6 Rijit cisimlerin düzlemsel kinetiği

6.1 Giriş

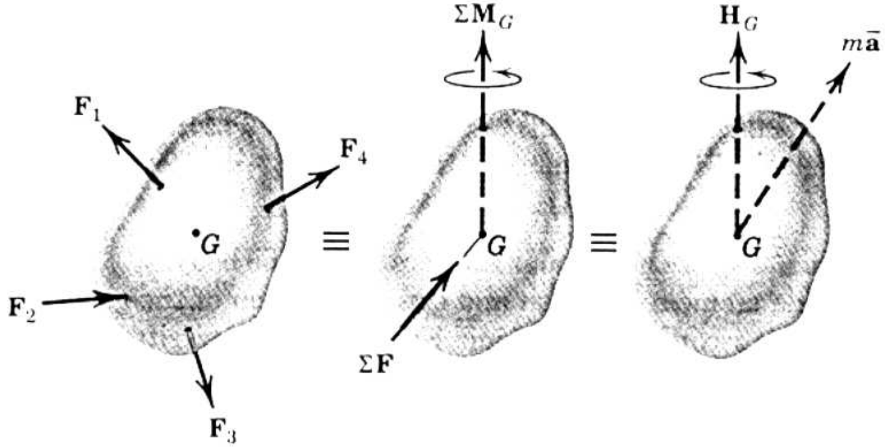
5. bölümde rijit cisimlerin düzlemsel kinematiğinin ilişkilerini (denklemlerini) gördük. Bu bölümde bu ilişkileri kullanarak rijit cisimlerin iki boyutlu hareketinde kuvvetlerin etkisini inceleyeceğiz.

6. Bölüm 3. Bölüm gibi 3 kısımda (A, B, ve C) incelenecek. A kısmında kuvvetlerin ve momentlerin lineer ivmesi ile açısal ivmesi arasındaki bağıntılar, B kısmında iş-enerji ve C kısmında impuls-momentum bağıntılarını göreceğiz.

Kısım A : Kuvvet kütle ve ivme

6.2 Hareketin genel denklemleri

4. bölümde hareketin kuvvet ve moment vektörel eşitliklerini genel kütle sistemi için bulduk Bunu şimdi 3 boyutlu rijit cisme uygulayalım.

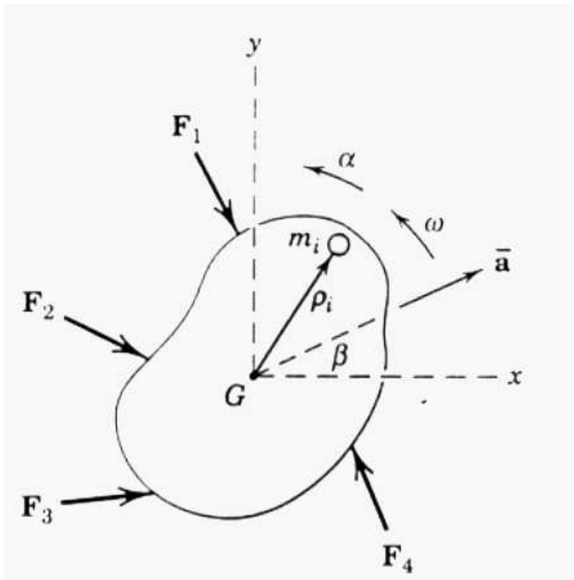


Kuvvet eşitliği : $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Moment eşitliği : $\mathbf{\Sigma M_G} = \mathbf{\dot{H}_G}$ idi.

<u>Düzlemsel hareketin denklemleri :</u>

Daha evvel yazdığımız eşitlikleri düzlemsel harekete uygulayalım. Şekilde x-y düzleminde hareket eden rijit bir cisim görüyoruz.



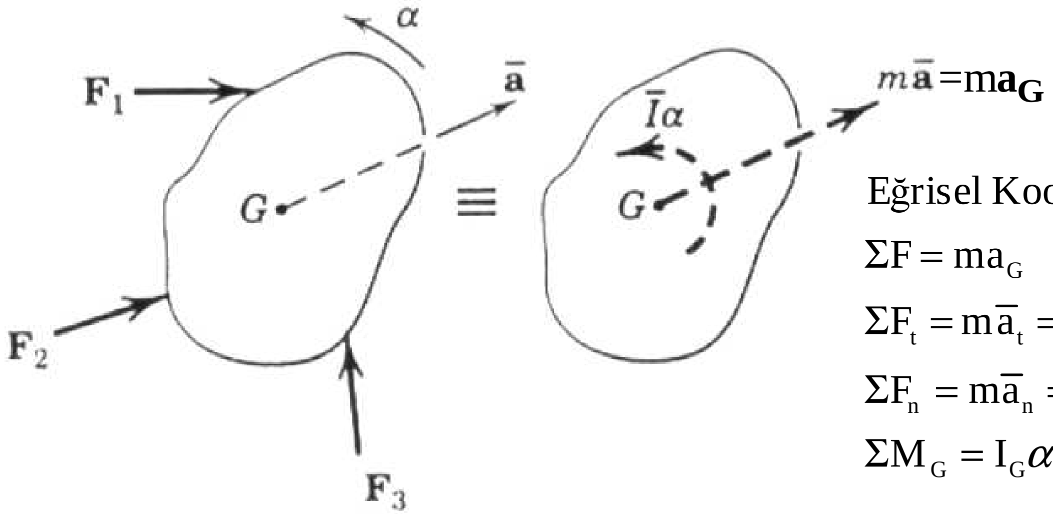
Cismin açısal hızı ve ivmesi pozitif z yönünde olsun, $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$ ve $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$. Genel sistemin kütle merkezine göre (4. Bölümde) açısal momentumu $\mathbf{H}_G = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ formülü ile verilmiştir.($\boldsymbol{\rho}_i, m_i$ noktasal cismin kütle merkezine göre konum vektörü). Rijit cisim için kütle merkezi G'ye göre bir noktanın bağıl hızı $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i$ dir. Bundan dolayı $\mathbf{H}_G$ açısal momentum vektörünün büyüklüğü :

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i},\ \mathbf{H_g} = \Sigma\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i}\times m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i})$$

$$\mathbf{H_G} = \Sigma m_i(\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i}.\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i})\boldsymbol{\omega} - \Sigma m_i\underbrace{(\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i}.\omega)}_{0}\boldsymbol{\rho}_\mathbf{i}$$

$$\mathbf{H_G} = \Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i^2\boldsymbol{\omega}$$

Yukarıdaki eşitlikteki toplam terimi $\Sigma\rho_i^2 m_i$, $\int(\rho)^2 dm$ integrali ile ifade edilir. Bu ifade $\left(\int\rho^2 dm\right)$ rijit cismin kütle merkezinden geçen z eksenine göre atalet momenti I_G olarakta tanımlanır. Bundan dolayı $H_G = I_G\omega$ yazılır. Böylece moment denklemi ; $\Sigma M_G = \dot{H}_G = I_G\dot{\omega} = I_G\alpha$ şeklini alır. Sonuç olarak rijit cisim için düzlemsel hareketin denklemlerini, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a_G}$ ve $\Sigma\mathbf{M_G} = I_G\boldsymbol{\alpha}$ (BİRİNCİSİ DÜZLEMDE ÖTELEME İKİNCİSİ DÜZLEMDE DÖNME) olarak elde etmiş olduk.



Serbest Cisim Diyagramı Kinetik Diyagramı

Eğrisel Koordinatlar:

$\Sigma F = ma_G$

$\Sigma F_t = m\bar{a}_t = m\rho_i\dot{\omega} = m\rho_i\alpha$

$\Sigma F_n = m\bar{a}_n = m\rho_i\omega^2$

$\Sigma M_G = I_G\alpha$

KARTEZYEN KOOR:

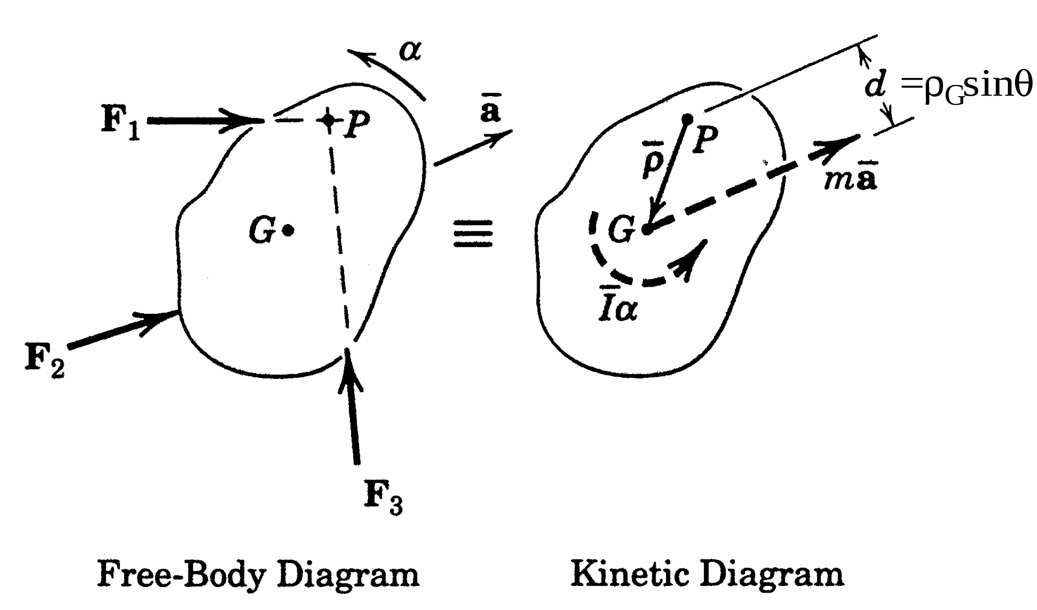
$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_\mathbf{G} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \Sigma F_x = m a_{Gx} \\ \Sigma F_y = m a_{Gy} \\ \Sigma F_z = m a_{Gz} \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c} 4\ \textit{Hareket Denklemi} \\ (\textit{Kartezyen Koor.}) \end{array}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_\mathbf{G} = I_G\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \quad \Sigma M_G = I_G\alpha$$

Alternatif moment eşitliği (Denklemi)

4. Bölümde bir noktasal cisim sistemi için herhangi bir P noktasına göre moment denklemleri;

$\Sigma \mathbf{M_p} = \dot{\mathbf{H}}_\mathbf{G} + \boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} \times m\mathbf{a}_\mathbf{G}$ şeklinde çıkartmıştık ($\boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} = \overline{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{PG}$ idi).



$$\boldsymbol{\Sigma M_p} = \dot{\mathbf{H}}_G + \boldsymbol{\rho}_G \times m\mathbf{a}_G \ , \ \boldsymbol{\rho}_G = \mathbf{PG}$$

Bu eşitliği 2 boyutlu rijit cisim için

$\Sigma M_p = I_G\, \alpha + m\, a_G\, d$ şeklinde yazabiliriz.

Eğer rijit cisim sabit bir O noktası etrafında dönüyorsa bu denklem $\Sigma M_o = I_o\, \alpha$ şeklini alır.

$$\mathbf{\Sigma M_p} = \mathbf{\dot{H}_G} + \boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} \times m\mathbf{a_G} \ , \ \mathbf{\Sigma M_G} = \mathbf{\dot{H}_G} = \mathrm{I_G}\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow |\ \mathbf{\dot{H}_G}\ | = \mathbf{\dot{H}_G} = I_G\alpha$$

$$\left|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} \times m\mathbf{a_G}\right| = \left|\boldsymbol{\rho}_\mathbf{G}\right|\left|\mathbf{a_G}\right| m\sin(\pi-\theta) = \rho_G \mathrm{a}_G \mathrm{msin\theta} = m\mathrm{a_G d}$$

$\mathbf{\Sigma M_p} \perp$ Hareket Düzlemi; $(\boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} \times m\mathbf{a_G}) \perp$ Har.Düzlemi

O halde $\Sigma \mathrm{M_p} = I_G\alpha + \mathrm{ma_G d}$ “Düzlemsel Harekette”

NOT: $\Sigma \mathrm{M_p} = (\mathbf{\dot{H}_p})_{\text{bağ}} + \boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} \times m\mathbf{a_p}$ idi. (4. Bölümde)

P noktasını katı cismin sabit noktası alırsak $\left[\Sigma \mathrm{M_G} = I_G\alpha = \dot{H}_G\right]$

dan $\left|\dot{\mathrm{H}}_\mathrm{p}\right|_{\text{bağ}} = I_p\alpha$ olur. $\mathbf{\Sigma M_p} = I_p\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} \times m\mathbf{a_p}$

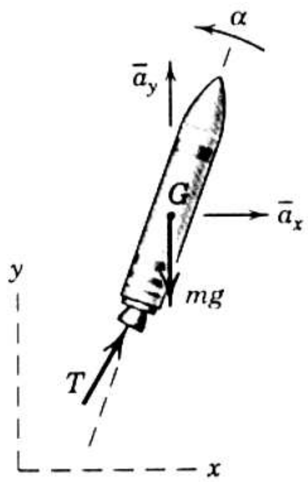
$\mathrm{I_p}$: P den geçen eksene göre atalet momenti (Kütle)

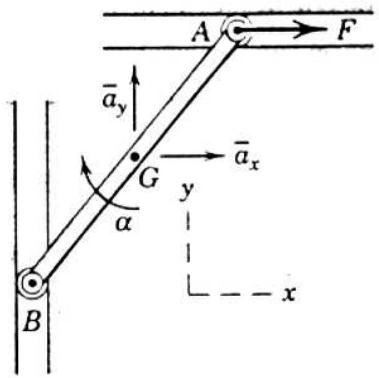
$\mathrm{a_p}$; P nin ivmesi ; $\boldsymbol{\rho}_\mathbf{G} = \mathbf{PG}$ dir. Eğer $\mathrm{P_G} = \mathrm{PG}=0$ ise

$\Sigma M_p = I\alpha$ olur. P noktası G kütle merkezi rolünü oynar.

$\Sigma M_p = I_p\alpha$ (skaler)

6.3 Bağımsız veya Bağımlı Katı Cisim Hareketi:





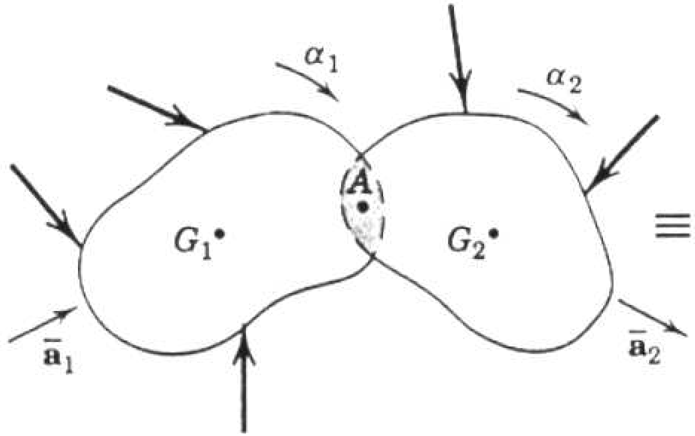
Şekildeki düşey düzlemde hareket eden roket bağımsız hareketli bir katı cisimdir. Fiziksel olarak hareketini sınırlayan bir engel yoktur.

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_G = \bar{I}\alpha\end{array}\right\}$$ denklemlerini uygulayarak

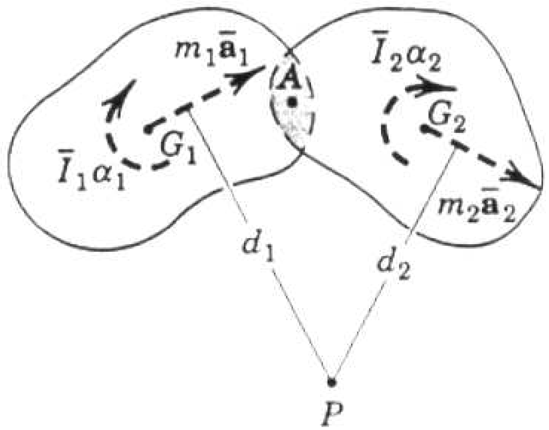
α açısal ivmesi ve $\bar{a}_x$, $\bar{a}_y$ kütle merkezi ivmeleri hesaplanabilir.

AB çubuğunun hareketi sınırlıdır. Bağımlı (Bağlı) hareket edebilir. Kütle merkezinin ivme bileşenleri ile çubuğun açısal ivmesi arasındaki bağıntı 5. bölümdeki kinematik bilgilerinden elde edilir sonra $\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$ ve $\Sigma M = \bar{I}\alpha$ denklemleri uygulanır. Bu nedenle 5. Bölüm çok önemlidir.

6.4 Birbirine bağlı katı cisim sistemleri



Serbest Cisim Diyagramı



Kinetik Diagram

Cisimleri tekbir katı cisim sistemi saymak uygundur. A bağ noktasındaki kuvvet iç kuvvet olur. Dikkate alınmaz. $\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$ ve $\Sigma M = \bar{I}\alpha$ denklemlerini;

$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma m\bar{\mathbf{a}} = m_1\bar{\mathbf{a}}_1 + m_2\bar{\mathbf{a}}_2$

Ve keyfi bir P noktasına göre tüm dış kuvvetlerin momentleri toplamı

$\bar{I}_1\alpha_1 + \bar{I}_2\alpha_2 + m_1\bar{a}_1 d_1 + m_2\bar{a}_2 d_2$ bileşkelerinin momentine eşit olur. Yani;

$\Sigma M_p = \Sigma \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d$ $\quad \boxed{B}$ şeklini alır.

$\boxed{A}$ ve $\boxed{B}$ denklemleri uygulanarak sistemin bilinmeyenleri çözülür. Denklem sayısı yetmez ise, sistem parçalara ayrılır her parça için $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ve $\Sigma M = I\alpha$ uygulanır. Veya VİRTÜEL iş ya da LAGRANGE denklemleri kullanılır.

6.5 Alan Atalet Momenti

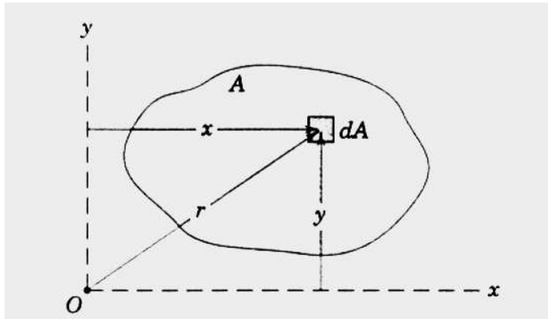
Eksene Göre:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA, \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_z = \int r^2 dA, \text{ Polar atalet momenti}$$

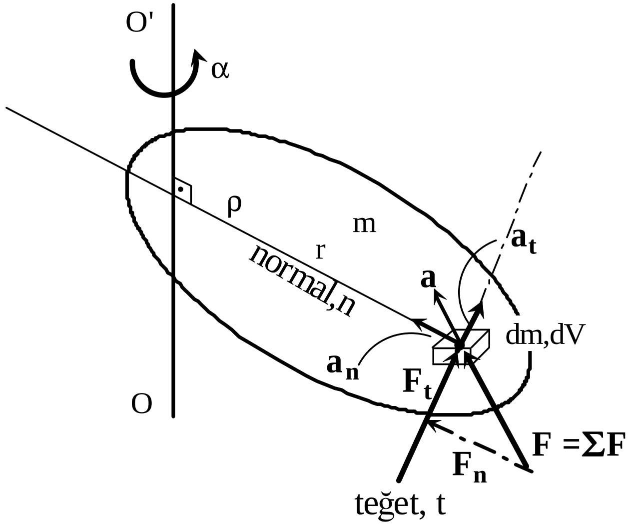
$$I_z = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$



Alan atalet momenti göz önüne alınan eksene göre A alanının dağılımının ölçümü olup, alanın sabit bir özelliğidir.

Boyutu: (uzaklığın)$^4 = \lfloor 4 \Rightarrow$ m^4 dir.(SI)

Gerçek cisimler için atalet momenti KÜTLE atalet momenti olarak hesaplanır. Kütlenin sözkonusu eksene göre dağılımının ölçümüdür. EKSENE GÖRE KÜTLE ATALET MOMENTİ:



$a_t = r\alpha = r\dot{\omega} = r\ddot{\theta}$

$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow F_t = ma_t$

$F_t = r\alpha dm$ bulunur. Bunun OO'' ne göre

momenti $r(r\ \alpha\ dm) = r^2\alpha dm$ dir.

Bu tür kuvvetlerin toplam momenti katı

Cismin tüm noktaları için

$\int r^2\alpha dm$ integrali ile hesaplanır.

NOT: $F_n = mr\omega^2$ nin OO′ ne göre momenti SIFIRDIR.

$$M_{OO'} = \int r^2 \alpha dm = \alpha \int r^2 dm, \quad \alpha : \text{tek}$$

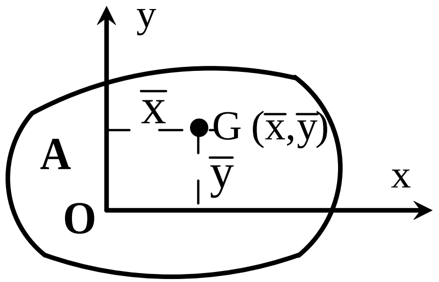
$\int r^2 dm = I$ ile gösterilir. Ve OO’ eksenine göre m kütlesinin KÜTLE ATALET MOMENTİ adını alır.

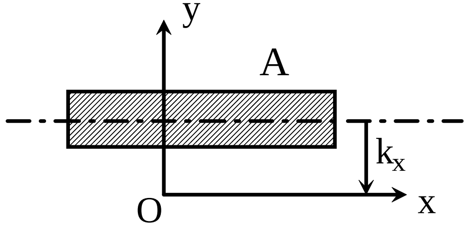
$I = \int r^2 dm$, cismin α açısal ivmesine karşı direncini temsil eder.

$$I = \int \mathrm{r}^2 \mathrm{dm} = \int \mathrm{r}^2 (\underbrace{\rho \mathrm{dV}}_{\mathrm{dm}}), \quad \begin{matrix} \rho : yoğunluk \\ V : Hacim \end{matrix}$$

$I = \rho \int r^2 dV$ $\quad \rho =$ sabit ise..Aksi halde integral içerisinde kalır.

6.6 Atalet Yarıçapı (Radius Of Gyration)



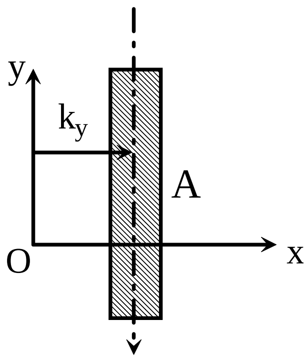


A alanının x ekseninden uzaklığı k_x olan ince bir şeride sıkıştıralım.

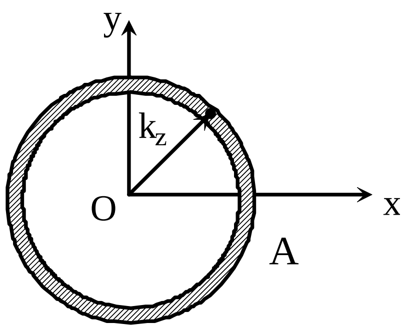
$I_x = k_x^2 A$ yazılır. k_x'e A alanının x eksenine göre atalet yarıçapı denir.

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$I_y = k_y^2 A$$



$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$



$$I_z = k_z^2 A \;\Rightarrow k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

NOT: A alanının göz önüne alınan eksene göre dağılımının ölçümünü ATALET YARIÇAPI olarak tanımlarız.

İndisi atarsak; m kütlesinin bir eksene göre atalet yarıçapı

$k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$ veya $\mathrm{I} = \mathrm{k}^2 m$ dir.

NOT: A alanının G kütle merkezinin $\overline{\mathrm{x}}$, $\overline{\mathrm{y}}$ veya $\mathrm{x}_\mathrm{G}, \mathrm{y}_\mathrm{G}$ koordinatları ile atalet yarıçapı karıştırılmamalıdır.

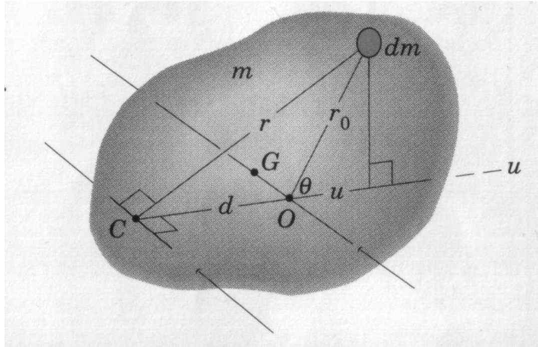
$\overline{y}^2$, A alanının elemanlarının x eksenine olan uzaklıklarının ortalmasının karesidir.

k_x^2 ise elemanların x eksenine olan uzaklıklarının karelerinin ortalamasıdır

Yani $I_x \neq \mathrm{A}\overline{\mathrm{y}}^2$ (Ortalamanın karesi, karelerin ortalamasından daha küçük)

6.7 Alan Atalet Momentinin Nakli (Transfer Of Axes)

Kütle merkezinden geçen bir eksene göre bir cismin atalet momenti biliniyorsa, paralel bir eksene göre atalet momentinin bulunması. Şekildeki iki paralele ekseni alalım.



$$I = \int r^2 dm,$$

$$r^2 = r_o^{\,2} + d^2 + 2r_o d\cos\theta$$

$$I = \int (r_o^{\,2} + d^2 + 2r_o d\cos\theta)dm$$

$$I = \int r_o^{\,2} dm + d^2 \int dm + 2d \int r_o \cos\theta dm$$

$$I = \int r_0^2 dm + d^2 m + 2d \int m dm$$

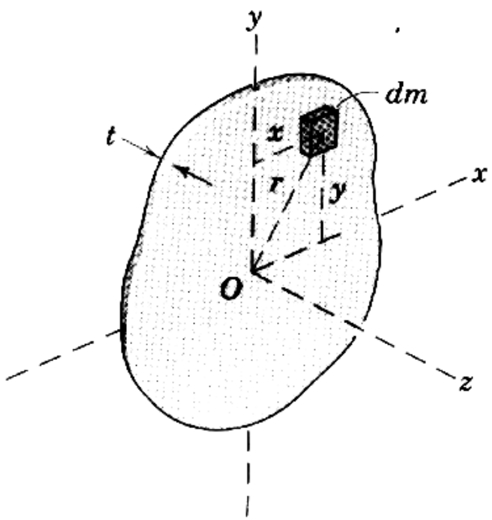
$I = \overline{I} + md^2 + 0$ (Kütle merkezinin u koordinatı sıfırdır)

$$I = \overline{I} + md^2$$

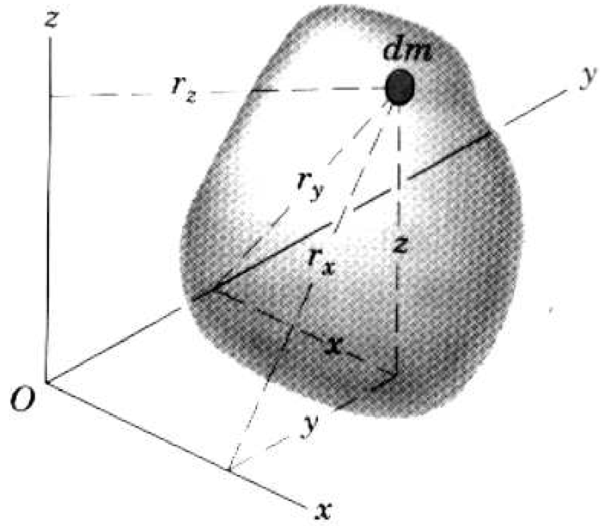
$I_x = \overline{I}_x + md_x^2$; $I_y = \overline{I}_y + md_y^{\,2}$ ve $I_z = \overline{I}_z + md_z^2$ yazılır.

Düzlemsel harekette dönme, düzleme dik bir eksen etrafında olur. Bu nedenle kütle atalet momentini $I = \int r^2 dm$ şeklinde bir tek sembol ile gösteririz. Ve eğer levha x,y düzleminde hareket ediyorsa, O dan geçen z eksenine göre atalet momenti I_0 ile temsil edilir.

Üç boyutlu harekette $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ olabilir. Bu durumda x,y,z eksenlerine göre atalet momentlerini; $I_{xx};I_{yy};I_{zz}$ ile temsil ederiz.



$$I_{xx} = \int r_x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$$
$$I_{yy} = \int r_y^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm$$
$$I_{zz} = \int r_z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$



Kütle atalet momenti ile Alan atalet momenti arasındaki benzerlik:

$$I_{zz} = \int r_z^2 dm = \int r_z^2 (\rho t \mathrm{dA})$$
$$I_{zz} = \rho t \underbrace{\int r_z^2 dA}_{I_z} = \rho t \mathrm{I_z}$$

Kütle atalet momenti birim alanın kütlesi ile I_z polar atalet momentinin çarpımına eşittir. Benzer olarak

$I_{xx} = \underbrace{\rho t}_{\substack{Birim\\alanın\\kütlesi}} \mathrm{I_x}$ ve $I_{yy} = \underbrace{\rho t}_{\substack{Birim\\Alanın\\Kütlesi}} I_y$ elde edilir.

Çift indis plakanın kütle atalet momentini ve tek indis plakanın ALAN atalet momentini temsil ediyor.

NOT: Alan Atalet momentinde $I_z = I_x + I_y$ idi.

Kütle atalet momenti için

$$I_{xx} + I_{yy} = \rho t I_x + \rho t I_y = \rho t (I_x + I_y) = \rho t I_z = I_{zz}$$

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ NOT: Bu bağıntı t kalınlığının veya z koordinatlarının x ve y nin yanında küçük olması halinde geçerlidir.

Bu bağıntı dz kalınlığındaki levha için diferansiyel kütle elemanı ile ilgilenildiği zaman yararlıdır.

$dI_{zz} = dI_{xx} + dI_{yy}$ Şeklinde uygulanır.

6.8 Parçalı Cisimler

$I = \int r^2 dm$ ifadesi daima pozitiftir. Parçalı bir cismin bir eksene göre atalet momenti cismin her parçasının aynı eksene göre atalet momentlerinin toplamına eşittir. Pozitif ve negatif hacimler tanımlanabilir. Kesilip çıkartılan alan ve hacimler negatif ala ve hacim olarak alınır.

6.9 Atalet Çarpanları

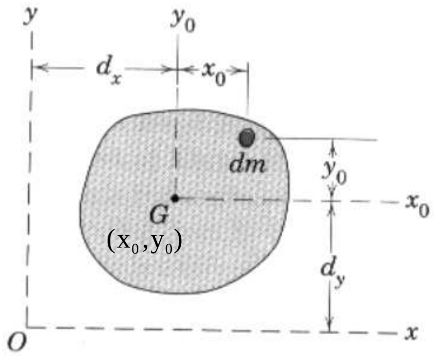
$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int xydm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int xzdm \\ I_{zy} &= I_{yz} = \int zydm \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{Atalet çarpanları} \\ \text{olarak tanımlanırlar}\end{array}$$

Hesaplarda, alanlardaki gibi davranılır. Eksenlerin kaydırılması geçerlidir:

$$I_{xy} = \int xydm = \int (x_0 + dx)(y_0 + dy)dm$$

$$I_{xy} = \int x_0 y_0 dm + \int d_x d_y dm + d_x \int y_0 dm + d_y \int x_0 dm$$

$$I_{xy} = I_{x_0 y_0} + mdxdy + 0 + 0$$



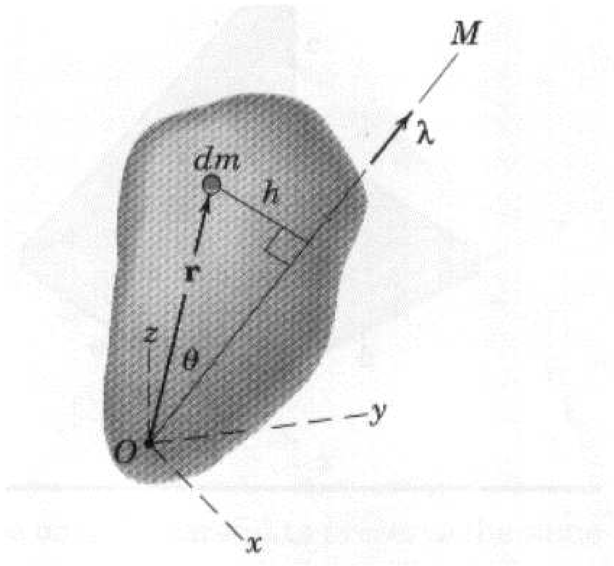
I_{xz} ve I_{yz} için de benzer işlem yapılır ve sıfır indisler atılırsa

$$I_{xy} = \overline{I}_{xy} + mdxdy$$

$$I_{xz} = \overline{I}_{xz} + mdxdz$$ yazılır.

$$I_{yz} = \overline{I}_{yz} + mdydz$$

6.10 Koordinat Merkezinden Geçen Herhangi Bir M Doğrusuna Göre Atalet Momenti



$|\boldsymbol{\lambda}| = 1,\ \boldsymbol{\lambda} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$

l,m,n doğrultman kosinüsleri

$$\mathrm{I_M} = \int h^2 dm = \int (r \times \lambda) \cdot (r \times \lambda) dm$$

$$\mathrm{I_M} = \int [(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})] \cdot$$
$$[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})] dm$$

$$\mathrm{I_M} = \int \left[\left(y^2 + z^2\right) l^2 + \left(x^2 + z^2\right) m^2 + \left(x^2 + y^2\right) n^2 - 2xyml - 2xzln - 2yzmn \right] \mathrm{dm}$$

$I_M = I_{xx} l^2 + I_{yy} m^2 + I_{zz} n^2 - 2I_{xy} lm - 2I_{xz} ln - 2I_{yz} mn$ elde edilir.

$|\mathrm{r} \times \lambda| = |\mathrm{r}||\lambda| \sin\theta = |\mathrm{r}| \sin\theta = \mathrm{h} \qquad \mathrm{h}^2 = (\mathrm{r} \times \lambda) \cdot (\mathrm{r} \times \lambda)$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

İfadesine ATALET MATRİSİ veya ATALET TENSÖRÜ denir. Verilen bir noktadan geçen eksenlere göre atalet çarpanlarını ve atalet momentlerini alıyoruz demektir.

Öyle x,y,z eksenleri bulabiliriz ki bu eksenlere göre yazılan $I_{xy}=I_{yx}$; $I_{xz}=I_{zx}$; $I_{yz}=I_{zy}$

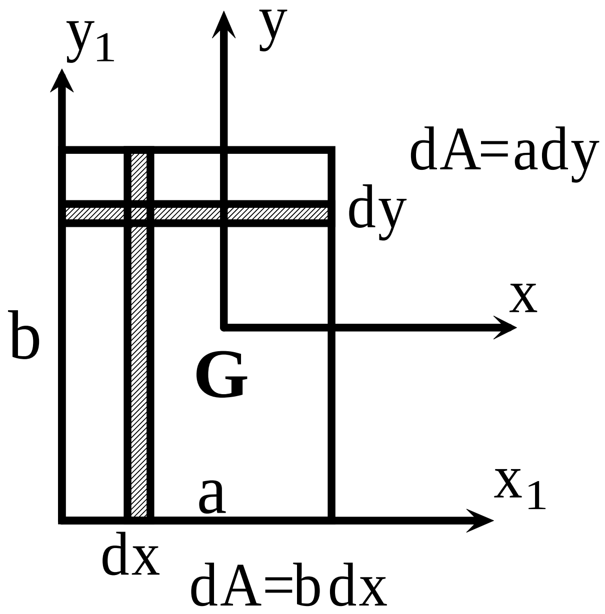
Atalet çarpanları sıfır olur. Yani

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

yazılır. Böyle eksenlere ASAL ATALET EKSENLERİ denir. I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} lere de ASAL ATALET MOMENTLERİ DENİR.

NOT: İki koordinat eksenini taşıyan birbirine dik iki düzlem verilen cismin SİMETRİ DÜZLEMİ ise tüm ATALET ÇARPANLARI sıfırdır.

Problem 6.1: Şekildeki alanın x_1x_1 ve y_1y_1 eksenlerine göre atalet momentlerini bulunuz.



Çözüm:

G kütle merkezinden geçen x,y'ye göre:

x'e göre kesit alınır. $I_x = \int dI_x$

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 a\,dy$$

$$I_x = a\frac{y^3}{3}\Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_y = \int dI_y = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 b\,dx = b\frac{x^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{ba^3}{12}$$

Aynı işlemler I_{x_1} ve I_{y_1} için farklı sınırlarla kullanılır.

$$I_{x_1} = \int dI_{x1} = \int y^2 \mathrm{dA} = \int_0^b \mathrm{y}^2 \mathrm{ady} = \frac{\mathrm{ab}^3}{3}$$

$$I_{y_1} = \int dI_{y1} = \int x^2 \mathrm{dA} = \int_0^a \mathrm{x}^2 \mathrm{bdx} = \frac{\mathrm{ba}^3}{3}$$

NOT: aynı sonuçları iki katlı integral ile de elde ederiz.

$$I_{x1} = \int\int y^2 dA = \int\int y^2 dxdy = \int_0^a\int_0^b (y^2 dy)dx$$

$$I_{x1} = \int_0^a \frac{y^3}{3}\Big|_0^b dx = \int_0^a \frac{b^3}{3} dx = \frac{1}{3} b^3 x\Big|_0^a = \frac{ab^3}{3}$$

$$I_{y1} = \int_0^b\int_0^a x^2 dxdy = \int_0^b \frac{x^3}{3}\Big|_0^a \mathrm{dy} = \frac{\mathrm{a}^3 y}{3}\Big|_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

Problem 6.2: Şekildeki yarım dairenin;

1-) I_x, I_y atalet momentlerini,

2-) Dairenin kalınlığı h *m*, maddenin yoğunluğu ρ *gr/cm*^{3} ise $I_x^{'}$ kütle atalet momentini hesaplayınız. NOT: $I_x^{'}$ kütle atalet momentinin z koordinatına bağlı olmadığına dikkat ediniz.

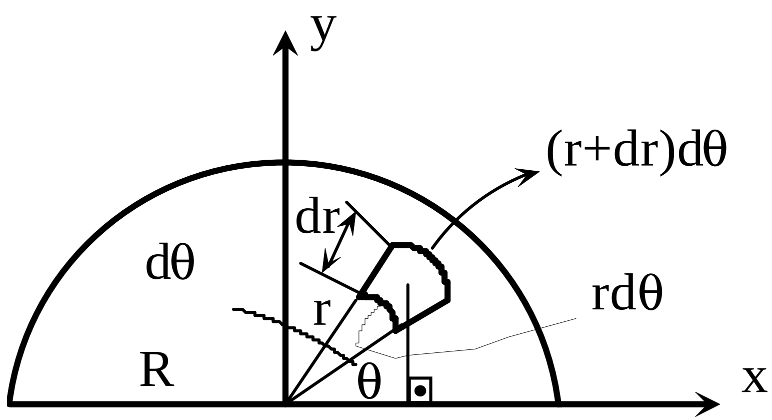
Çözüm:

$$dA = (rd\theta)dr = rd\theta dr$$

$$I_x = \int\int y^2 dA$$

$$I_x = \int\int (r\sin\theta)^2 rd\theta dr = \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^3 \sin^2\theta dr d\theta$$

$$I_x = \int_0^{\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R \sin^2\theta d\theta = \frac{R^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$



$$I_x = \frac{R^4}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\pi}$$

$$I_x = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^4\pi}{8}$$

$$I_y = \int\int x^2 dA = \int_0^{\pi}\int_0^{R}(R\cos\theta)^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^3\cos^2\theta \mathrm{drd}\theta$$

$$I_y = \int_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\mathrm{R}}\cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$I_y = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{R^4}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^4\pi}{8}$$

2-) Kütle Atalet Momenti: $I_x^{'} = \int \rho^2 dm = \int y^2 dm$

$$\mathrm{I}_x^{'} = \int y^2 (\underbrace{\rho h dA}_{dm}) = \rho h \int y^2 dA = \rho h \mathrm{I}_x$$

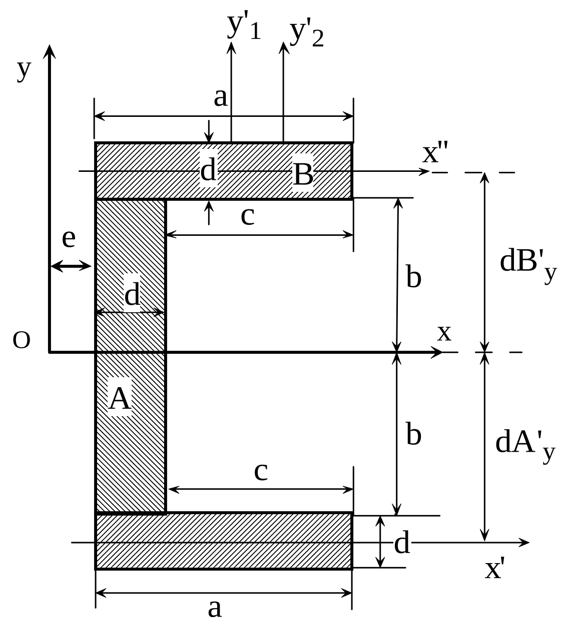
$$I_x^{'} = \rho h \left(\frac{R^4 \pi}{8} \right) = \frac{R^4 \rho h \pi}{8}$$

Problem 6.3: Şekildeki kanal kesitinin x ve y eksenlerine göre atalet momentini elde ediniz.

Çözüm: A alanı için I_{x_A} kütle merkezinden geçen eksene göre atalet momentidir. Buna kısaca O merkezi atalet momenti de denir.

B alanları $\mathrm{I} = \mathrm{I}_G + \mathrm{Ad}^2$ geçerlidir.

$$\mathrm{I}_{xB} = \mathrm{I}_{x'B} + (\underbrace{ad}_{A})(\underbrace{b + \frac{d}{2}}_{dAy'})^2$$



Bütün kanalın x eksenine göre atalet momenti

$\mathrm{I_x = I_{xA} + 2I_{xB}}$ yazılır.

Aynı I_x momentini kanal kesitinin alanı

$Ç = a(2d + 2b)$ dikdörtgeninden alanı $D = c(2b)$ olan dikdörtgenin kesilip çıkarılması ile de elde ederiz. x ekseni bu iki dikdörtgen için de merkezi eksen olduğundan paralel eksen teoremine göre $\mathrm{I_x = I_{xC} - I_{x_D}}$ yazılır. Bu yol daha kolaydır.

[$\left[(ab)\left(b + \frac{d}{2}\right)^2\right]$ hesabına gerek kalmaz]

I_y nin hesabında her parça için paralel eksen teoremini kullanmak gereklidir. Bu nedenle parça sayısını minimumda tutmak yararlıdır. Alanı $Ç = a(2b + 2d)$, $D = a(2b)$

olan parçalarda hesap yapılırsa $I_y = I_{y_G} + a(2b + 2d)\left(e + \frac{a}{2}\right)^2 + I_{yD} + c(2b)(e + d + \frac{a}{2})^2$

elde edilir.

Problem 6.4: ab dikdörtgeninin x_1, y_1 ve x_2, y_2 eksenlerine göre atalet momentlerini bulunuz.

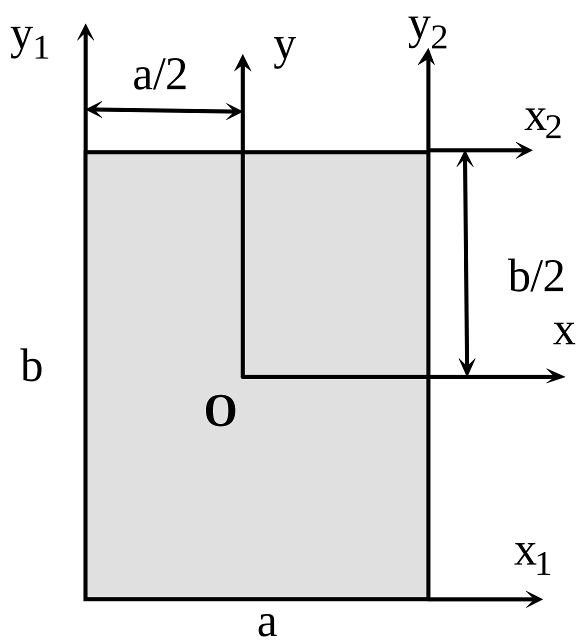
Çözüm:

$$I_{x1} = I_x + Ad^2$$

$$I_{x1} = \underbrace{\frac{1}{12}ab^3}_{1.\,Örnek} + (ab)\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$I_{x1} = \frac{1}{12}ab^3 + \frac{1}{4}ab^3$$

$$I_{x1} = \frac{1}{3}ab^3$$



$$I_{y1} = I_y + Ad^2 = \underbrace{\frac{1}{12}ba^3}_{1.\,Örnek} + (ab)\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I_{y1} = \frac{1}{12}a^3b + \frac{1}{4}a^3b = \frac{1}{3}ba^3 \text{ bulunur.}$$

$$\mathrm{I}_{x2} = I_x + Ad^2 = \frac{1}{12}ab^3 + (ab)\left(\frac{b}{2}\right)$$

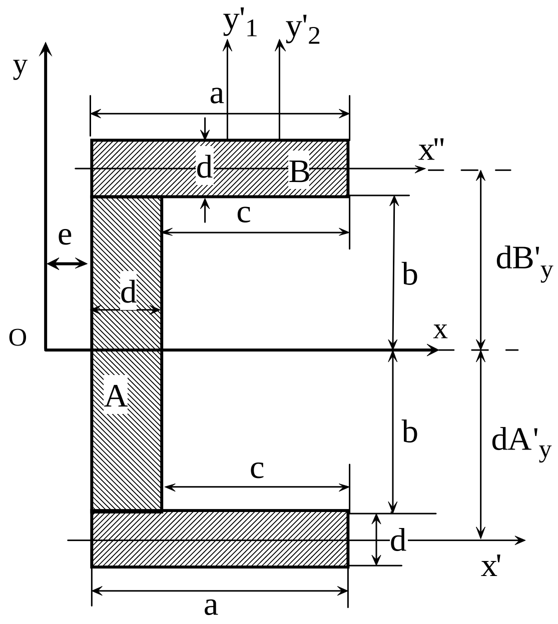
$$I_{x2} = \frac{1}{12}ab^3 + a\frac{b^3}{4} = \frac{4ab^3}{12} = \frac{1}{3}ab^3$$

$$I_{y2} = I_y + Ad^2 = \frac{1}{12}ba^3 + (ab)\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I_{y2} = \frac{1}{3}ba^3$$

NOT: Kütle merkezinden eşit uzaklıkta olan paralel doğrulara göre atalet momentleri eşittir. Çünkü hesaplarda uzaklığın karesi yer alır.

Problem 6.5: Örnek problem 3 deki kanal kesitinin x, x' ve y eksenlerine göre atalet momentlerini a=10 cm b=9 cm, d=2 cm, e=4 cm için hesaplayınız. Ayrıca J_0 polar atalet momentini bulunuz.



Çözüm: A ve B parçalarının merkezlerinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini I_A ve I_B ile gösterelim.

$$I_x = I_{Ax} + A_A dA_{Ay}^2 + 2(I_{Bx} + A_B d_{By}^2)$$

$$I_x = \frac{1}{12}(2b)^3 d + (2bd)(0) +$$

$$2\left[\frac{1}{12}d^3 a + (ad)\left(b + \frac{d}{2}\right)^2\right]$$

$$I_x = \frac{1}{12}(2\times 8)^3(2) + 0 + 2\left[\frac{1}{12}(2)^3(10) + (10)(2)(8 + \frac{2}{2})^2\right]$$

$$I_x = 683\,cm^4 + 2(6.7 + 1620)\,cm^4 = 3936\,cm^4$$

$$I_y = I_{Ay} + A_A dA_{Ax}^2 + 2(I_{By} + A_B d_{Bx}^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12}(2h)d^3 + (2bd)\left(e + \frac{d}{2}\right)^2 + 2\left[\frac{1}{12}da^3 + ad(e + \frac{a}{2})^2\right]$$

$$I_y = \frac{1}{12}(16)(2)^3 + 2(8 \times 2)(4+1)^2 + 2\left[\frac{1}{12}(2)(10)^3 + (10)(2)(4+5)^2\right]$$

$$\mathrm{I_y} = 4384\,cm^4$$

$$\mathrm{I_{x1}} = I_{Ax} + A_A d_{Ay'}^2 + I_{Bx''} + A_B d_{By'}^2 + I_{Bx'}$$

$$\mathrm{I_{x'}} = \frac{1}{12}(16)^3(2) + (16)(2)(8+1)^2 + \frac{1}{12}(10)(2)^3 +$$

$$(10)(2)(16+2)^2 + \frac{1}{12}(10)(2)^3$$

$$\mathrm{I_{x'}} = 9768\,cm^4$$

$$J_0 = I_x + I_y = 3936 + 4384 = 8320\,cm^4$$

Problem 5'e NOT: $I_{x'} > I_x$ dir. Bu normal, çünkü kanal kesitini x' etrafında döndürmek x ekseni etrafında döndürmeye göre çok daha kolaydır. Ayrıca atalet momenti r^2 bağlı olduğu için de normaldir.

Problem 6.6: Şekildeki üçgen alanı için I_{xy} atalet çarpanını hesaplayınız.

Çözüm:

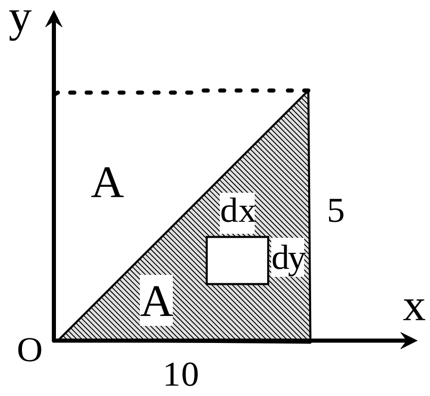
$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int xydA$$

(dikdörtgenin yarısını A alarak)

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^5 \left[\int_0^{10} xdx\right] ydy = \frac{1}{2}\int_0^5 \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^5 ydy$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{100}{2} ydy = 25\frac{y^2}{2}\Big|_0^5$$

$$I_{xy} = \frac{25}{2}(25) = 312.5$$

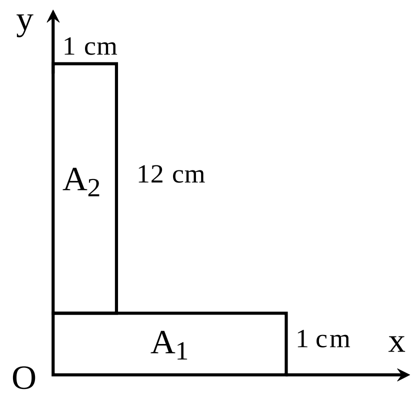


Bu sonucu, sadece verilen A alanı için iki katlı integralle veya x ve y doğrultusunda dx ve dy kesimleri alınarak A için tek katlı integral ile de elde edebiliriz.

Problem 7: Şekildeki cismin asal atalet momentlerini hesaplayınız. Asal atalet eksenlerini belirleyiniz.

Çözüm:

x ve y eksenlerine göre I_x ve I_y yi hesaplayalım.



$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_x = \frac{1}{12}(10\,cm)(1\,cm^3) + (10cm^2)(0,5cm^2)$$

$$+\frac{1}{12}(1cm)(11cm)^3 + (11cm^2)(6,5cm)^2$$

$$I_x = 579\,cm^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_y = \frac{1}{12}(10cm)^3(1cm)$$

$$+(10cm^2)(0,5cm)^2$$

$$I_y = 337\,cm^4$$

Her alanın merkezsel ekseni simetri ekseni

Olduğundan, her alanın merkezi eksenlere

göre atalet çarpanı sıfırdır.

$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} = 0 + (10\,cm)^2(5\,cm)(0,5\,cm)$$

$$+0 + (11cm^2)(0,5cm)(6,5\,cm)$$

$$I_{xy} = 60,75\,cm^4$$

Bu değerleri

$$\mathrm{I}_{\mathrm{mak,min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

formülünde yazarsak

$$\mathrm{I}_{\mathrm{mak,min}} = \frac{579 + 337}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{579 - 337}{2}\right)^2 + (60,75)^2}$$

$\mathrm{I}_{\mathrm{mak}} = 593,4\,cm^4$ ve $\mathrm{I}_{\mathrm{min}} = 332,6\,cm^4$

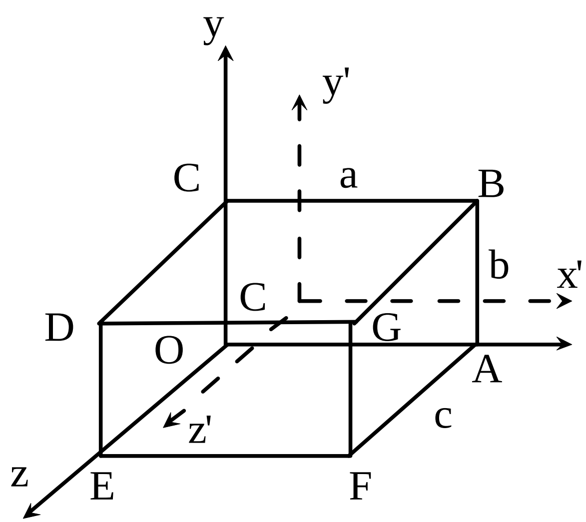
$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2160,75}{579 - 337} = 0,502$$

$2\theta_p = \arctan(0,502) \Rightarrow \theta_p = 13,3^\circ$ veya $2\theta_p = -153,3^\circ$ ve $\theta_p = -76,7^\circ$ bulunur.

θ saat yönünde ölçülür (I_x eksenine göre).

X ekseninin 13,3^o dönmesi maksimum asal atalet eksenini ve aynı derece kadar y nin dönmesi de minimum atalet momentini verir.

Problem 6.8: Şekildeki vagon yoğunluğu ρ olan homojen bir dikdörtgen prizmadır. Vagonun kütle atalet momentini x, AB ve OF'e göre hesaplayınız. Bilinen sonuçları kullanınız.



Çözüm:

$$I_x = I_{x1} + md_1^2$$

d_1 : x ile x' arasındaki uzaklık

$$I_{x'} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) + m\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2) + \frac{m}{4}(b^2 + c^2) = \frac{m}{3}(b^2 + c^2)$$

Benzer şekilde AB için;

$$\mathrm{I}_{\mathrm{AB}} = I_{y'} + md_2^2$$

$$I_{y'} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2) + m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

$$I_{AB} = \frac{m}{3}(a^2 + c^2)$$

ve OF doğrusu (Köşegeni için)

$$I_d = I_x n_x^2 + I_y n_y^2 + I_z n_z^2 - 2I_{xy}A_xA_y - 2I_{yz}A_yA_z - 2I_{xz}A_xA_z$$

I_x belli; $I_y = I_{AB} = \dfrac{m}{3}(a^2 + c^2)$

$$I_z = I_{z'} + md_3^2 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) + m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$I_z = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + mdxdy = 0 + m\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{mab}{4}$$

burada dx; x' den x e dik uzaklık

$$\mathrm{I}_{\mathrm{yz}} = I_{y'z'} + mdydz = 0 + m\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{c}{2}\right) = \frac{mbc}{4}$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{xz}} = I_{x'z'} + mdxdz = 0 + m\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{c}{2}\right) = \frac{mac}{4}$$

$I_{x'y'} = I_{y'z'} = I_{x'z'} = 0$ çünkü cisim x', y', z' eksenlerine göre simetriktir.

OF doğrusunun birim vektörü

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{OF}}{|\mathbf{OF}|} = \frac{a\mathbf{i} + \mathrm{c}\mathbf{k}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + c^2}} \Rightarrow n_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, n_y = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

bulunur. Böylece

$$I_{OF} = I_d = \frac{m}{3}(b^2 + c^2)\left(\frac{c^2}{a^2 + c^2}\right) + \frac{m}{3}(a^2 + c^2)(0)$$

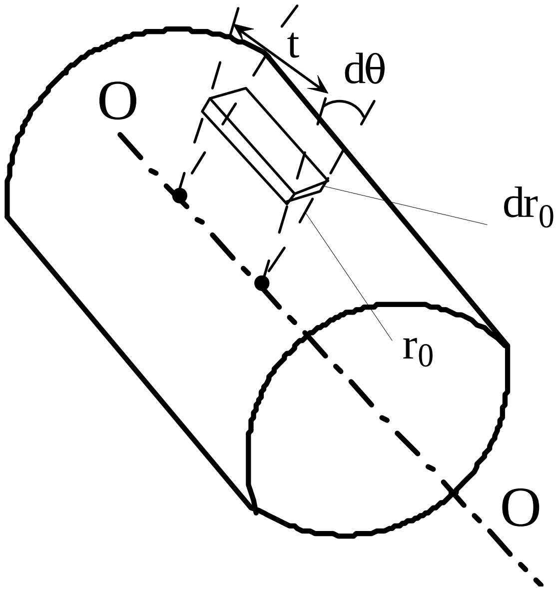
$$+\frac{m}{3}(a^2 + b^2)\left(\frac{c^2}{a^2 + c^2}\right) - 2\left(\frac{mab}{4}\right)(0) - 2\left(\frac{mbc}{4}\right)(0) - 2\left(\frac{mac}{4}\right)\left(\frac{ac}{a^2 + c^2}\right)$$

$$I_{OF} = \frac{m}{3}\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2}{a^2 + c^2}\right) + \frac{m}{b}\left(\frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}\right)$$

$$I_{OF} = I_d = \frac{m}{6}\left(2b^2 + \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}\right)$$

Problem 9: m kütleli, r yarıçaplı dik silindirin O-O eksenine göre atalet momentini ve atalet yarıçapını bulunuz.

Çözüm:



Kütle elemanı

$$\rho dV = \rho t r_0 dr_0 d\theta$$

$\rho =$ yoğunluk

$$\mathrm{I}_{\text{O-O}} = I = \int r_0^2 dm$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r_0^2(\rho t r_0) dr_0 d\theta = \rho t \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r_0^3 dr_0 d\theta$$

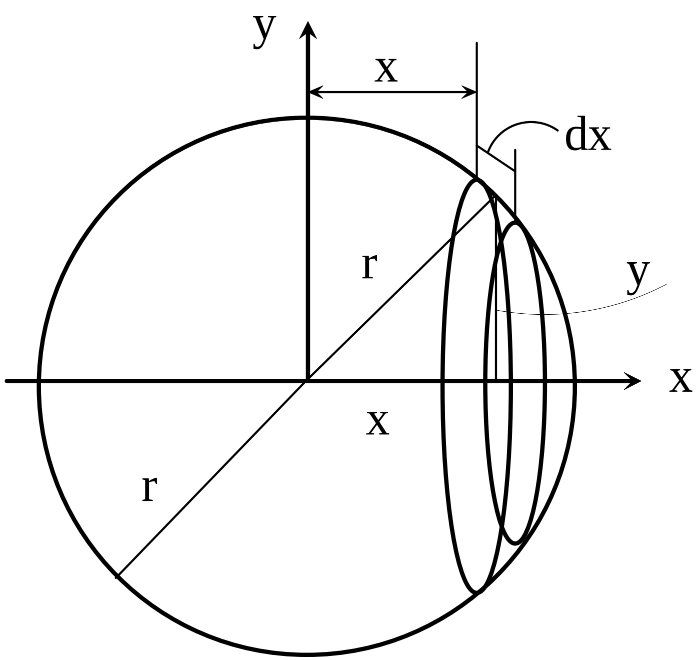
$$I = \rho t 2\pi \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^{\mathrm{r}} = \frac{\rho t \pi r^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho \pi r^2) r^2$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \quad \textit{cevap}$$

Atalet yarıçapı $k=\sqrt{\frac{I}{m}}$ $\quad k=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mr^2}{m}}=\frac{r}{\sqrt{2}}$ *cevap*

Problem 10 : r yarıçaplı dolu bir kürenin (homojen) bir çapına göre atalet momentini ve atalet yarıçapını hesaplayınız.

Çözüm :



Yarıçapı y ve kalınlığı dx olan küre kesitini alalım. 9. problemden bu elemansel (silindirin) atalet momenti

$$dI_{xx}=\frac{1}{2}(dm)y^2=\frac{1}{2}(\pi\rho y^2 dx)y^2$$

$$dI_{xx}=\frac{\rho\pi}{2}(r^2-x^2)dx,\ \ \rho=sbt.$$

Toplam moment

$$I_{xx} = \int dI_{xx} = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-r}^{+r}(r^2 - x^2)dx$$

$$I_{xx} = \frac{8}{15}\pi\rho r^5 = \frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)r^2$$

$$I_{xx} = \frac{2}{5}mr^2 \quad Cevap$$

Atalet yarıçapı k= $\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{m}}}$ $\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}mr^2}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}}r \quad cevap$

Problem 6.11: m kütleli dikdörtgen prizmanın merkezi x_0 ve z eksenlerine göre ve prizmanın bir ucundaki x eksenine göre atalet momentini bulunuz.

Çözüm: