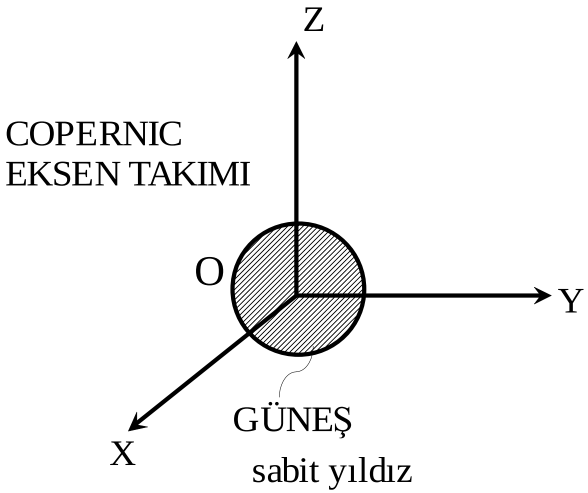
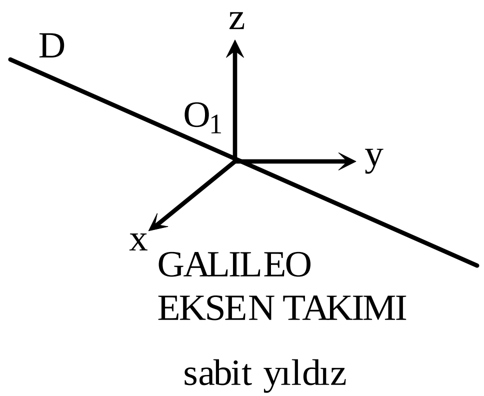
3.14 Bağıl Hareket

Bu ana kadar Newton'un ikinci kanununu, enerji-iş eşitliklerini ve impuls-momentum eşitliklerini, sabit bir eksen takımına göre uyguladık. Gerçekte hiç bir eksen takımı ise gerçekte sabit değidir, sabite en yaklaştığımız durum astronomik referans sisteminde eksen takımlarını bir takım yıldızlara iliştirmemizdir. Eğer güneşi sabit kabul edersek dünyanın merkezi 0.00593 m/s^2, eğer dünyanın merkezini sabit kabul edersek ekvatorda deniz seviyesindeki bir cismin 0.0339 m/s^2 bir ivmesi vardır. Fakat 0.00593 m/s^2 ve 0.0339 m/s^2 ivmeleri **g** diğer mühendislik uygulamalarındaki ivmelere nazaran çok daha küçük olduğundan dünyaya bağlı bir eksen takımı sabit bir eksen takımına denktir.

Mekaniğin prensipleri GALILEO eksen takımında geçerlidir.





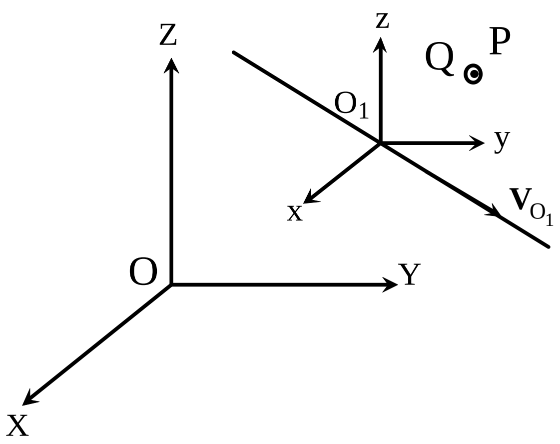
$$\left(\frac{O_1xyz}{OXYZ}\right) = \text{Düzgün Doğrusal Öteleme}$$

O_1'in yörüngesi bir Doğru olacak

$$\mathbf{V}_{O_1} = \text{sabit} \qquad \mathbf{a}_{O_1} = 0 \quad \text{Düzgün doğrusal harekette ivme}$$

Sonsuz sayıda GALILEO eksen takımı vardır. Yere bağlı bir eksen takımı GALILEO eksen takımı değildir. Çünkü yer (dünya) güneşe göre düzgün doğrusal bir öteleme yapmaz. Buna rağmen, sapmalar oldukça küçük olduğundan YERE BAĞLI EKSEN TAKIMLARINI GALILEO EKSEN TAKIMI OLARAK ALIRIZ.

Teorem : Galileo eksen takımlarında bir maddesel cismin ivmesi AYNIDIR.



$$\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{OXYZ}}\right) = \text{Mutlak hareket}$$

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{O_1xyz}}\right) = \text{Bağıl (izafi) hareket}$$

$$\left(\frac{\mathrm{Oxyz}}{\mathrm{O_1XYZ}}\right) = \text{Sürüklenme hareketi}$$

(Düzgün değişen bir öteleme)

$\mathbf{a}_\mathrm{m}$ = mutlak ivme, $\mathbf{a}_\mathrm{b}$ = bağıl ivme, $\mathbf{a}_\mathrm{s}$ = sürüklenme ivmesi

$\mathbf{a}_\mathrm{m} = \mathbf{a}_\mathrm{b} + \mathbf{a}_\mathrm{s} + \underbrace{2\omega \times \mathbf{a}_\mathrm{b}}_{\mathbf{a}_\mathrm{c}=1}$ 'dir. (ispatı ileride verilecek)

$$\omega = 0 \Rightarrow a_c = 0$$

$a_S = a_P = a_Q = a_{O_1} = 0$ Düzgün doğrusal öteleme

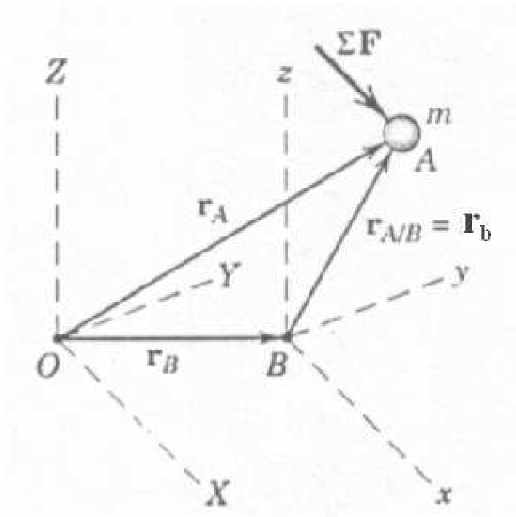
$\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_b$ Bütün eksen takımlarında ivme aynıdır.

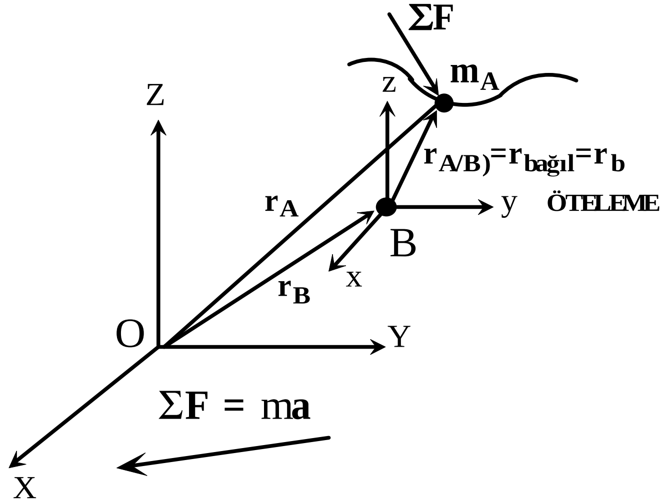
$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_b$ alınabilir.

Yani yere bağlı eksen takımını Galileo eksen takımı olarak alabiliriz. Buna sabit yada Atalet eksen takımı da denir.

a) Bağıl-Hareket Denklemi

Şimdi **m** kütlesindeki bir noktasal cismin hareketli x-y-z ve sabit X-Y-Z eksen takımına göre hareketini inceleyelim. x-y-x eksen takımı sabit X-Y-Z eksen takımına göre öteleme hareketi yapsın,





$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_b$$

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{A/B} = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_b, \ \ \Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_A$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_b$$

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_A = m(\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_b)$$ Newton'un Hareket Denklemi

NOT: $\Sigma \mathbf{F} \neq m\mathbf{a}_{bağ}$ olduğundan, Newton'un hareket denklemi herhangi bir ivmeli sisteme göre geçersizdir.

b) Sabit Hız İle Ötelenen Sistemler

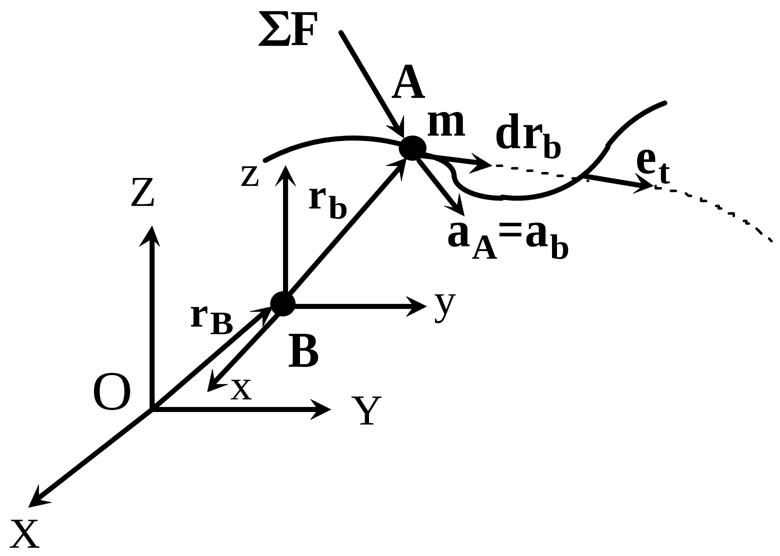
Yukarıdaki şekilde eğer x-y-z sistemi X-Y-Z'e göre sabit hızla öteleme yapıyorsa sistemin $\boxed{\mathbf{B}}$ orijin ivmesi SIFIR olur. Buna göre hareket denklemi ($\mathbf{a}_B = 0$) $\boxed{\mathbf{A}}$
$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{A/B} = m\mathbf{a}_{bağ} = m\mathbf{a}_b$ olur. Yani Newton'un Hareket yasası sabit hızla hareket eden sistemlerde geçerlidir. $\boxed{\mathbf{I}}$

3.15 SABİT HIZLA ÖTELEME YAPAN EKSENLERDE İŞ-ENERJİ VE İMPULS-MOMENTUM

Sabit hızla öteleme yapan eksenlere bağıl harekette iş: (x,y,z) sabit hız ile öteleme yapıyor.

$\mathbf{V}_B = \dot{\mathbf{r}}_B \quad (X, Y, Z\text{'e göre})$

$\Sigma\mathbf{F}$'nin (x,y,z)'e göre elemansel işi



$$dU_b = \Sigma\mathbf{F}.d\mathbf{r}_b; \Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_A = m\mathbf{a}_b \text{ idi}$$

($\mathbf{a}_B$=0 olduğundan)

$$\mathbf{a}_t = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt} = V\frac{dV}{ds}$$

$$\mathbf{a}_t = V\frac{dV}{ds}\mathbf{e}_t = \mathbf{a}_b$$

$$d\mathbf{r} = ds\mathbf{e}_t$$

$$dU_b = m\mathbf{a}_b d\mathbf{r}_b = m\left(V\frac{dV}{ds}\mathbf{e}_t \right).\left(ds\,\mathbf{e}_t \right)$$

$$dU_b = mV\frac{dV}{ds}ds = mVdV = mV_b dV_b$$

$dU_b = d\left(\frac{1}{2}mV_b^2 \right)$ elde edilir.

x, y, z'e göre kinetik enerji $T_{bağ} = T_b = \frac{1}{2}mV_b^2$ dir. O halde

$dU_b = dT_b$ veya $U_{bağ} = U_b = \Delta T_{bağ} = \Delta T_b$ bulunur.

Yani bu özel hareketle İŞ-ENERJİ denklemi sağlanır. $\boxed{\textbf{II}}$

3.16 IMPULS VE MOMENTUM

x-y-z'e göre m maddesel cisminin impulsu dt boyunca

$\Sigma \mathbf{F} dt = m\mathbf{a_A} dt = m\mathbf{a}_b dt$ yazılır. $\mathbf{a}_b = \dfrac{dV_b}{dt}$ idi

$\Sigma \mathbf{F} dt = m\dfrac{d\mathbf{V_b}}{dt} dt = md\mathbf{V_b}$ elde edilir. $\Sigma \mathbf{F} dt = d(mV_b)$ m=sb.

$\mathbf{G_{bağıl}} = \mathbf{G_b} = m\mathbf{V_b}$ şeklinde tanımlanır. İmpulsta yazarsak

$\Sigma \mathbf{F} dt = d(m\mathbf{V_b}) = d\mathbf{G_b}$ veya $\int \Sigma \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{G_b}$ elde edilir.

$\boxed{\textbf{III}}$ Sonuç: Sabit referans sistemine göre yazılan impuls-momentum bağıntısı sabit hız ile öteleme yapan eksenlere göre de geçerlidir.

3.17 HAREKET MOMENTİ (AÇISAL MOMENTUM)

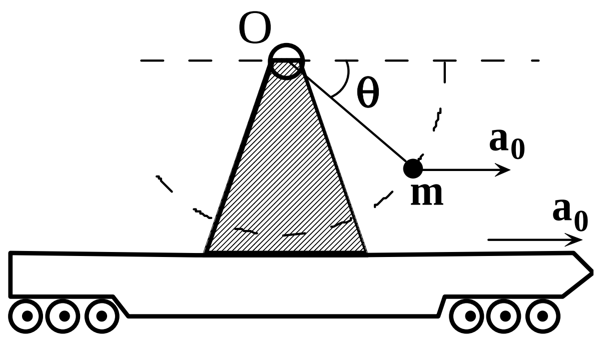
B orijinli x-y-z'e göre AÇISAL MOMENTUM,

$\mathbf{H}_{\mathbf{bağıl}} = \mathbf{H}_{\mathbf{b}} = \mathbf{r}_{\mathbf{b}} \times \mathbf{G}_{\mathbf{b}}$ şeklindedir.

Zamana göre türevi : $\dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{b}} \times \mathbf{G}_{\mathbf{b}} + \mathbf{r}_{\mathbf{b}} \times \dot{\mathbf{G}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \dot{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}} = \Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{B}}$ elde edilir.

$\boxed{\mathbf{IV}}$ Sonuç: MOMENT-AÇISAL Momentum bağıntısı sabit hızla öteleme yapan sistemler için de geçerlidir.

Problem 3/28: Şekildeki basit sarkaç $\mathbf{a_O}$ sabit ivmesi ile hareket eden arabaya monte edilmiştir. $\theta = 0$ konumundan serbest bırakılan sarkacın ipindeki T gerilmesini bulunuz. $\theta = \pi/2$ ve π için T'yi elde ediniz.

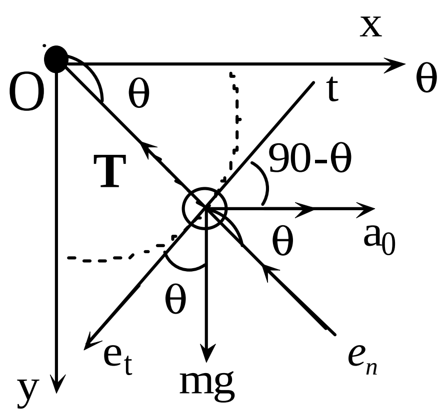


Çözüm 3/28:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{mut.ivme}} = \mathbf{a}_{\mathbf{O}} + \mathbf{a}_{\mathbf{bağ}}$$

$\mathbf{a}_{\mathbf{bağ}}$ ivmesi arabayla beraber hareket eden bir gözlemciye göre ivmedir.

$$\mathbf{a}_{\mathbf{bağ}} = \mathbf{a}_{\mathbf{b}} = a_t \mathbf{e}_{\mathbf{t}} + a_n \mathbf{e}_{\mathbf{n}}, \; a_t = r\ddot{\theta}, \; a_n = r\dot{\theta}^2 \text{ idi.}$$



$$\Sigma F_t = ma_t \;\Rightarrow\; mg\cos\theta = m(r\ddot{\theta} - a_O\sin\theta)$$

$$r\ddot{\theta} = g\cos\theta + a_O\sin\theta$$

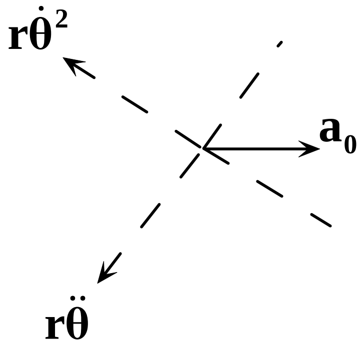
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r}(g\cos\theta + a_O \sin\theta)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{r}(g\cos\theta + a_O \sin\theta)$$

$$\dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{1}{r}(g\cos\theta + a_O \sin\theta)d\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_0^{\theta}\frac{1}{r}(g\cos\theta + a_O \sin\theta)\, d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{r}[g\sin\theta + a_O(1-\cos\theta)]$$



$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\ddot{\theta}d\theta = \dot{\theta}d\dot{\theta}$$

$$r\dot{\theta}^2 = 2[g\sin\theta + a_O(1-\cos\theta)]$$

$$n: \Sigma \mathbf{F_n} = ma_n \quad \Rightarrow T\text{-}mg\,sin\theta = m(r\dot{\theta}^2\text{-}a_0\cos\theta) \Rightarrow$$

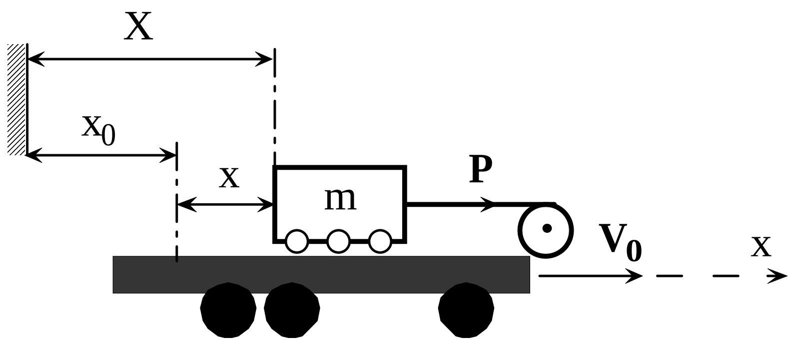
$$T\text{-}mg\sin\theta = m[2g\sin\theta + 2a_0(1\text{-}\cos\theta)\text{-}a_0\cos\theta]$$

$$T = m[3g\sin\theta + a_0(2-3\cos\theta)] \text{ bulunur.} \quad \textit{Cevap}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ için} \quad T_{\pi/2} = m[3g(1)+a_0(2-0)] = m(3g+200) \quad \textit{Cevap}$$

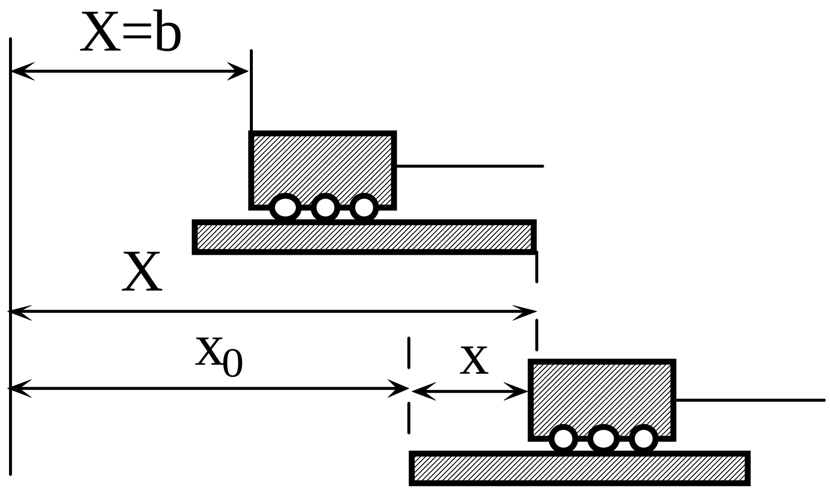
$$\theta = \pi \text{ için } T_\pi = m[3g(0) + a_0(2\text{-}3\{\text{-}1\})] = 5ma_0 \ \textit{Cevap}$$

Problem 3/29: Şekildeki düzlemsel araç V_0 sabit hızı ile hareket etmektedir. M kütleli vagon, bir vinç ile sürtünmesiz olarak çekilmekte ve halattaki gerilme $\mathbf{p} = sbt$ ile gösterilmektedir. Vagon x=0 konumundan araca göre harekete başladığı anda $x=x_0=b$ dir. İş-Enerji denklemini araçtaki bir gözlemciye uygulayınız ve ikinci olarak da yerdeki bir gözlemciye göre uygulayınız. Her iki incelemenin birbirine uygunluğunu görünüz.



Çözüm 3/29: ARADAKİ GÖZLEMCİYE GÖRE:

Sadece **p** iş yapar.



$$U_{bağ} = \int_0^x p\,dx = p\,x, \;\; p = sbt$$

kinetik enerji değişimi

$$\Delta T_{bağ} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 \text{-} 0) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$ İş-Enerji denklemi

$$U_{bağ} \equiv \Delta T_{bağ} \Rightarrow px = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \boxed{1}$$

YERDEKİ GÖZLEMCİYE GÖRE: **p** nin işi $U = \int_{b}^{X} p\,dX = pX\Big|_b^x$

$U = p(X\text{-}b)$ elde edilir. Kinetik enerji değişimi $\Delta T = \frac{1}{2} m(\dot{X}^2 \text{-} V_0^2)$ $\boxed{2}$

Bu son denklemi hareketli gözlemciye göre yeniden ele almak için

$X = x_0 + x \quad \Rightarrow \dot{X} = v_0 + \dot{x} \quad ; \quad \ddot{X} = \ddot{x}$ değişimlerini kullanalım.

$\boxed{2} \Rightarrow U = P(X\text{-}b) = P(x_0 + x\text{-}b) = px + p(x_0\text{-}b)$

$\boxed{1} \Rightarrow px = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \Rightarrow p\dot{x} = \frac{2}{2} m\dot{x}\ddot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow p = m\ddot{x}$ bulunur. Şekilden

aracın yer değiştirmesi $x_0 - b = v_0 t$ yazılır.

$U = px + (m\ddot{x})(v_0 t) = px + mv_0\ddot{x}t$ bulunur.

$\mathbf{F} = \mathbf{p} = \text{sabit} \Rightarrow \Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \text{sabit}$ olur.

$\ddot{x} = a = \text{sb.} \Rightarrow \dot{x} = at + c_1,\ t = 0 \text{ da } \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 = 0 + c_1 \quad c_1 = 0$

$\dot{x} = at = \ddot{x}t$ elde edilir.

$\boxed{1} \Rightarrow m\dot{x}^2 = 2px \quad \Rightarrow \dot{x}^2 = \dfrac{2p\,x}{m}$ yazılır.

$\boxed{2}$ nin sağ tarafı : $p(X\text{-}b) = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 \text{-} v_0^2) = \dfrac{1}{2}m[(\dot{x} + v_0)^2 \text{-} v_0^2]$

$p(X\text{-}b) = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}v_0 + v_0^2 \text{-} v_0^2) = \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2v_0\dot{x})$ yazılır.

Sabit gözlemciye göre İŞ-ENERJİ yeniden yazılırsa $U = px + mv_0\dot{x} = mv_0\dot{x} + \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{2px}{m}\right)$

$px + mv_0\dot{x} = mv_0\dot{x} + px$ sağlanır. Yani;

$U - U_{\text{bağ}} = T - T_{\text{bağ}} = mv_0\dot{x}$