ ve $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e_t} = \mathbf{u}$konularak eğrisel koordinatlara geçebiliriz.

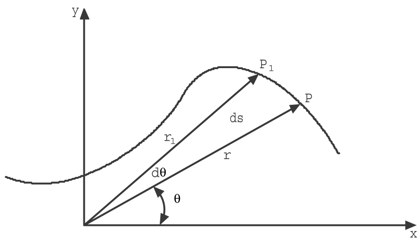
$$a = -r\omega^2\mathbf{n} + r\varepsilon\mathbf{u} = -r\frac{d\theta}{dt}^2\mathbf{n} + r\frac{d^2\omega}{dt^2}\mathbf{u} \qquad \text{yazılır.}$$

Haraket düzgün ise (Hızı sabit olan harakete düzgündr denir.) $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ =sabit ise: $\mathbf{v} = r\omega_0\mathbf{e}_\theta = r\omega_0\mathbf{u}$ ve $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = -r\omega_0^2\mathbf{e_r} = r\omega_0^2\mathbf{n}$ elde edilir.

UYARI: Düzgün dairesel harakette ***İVME SIFIR DEĞİLDİR***. Normal ivme vardır. Bazıları ivmenin sıfır olduğunu sanır. Yanlıştır.

1) Haraketler yörünge eğrisine göre adlandırılır.

2) Skaler hızı sabit olan haraket düzgün harakettir.



Şekil 26:

3) Teğetsel ivmesi sabit olan haraket ***DÜZGÜN DEĞİŞEN HARAKETTİR***:$a_u = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a_0 = sabit \Rightarrow v = a_0 t + b_0 \Rightarrow s = a_0 \frac{t^2}{2} + b_0 t + c_0$ düzgün değişen haraket.

4) Düzgün dairesel haraket periyodiktir. Peritodu $\frac{2\pi}{\omega}$ dir.

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = 0$$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ =sabit ise $\Rightarrow \theta = \omega_0 t + \theta_0$ ve $s = r\theta = r(\omega_0 t + \theta_0)$ dir.
Periyod:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

$x = r\cos(\omega_0 t + \theta_0)$; $t \to t + T$ koyarsak

$$r\cos(\omega_0(t+T) + \theta_0) = r\cos(2k\pi\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\omega_0 t + \omega_0 T + \theta_0 = 2k\pi + \omega_0 t + \theta_0 \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$$

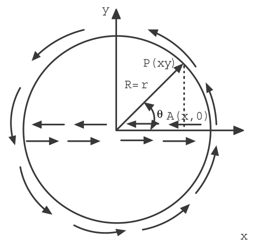
$k = 1$ için $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
5)ALAN HIZI:

$$\widehat{PP_1} = dl = rd\theta$$

$$Alan = ds = \frac{\overline{OP} \cdot \widehat{PP_1}}{2} = \frac{r \cdot rd\theta}{2} = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

$$\text{Alan Hızı} = \frac{ds}{dt} = A \Rightarrow \mathbf{A} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} \quad \text{Alan hızı vektörü}$$

Çünkü $\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$ idi. $\overrightarrow{OP}$ vektörel çarparsak $\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v} = r\mathbf{e_r} \times (\dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}\mathbf{e_z} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}$ bulunur. $A = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ idi.



Şekil 27:

$$\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v} = 2A\mathbf{k} \Rightarrow A\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} \times \mathbf{v}) = \mathbf{A}$$

NOT: A = sabit ise haraket düzgündür. $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = A = \frac{ds}{dt} = c = sb$ ise $\underbrace{s = ct + s_0}_{\text{Düzgün haraket Denklemi}}$ olur.

6) Düzgün dairesel harakette: Açısal hız= ω_0, $r = r_0$ sabittir. $v = r\dot{\theta} \Rightarrow v = r_0\omega_0$ ve ivme $a = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e_r} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta = r\ddot{\theta}\mathbf{u} + r\dot{\theta}^2\mathbf{n}$ idi. Buradan $\mathbf{a} = r_0\omega_0^2\mathbf{n}$ bulunur. Yani teğetsel ivme sıfır ve normal ivme $a_n = r_0\omega_0^2$ dir.

7) P'nin Ox ekseni üzerindeki A izdüşümünün haraketine ***BASİT HARMONİK HARAKET*** denir.

$$x_A = R\cos\theta \quad y_A = R\sin\theta \quad \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \frac{d}{d\theta}(R\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i} = (-R\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_A = -R\sin\theta(\omega_0)\mathbf{i} = -R\omega_0\sin\theta\mathbf{i}$$

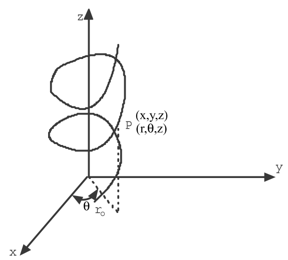
$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(-R\omega_0\sin\theta\mathbf{i}) = -R\omega_0\cos\theta\cdot\omega_0\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_A = -R\omega_0^2\cos\theta\mathbf{i}$$

$\theta = \omega_0 t + \theta_0$ yazılırsa: $y = r\sin(\omega_0 t + \theta_0)$

$$\mathbf{v}_A = -R\omega_0\sin(\omega_0 t + \theta_0)\mathbf{i} \Rightarrow v_A = -R\omega_0\sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

$$\mathbf{a}_A = -R\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \theta_0)\mathbf{i} \Rightarrow a_A = -R\omega_0\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$



Şekil 28:

Hız ve ivmenin x ve y cinsinden ifadeleri ise:

$$\mathbf{v}_A = -R\omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)\mathbf{i} = -\omega_0 x\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_A = -R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \theta_0)\mathbf{i} = -\omega_0^2 y\mathbf{i}$$

olur. Bu hareket periyodiktir.

$$x = R\cos(\omega_0 t + \theta_0) \Rightarrow R\cos(\omega_0[t+T] + \theta_0) = R\cos 2k\pi + \omega_0 t + \theta_0$$

$\omega_0 t + \omega_0 T + \theta_0 = 2k\pi + \omega_0 t + \theta_0 \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$, $k = 1$ için $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dir.
N birim zamanda titreşim sayısı olmak kaydıyla $T \cdot N = 1$ dir.
NOT: Basit harmonik (titreşim) haraketini; $x = R\cos(\omega_0 t + \theta_0) = \underbrace{R\cos\theta_0}_{C}\cos\omega_0 t - \underbrace{R\sin\theta_0}_{D}\sin\omega_0 t$ bulunur. Buradan $x = RC\cos\omega_0 t - RD\sin\omega_0 t$ yazılır.

$$C = R\cos\theta_0 \Rightarrow C^2 = R^2\cos^2\theta_0$$
$$D = R\sin\theta_0 \Rightarrow D^2 = R^2\sin^2\theta_0$$

$$C^2 + D^2 = R^2 \Rightarrow R = \underbrace{\sqrt{C^2 + D^2}}_{\text{GENLİK}}$$

8) ***Helisel Hareket (Dairesel)***

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z$$

$$\overrightarrow{OP} = r_0\mathbf{e_r} + z\mathbf{k} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{k} = \mathbf{e_z} \\ r = r_0 = sb \\ z = r_0 k\theta \\ k = \text{adım} \end{array}$$

$$v = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = r_0(\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e_\theta}) + r_0 k\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e_z}$$

$$v = r_0\omega(\mathbf{e_\theta} + k\mathbf{e_z}) \Rightarrow v = r_0\omega\sqrt{1+k^2}$$

Adım: P'nin z etrafında bir tur atması halinde z doğrultusunda aldığı yol.

İvme:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[r_0\omega(t)(\mathbf{e_\theta} + k\mathbf{e_z})]$$

$$\mathbf{a} = r_0\dot{\omega}(\mathbf{e_\theta} + k\mathbf{e_z}) + r_0\omega(-\dot{\omega}\mathbf{e_r} + k\frac{d\mathbf{e_z}}{dt}\nearrow^0)$$

$$\mathbf{a} = r_0\varepsilon(\mathbf{e_\theta} + k\mathbf{e_z}) - r_0\omega^2\mathbf{e_r}$$

$$\mathbf{a} = -r_0\omega^2\mathbf{e_r} + r_0\varepsilon\mathbf{e_\theta} + r_0\varepsilon k\mathbf{e_z}$$

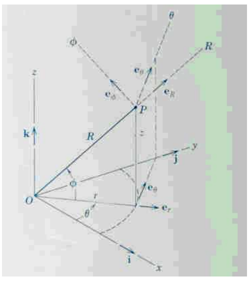
$$\mathbf{a} = \sqrt{r_0^2\omega^4 + r_0^2\varepsilon^2 + r_0^2\varepsilon^2k^2} = r_0\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2(1+k^2)}$$

Haraket düzgün ise yani $\dot{\omega} = \varepsilon = 0$ ise $\mathbf{a} = -r_0\omega^2\mathbf{e_r}$, $\mathbf{a} = -r_0\omega^2$ elde edilir.

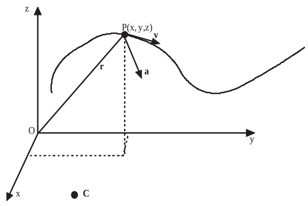
7 Uzayda Eğrisel Hareket

Noktasal cismin uzaysal eğri boyunca hareketi şekilde görüldüğü gibi olsun. Bu hareketi gösterme de 3 koordinat sistemi de yararlıdır:

- Kartezyen koordinat sistemi $(x-y-z)$,
- Silindirik (r, θ, z) koordinat sistemi,
- Küresel (R, θ, Φ) koordinat sistemi.



Şekil 29:



Şekil 30:

7.1 Kartezyen Koordinatlar $(x-y-z)$

2 boyuttan 3 boyuta geçiş konum, hız ve ivme ifadelerinde bir zorluk çıkarmaz. Sadece z koordinatının eklenmesi ile olur.

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \qquad \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$

3 boyutta konum vektörü r yerine R terimini kullanıyoruz.

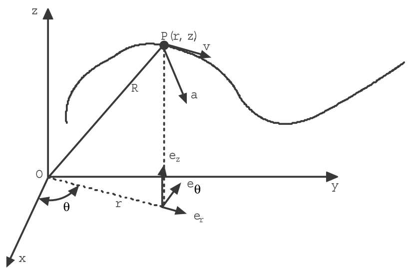
7.2 Silindirik Koordinatlar $(r-\theta-z)$

Polar koordinat sisteminde 2 boyuttan 3 boyuta geçmek oldukça kolaydır.

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e_r} + z\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dr\ \mathbf{e_r}}{dt} + \frac{dz\mathbf{k}}{dt}$$

Düzlemdeki hız ifadesine z bileşenine eklersek ,

$$\begin{array}{l} \mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \\ v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} \end{array}$$



Şekil 31:

benzer şekilde z bileşenini ekleyerek ivme için,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e_r} + \frac{dr}{dt}(\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta) + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}(-\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e_r}) + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$$

yukarıdaki ifadede ivme bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a_z = \ddot{z}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

7.3 Küresel koordinatlar $(R - \theta - \phi)$

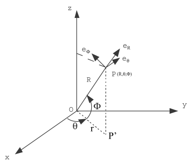
Uzayda noktasal cisme olan uzaklık ve onun açısal konumunu gösteren iki açı ölçüldüğünde küresel koordinat sistemi kullanılır. Hız **v** ve ivme **a** için aşağıdaki ifadeler elde edilir. Birim vektörlerimiz $\mathbf{e_R}$, $\mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_\phi$ olsun. Hız ve ivme için ifadeler aşağıdaki verildiği gibidir;

Hız için:

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e_r} + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} v_r = \dot{R} \\ v_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi \\ v_\Phi = R\dot{\Phi} \end{array}$$

İvme için:

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e_r} + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\phi\mathbf{e}_\phi \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} a_r = \ddot{R} - R\phi^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi \\ a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi \\ a_\Phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi \end{array}$$



Şekil 32:

DİNAMİK 1. ÖDEV

Şekildeki gibi seçilen küresel koordinatlarda

- **R**: yer vektörünü,
- **v**: hız vektörünü,
- **a**: ivme vektörünü

elde ediniz. Sonuçları notlarınıza ekleyiniz. Küresel koordinatları kullanarak 1 adet problemi ödevinize ve notlarınıza çözümlü olarak ekleyiniz.

Şekil 33:

Problem 2/11: Tahrikli bir vida hareketsiz halden başlayarak düzgün artan $d\theta/dt$ açısal hızıyla ($d\theta/dt = kt$, k sabit) dönüyor. A küresinin merkezinin, vida tam bir dönüş yaptığı andaki hızını ve ivmesini hesaplayın. Tam bir dönüşteki vida adımı L'dir.

Çözüm:

A küresinin merkezi helisel haraket yapar.

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = kt \Rightarrow \theta = \Delta\theta = \frac{1}{2}kt^2$$

Bir dönmede $\theta = 2\pi$ olur.

$$2\pi = \frac{1}{2}kt^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{\pi/k}$$

Böylece bir dönmede açıdaki zamanla değişim

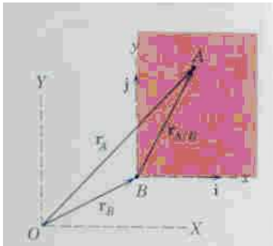
$$\dot{\theta} = kt = 2k(\sqrt{\pi/k}) = 2\sqrt{k\pi}$$

olur.

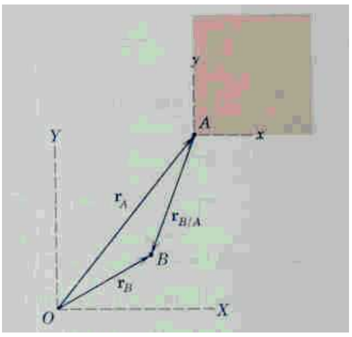
Çözümün devamı kitapta var. Tamamlayınız.

8 Bağıl Hareket (Ötelenen Eksenler)

Bundan önceki bölümlerde noktasal cismin hareketini sabit bir eksen takımına göre inceledik, Sonuç olarak elde edilen yer değiştirme, hız ve ivme mutlak yer değiştirme ve ivme oldu. Fakat her zaman bir cismin hareketini sabit bir eksen takımından incelemek mümkün veya uygun olmaz bir çok mühendislik probleminde noktasal cisim hareketli bir koordinat sistemine göre gözlemlenir ve bu hareket koordinat sisteminin hareketi ile birlikte incelendiğinde gözlemlenen cismin mutlak hareketini verir.



Şekil 34:



Şekil 35:

Bu kısımda hareketli eksen takımının öteleme hareketi yaptığını fakat dönmediğini kabul edelim. Şimdi aynı veya paralel düzlemlerdeki A ve B noktasal cisimlerini göz önüne alın.

B noktasına öteleme hareketi yapan $x - y$ koordinat sistemini iliştirelim.

$$\mathbf{r_A} = \mathbf{r_B} + \mathbf{r_{A/B}}$$

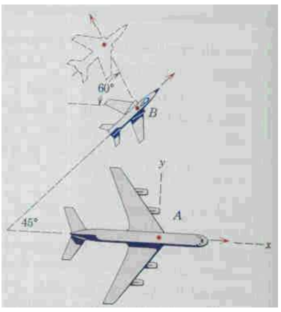
A/B'nin anlamı, A'nın B'ye bağıl veya A'nın B'ye göre anlamına gelir. Bu vektör eşitliğinin zamana göre 1. ve 2. türevini alırsak

$$\mathbf{\dot{r}_A} = \mathbf{\dot{r}_B} + \mathbf{\dot{r}_{A/B}} \Rightarrow \mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{A/B}} \text{ mutlak hız}$$

$\mathbf{\dot{r}_B} = \mathbf{v_B}$ Sürüklenme hızı veya B'nin mutlak hızı
$\mathbf{\dot{r}_{A/B}} = \mathbf{v_{A/B}}$ B'deki gözlemciye göre A'nın hızı=bağıl hız

NOT: Haraketli eksen takımını A cismine bağlarsak:

$$\mathbf{\dot{r}_B} = \mathbf{\dot{r}_A} + \mathbf{\dot{r}_{B/A}} \quad \mathbf{v_B} = \mathbf{v_A} + \mathbf{v_{B/A}} \quad \mathbf{a_B} = \mathbf{a_A} + \mathbf{a_{B/A}}$$



Şekil 36:

elde edecektik. Buradan $\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{A/B}} = -\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{B/A}}$, $\mathbf{v_{A/B}} = -\mathbf{v_{B/A}}$ ve $\mathbf{a_{A/B}} = -\mathbf{a_{B/A}}$ olduğu görülür.

Burada ikinci bir önemli gözlem, bir noktasal cismin hareketi eğer sabit hızla hareket eden bir eksene göre ölçülüyorsa, ivmesi sabit bir eksene göre ölçülen ivmesine eşittir. Böyle sabit bir hızla hareket eden referena sistemine atalet (inertial system) denir.

Problem 2/12: Bir jet uçağı doğuya doğru 800 km/saat lik bir hızla uçmaktadır, bunların altından yatay olarak (paralel düzlemde) bir B jet 45^o uçağı kuzey doğu yönüne doğru geçiyor. B uçağı A'daki yolculara göre şekilde gösterildiği gibi 60^o A'dan uzaklaşıyorlarmış gibi görünüyorsa, B'nin gerçek hızını tespit edin.

Çözüm 2/12:

$$\mathbf{v_B} = \mathbf{v_A} + \mathbf{v_{B/A}}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v_A} \text{ belli} = 800\mathbf{i}km/h \\ &\mathbf{v_B} = v_B \cos 45^o\mathbf{i} + v_B \sin 45^o\mathbf{j} \\ &\mathbf{v_{B/A}} = v_{B/A}\cos 60^o(-\mathbf{i}) + v_{B/A}\sin 60^o\mathbf{j} \end{aligned}$$

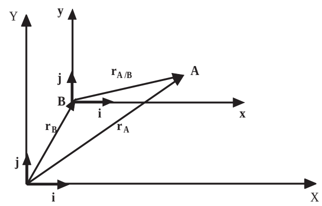
yerlerine yazılırsa

$$\mathbf{v_B} = v_B \cos 45^o\mathbf{i} + v_B \sin 45^o\mathbf{j} = 800\mathbf{i} + v_{B/A}\cos 60^o(-\mathbf{i}) + v_{B/A}\sin 60^o\mathbf{j}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{i} : v_B \cos 45^o = 800 - v_{B/A}\cos 60^o & \Rightarrow & v_{B/A} = 586\text{km/h} \\ \mathbf{j} : v_B \sin 45^o = v_{B/A}\sin 60^o & & v_B = 717\text{km/h} \end{array}$$

NOT: Hareketteki eksen takımını B'de seçersek $\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{A/B}}$ yapmalıyız. Sonuçta $\mathbf{v_{A/B}} = -\mathbf{v_{B/A}}$ olur.

Örnek Problem: A ve B maddesel noktalarının konumları sabit $X-Y$ eksen takımına göre $\mathbf{r_A} = -3t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j}$, $\mathbf{r_B} = -4t^2\mathbf{i} + 3t^3\mathbf{j}$ ile tanımlanıyor. $t = 3sn$ için $\mathbf{v_{A/B}}$ bağıl hızını ve $\mathbf{a_{A/B}}$ bağıl ivmesini hesaplayınız.



Şekil 37:

Çözüm:

$$\mathbf{r_A} = \mathbf{r_B} + \mathbf{r_{A/B}}$$

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{A/B}} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r_A}}{dt}|_{XY} = \frac{d\mathbf{r_B}}{dt}|_{XY} + \frac{d\mathbf{r_{A/B}}}{dt}|_{XY}$$

$\mathbf{r_{A/B}} = \mathbf{r_{A/B}}|_{xy} = \mathbf{B_{xy}}$ diyelim.

$$\mathbf{B}_{xy} = B_x(t)\mathbf{i} + B_y(t)\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{B}_{xy}}{dt}|_{XY} = \frac{dB_x(t)}{dt}|_{XY}\mathbf{i} + \frac{dB_y(t)}{dt}|_{XY}\mathbf{j} + B_x(t)\frac{d\mathbf{i}}{dt}|_{XY} + B_y(t)\frac{d\mathbf{j}}{dt}|_{XY}$$

$$\frac{d\mathbf{B}_{xy}}{dt}|_{XY} = \frac{dB_x(t)}{dt}|_{XY}\mathbf{i} + \frac{dB_y(t)}{dt}|_{XY}\mathbf{j} = \frac{dB_x(t)}{dt}|_{xy}\mathbf{i} + \frac{dB_y(t)}{dt}|_{xy}\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{B}_{xy}}{dt}|_{xy}$$

$$\frac{d\mathbf{B}_{xy}}{dt}|_{XY} = \frac{d\mathbf{B}_{xy}}{dt}|_{xy}$$

elde edilir. ***YALNIZ ÖTELEME YAPAN EKSEN İÇİN***

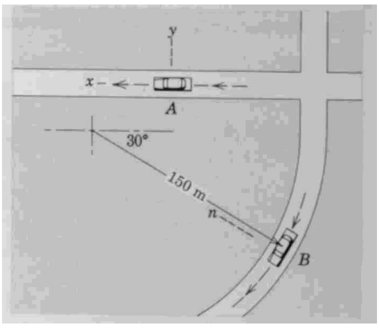
$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_B} + \mathbf{v_{A/B}} \Rightarrow \mathbf{v_A} - \mathbf{v_B} = \frac{d\mathbf{r_A}}{dt}|_{XY} - \frac{d\mathbf{r_B}}{dt}|_{XY}$$

$$\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B} = \frac{d}{dt}(-3t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j}) - \frac{d}{dt}(-4t^2\mathbf{i} + 3t^3\mathbf{j})$$

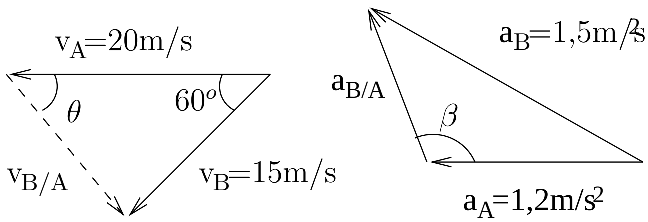
$$\mathbf{v_{A/B}} = (-9t^2\mathbf{i} - 6t^2\mathbf{j}) - (-8t\mathbf{i} + 9t^2\mathbf{j}) = (-9t^2 + 8t)\mathbf{i} - (6t^2 + 9t^2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v_{A/B}} = (-144 + 32)\mathbf{i} - (96 + 144)\mathbf{j} = (-112\mathbf{i} - 240\mathbf{j})m/sn$$

$$\mathbf{a_{A/B}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B}) = \frac{d\mathbf{v_A}}{dt}|_{XY} - \frac{d\mathbf{v_B}}{dt}|_{XY}$$



Şekil 38:



Şekil 39: Problem 2/13

$$\mathbf{a_{A/B}} = \frac{d}{dt}(-9t^2\mathbf{i} - 6t^2\mathbf{j}) - \frac{d}{dt}(-8t\mathbf{i} + 9t^2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a_{A/B}} = -18t\mathbf{i} - 12t\mathbf{j} + 8\mathbf{i} - 18t\mathbf{j} = (-18t + 8)\mathbf{i} + (-12t - 18t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a_{A/B}} = (8 - 72)\mathbf{i} - 30 \cdot 4\mathbf{j} = (-64\mathbf{i} - 120\mathbf{j})m/sn^2$$

Problem 2/13: A arabası hareketi yönünde $1.2m/sn^2$ ivmesiyle hızlanıyor, B arabası $150m$ yarıçapındaki bir viraja $54km/h$ sabit hızla giriyor. Şekilde gösterildiği anda eğer A arabası $72km/saat$ hızına ulaşmışşa, B arabasının A'daki bir gözlemciye göre hızını ve ivmesini hesaplayın.

Çözüm 2/13:

$$\mathbf{r_B} = \mathbf{r_A} + \mathbf{r_{B/A}}$$

$$\mathbf{v_B} = \mathbf{v_A} + \mathbf{v_{B/A}}$$

HIZ:

$$v_A = 72/3.6 = 20\ m/sn$$

$$v_B = 54/3.6 = 15\ m/sn$$

Şekilden cosinüs teoremini kullanarak

$$v_{B/A} = 18.03\ m/sn$$

$$\theta = 46.1^o$$

İVME:

$$\mathbf{a_B} = \mathbf{a_A} + \mathbf{a_{B/A}}$$

A'nın ivmesi biliniyor. B'nin ivmesi eğriye dik ve **n** doğrultusunda, übüyüklüğü:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_B = (15)^2/150 = 1.5\ m/sn$$

$$\mathbf{a_{B/A}} = \mathbf{a_B} - \mathbf{a_A} = 1.5\mathbf{n} - 1.2\mathbf{i}$$

$$(a_{B/A})_x = 1.5\cos 30^o\mathbf{i} - 1.2\mathbf{i} = 0.0990\ m/sn^2$$

$$(a_{B/A})_y = 1.5\sin 30^o\mathbf{j} = 0.75\ m/sn^2$$

$$a_{B/A} = \sqrt{(0.099)^2 + (0.75)^2} = 0.757\ m/sn^2$$

$\mathbf{a_{B/A}}$ vektörünün doğrultusu β açısından elde edilir.

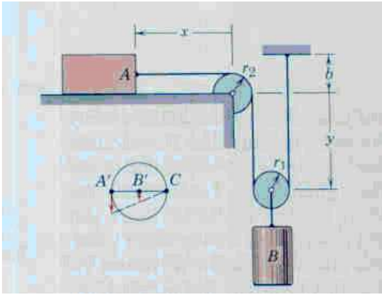
$$\frac{1.5}{\sin\beta} = \frac{0.757}{\sin 30^o} \Rightarrow \beta = 97.5^o$$

9 Bağlı (Birleştirilmiş) Cisimlerin Sınırlanmış Hareketi

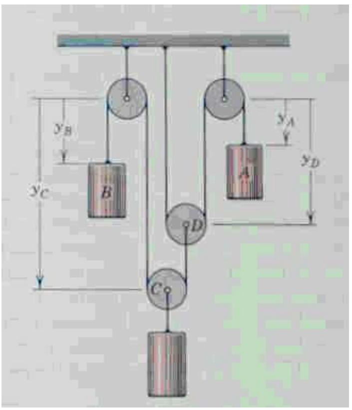
Bazen noktasal cisimlerin hareketi onların birbirine bağlı olması ile sınırlandırılır, böyle durumlarda bu noktasal cisimlerin birbirine göre bağıl hareketini incelemek için aradaki bağlayıcıyı incelemek gerekir.

Şekildeki birbirine bağlanmış A ve B noktasal cisimlerini düşünün,

A ve B cisimlerini birbirine bağlayan kablonun uzunluğu,



Şekil 40:



Şekil 41:

$$L = x + \pi r_2/2 + 2y + \pi r_1 + b$$

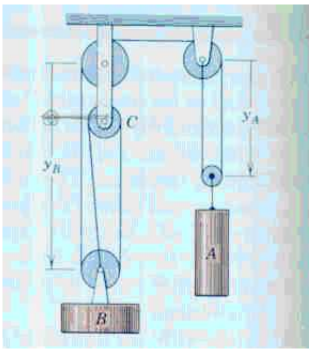
L, r_1, r_2 ve b şekildende görüldüğü gibi sabittir. Eğer kablonun uzunluğunun zamana göre 1. ve 2. türevini alırsak;

$$0 = \dot{x} + 2\dot{y} \text{ veya } \quad 0 = v_A + 2v_B$$
$$0 = \ddot{x} + 2\ddot{y} \text{ veya } \quad 0 = a_A + 2a_B$$

Hız ve ivme bağıntılarından, seçilen koordinat sistemi için A ve B cisimlerinin hız ve ivmelerinin işaretleri birbirine zıttır.

A ve B ağırlıklarının bağlı olduğu kabloların uzunluğunu yazarsak, ve bu eşitliklerin zamana göre 1. ve 2. türevini alalım, daha sonra d palangasının hızını ve ivmesini yok edersek final hız ve ivme eşitliklerini elde ederiz.

$$L_A = y_A + 2y_D + \text{sabit}$$
$$L_B = y_B + 2y_C + (y_C - y_D) + \text{sabit}$$



Şekil 42:

$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D \quad \text{ve} \quad 0 = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D$$
$$0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_D \quad \text{ve} \quad 0 = \ddot{y}_B + 2\ddot{y}_C - \ddot{y}_D$$

$\dot{y}_D$ ve $\ddot{y}_D$'yi elimine ederek

$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C \quad \text{ve} \quad v_A + 2v_B + 4v_C = 0$$
$$0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + 4\ddot{y}_C \quad \text{ve} \quad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

Bu 3 teriminin de aynı anda + (pozitif) olamayacağı kesin, eğer A ve B aynı anda aşağıya doğru ise (+) C yukarı doğru (−) hareket eder.

Problem 2/14: Şekilde gösterilen palanga düzeneğinde eğer A cismi aşağıya doğru $0.3m/sn$ hız ile hareket ediyorsa B'nin hızını hesaplayın.

Çözüm:

Toplam kablo

$$L = 3y_B + 2y_A + \text{sabit}$$

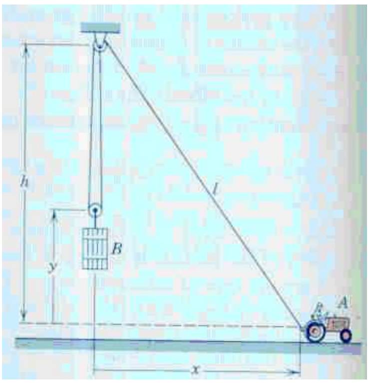
sabitler: Makaralara sarılan kablolar ve soldaki iki makara arasındaki uzaklık

$$0 = 3\dot{y}_B + 2\dot{y}_A$$

$$v_A = 0.3m/sn \quad \text{yazılırsa}$$

$$0 = 3\dot{y}_B + 2(0.3) \Rightarrow v_B = -\frac{0.6}{2}m/sn$$

$$v_B = -0.2m/sn$$



Şekil 43:

Problem 2/15: A traktörü B sandığını yukarı doğru çekmek için şekilde gösterilen palanga düzeneğini kullanıyor. Eğer A'nın hızı ileri doğru v_A ise sandığın hızını x mesafesi cinsinden bulunuz.

Çözüm:

Toplam kablo

$$L = 2(h - y) + l$$

$$L = 2(h - y) + \sqrt{(x^2 + h^2)}$$

$$0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

$v_A = \dot{x}$ ve $v_B = \dot{y}$ yapılırsa

$$2v_B = \frac{xv_A}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

$$v_B = \frac{xv_A}{2\sqrt{x^2 + h^2}}$$