Gradient

Bir f(x, y) fonksiyonu ile tanımlı skaler alanı uzayda düşünelim. Biz biliyoruz ki bu fonksiyonun birinci kısmi türevi, o fonksiyonun belli koordinat eksenleri doğrultusunda, o fonksiyondaki değişim oranlarını verecektir. Örneğin ısı gradyanı bir vektördür ve skaler sıcaklığın türevi ile elde edilir.

$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}$; "***nabla***" ; *Vektörel türev operatörüdür.*

$$\vec{\nabla}.f = \mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}$$

Divergence

$$\vec{\nabla}.f = \mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial f}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}$$

V(x, y, z) sürekli türevi alınabilir bir vektör fonksiyon ise ve bileşenleri ***V(u, v, w) ise,***

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathrm{V}} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}$$

fonksiyonu uzayda V ile tanımlanan vektör alanının diverjansı olarak tanımlanır.

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathrm{V}} = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{V}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}\right).\left(\mathrm{u}\vec{\mathrm{i}}+\mathrm{v}\vec{\mathrm{j}}+\mathrm{w}\vec{\mathrm{k}}\right) = \left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}\right)$$

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathrm{V}} = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{V}} = \mathbf{div}\,(\mathbf{grad}\ f) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{z}^2}$$

$$\mathbf{div}\,(\mathbf{grad}\ f) = \nabla^2 f$$

Son ifade ***f*** skaler fonksiyonunun *Laplasyen* idir.

Rotasyonel

V(x, y, z)= $\mathrm{u}\vec{\mathbf{i}}+\mathrm{v}\vec{\mathbf{j}}+\mathrm{w}\vec{\mathbf{k}}$ vektör fonksiyonu ise;

$$curl\,\vec{\mathrm{V}} = (\nabla x\vec{V}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{i}}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{j}}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{k}}$$

tanımlanan vektör fonksiyonunun rotasyonelidir.

- *Bir vektörel fonksiyon, bir skaler fonksiyonun gradient i ise, onun rotasyoneli sıfırdır. Bu da pratikte **potansiyel** yani **çevrintisiz** akımda karşımıza çıkar.*
- *Bir vektör alanını tanımlayan bir vektör fonksiyonu, bir skaler fonksiyonun gradyenti ise, bu alan "conservative= korunumlu" dir. Çünkü akışkan parçacığının **P**$_1$ den **P**$_2$'e gitmesi için yapacağı iş yola bağlı değildir.*

FLUX İntegral

$$\iint_S \mathrm{F.n.dA}$$

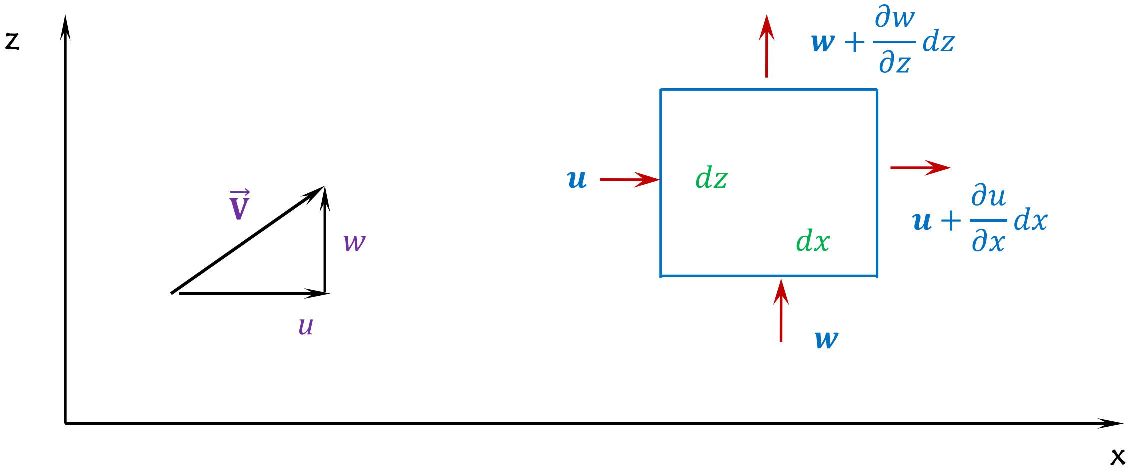
F vektör fonksiyonun S eğrisi üzerindeki yüzey integralidir. S yüzeyinden birim zamanda geçen akışkan kütlesini (kg/s) verir.

Laplace diferansiyel denkleminin çözümü ile uğraşan teoriye;

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{z}^2}$$

POTANSİYEL teori denir.

*Sürekli ve tanımlı ikinci mertebe türevleri olan ve $\nabla^2 f$ denkleminin çözümü olan fonksiyonlara "**HARMONİK** fonksiyon"lar denir.*



$$\mathrm{u.dz + w.dx} = \left(\mathrm{u} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx}\right)\mathrm{dz} + \left(\mathrm{w} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}\right)\mathrm{dx}$$

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathrm{V}} = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{V}} = 0$$

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{V}} = \vec{\nabla}.\vec{\mathrm{V}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{k}}\right).\left(\mathrm{u}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{w}\vec{\mathrm{k}}\right) = \left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}\right) = \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \mathrm{z}^2}$$

Hareket denklemi;

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = K_x - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial x}\right) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = K_y - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial y}\right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = K_z - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial z}\right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Viskoz kuvvetler sıfır yani akışkan ideal ise $\tau_{ij} = 0$ olur.

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Bu durumda hareket denklemi EULER denklemlerine dönüşür.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = K_x - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial x}\right)$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = K_y - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial y}\right)$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = K_z - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial z}\right)$$

Viskoz kuvvetler sıcaklık grandienti, Tabakalaşma, Non-lineer etkiler ihmal edilebildiği durumlarda akım çevrintisiz olacakıtr. Rotasyonel tanımında iki boyutlu akım için;

curl (grad f) $= \nabla x(\vec{\nabla}.f) = 0$ için $\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$ olur.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = K_x - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}+\frac{w^2}{2}\right)}{\partial x} = K_x - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left(u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = K_z - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial z}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}+\frac{w^2}{2}\right)}{\partial z} = K_z - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial þ}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{þ}{\rho} + K_x\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2)\right] = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{þ}{\rho} + K_z\right)$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = -\frac{þ}{\rho} - K_x + C_1(z,t)$$
$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) = -\frac{þ}{\rho} - K_z + C_2(x,t)$$

$C_1(z,t) = C_2(x,t)$

Sınır Koşulları

Kinematik Taban Şartı;

Taban yakınlarındaki akım tabana paraleldir. Taban geçirimsizdir.

$$w = 0$$
$$\frac{\partial \emptyset}{\partial z} = 0$$
$$z = -h$$

Kinematik Serbest Su Yüzeyi Şartı;

Başlangıçta serbest su yüzeyinde olan su zerreciği hep orada kalır.

$$z = \eta(x, t)$$

$$dz = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt$$

Eğer vir akışkan zerresi başlangıçtan ***dt*** *zaman sonra tekrar yüzeyde olacaksa,*

$dz = \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ *' i sağlamaktadır.*

$dx = u.dt$ *ve* $dz = w.dt$

$(w.dt) = \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta}{\partial x}(u.dt)$ *denklemin her iki tarafı* ***dt*** *'e bölünürse;*

$$z = \eta$$
$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$w = \eta_t + u.\eta_x$$
$$\emptyset_z = \eta_t + u.\eta_x$$

Dinamik Serbest Su Yüzeyi Şartı

- *Serbest su yüzeyi boyunca basınç sabit olmalı.*
- *Rüzgar etkisi yok.*

$$þ = 0$$

$$z = \eta$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g.\eta = 0$$

Kabuller

1) *Su derinliği (d) ve dalga periyodu (T) sabittir.*
2) *İki boyutlu hareket*
3) *Dalgalar ilerlerken formları bozulmuyor.*
4) *Akışkan sıkışmazdır.*
5) *Viskozite, türbülans ve yüzeysel gerilme etkileri yoktur.*

6) *H dalga yüksekliği L dalga boyuna göre küçüktür.*

Serbest su yüzeyinde yazılan sınır koşulları non-lineer olduğu için ve su yüzeyinin kendisi bir bilinmeyen olduğu için, denklemin daha da sadeleştirilmesi gerekmektedir.

Sınır Koşulları

Kinematik Taban Şartı	$\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = \emptyset_z = 0$		$z = -h$
Kinematik Serbest Su Yüzeyi Şartı	$\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t}$	$\emptyset_z - \eta_t = 0$	$z = 0$
Dinamik Serbest Su Yüzeyi Şartı	$\frac{\partial\emptyset}{\partial t} + g.\eta = 0$	$\emptyset_t \frac{1}{g} + \eta = 0$	$z = 0$
Periyodiklik Koşulu	$\emptyset_x(L,z,t) = \emptyset_x(0,z,t)$		

Başlangıçta yapılan kabuller ile bu olayı tarif eden denklemin Laplace diferansiyel denklemi olduğu ortaya çıkacaktır.

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2}$$

$$0 \le x \le L$$
$$-h \le z \le 0$$

Olayı tarifleyen temel denklemde η *olmadığı için serbest yüzeyde yazılan sınır koşullarından* η *elimine edilmelidir (ortak çözülerek).*

$\emptyset_z - \eta_t = 0$; *Kinematik Serbest Su Yüzeyi Şartı*

$\eta + \frac{1}{g}\emptyset_t = 0$; *Dinamik Serbest Su Yüzeyi Şartı ;* ***t*** *'e türetilerek* $\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{1}{g}\emptyset_{tt} = 0$

$\emptyset_z + \frac{1}{g}\emptyset_{tt} = 0$ *; Kombine Serbest Su Yüzeyi Şartı*

Dalga Profili

Dalga periyodu ve dalga boyu sabit bir değerdir. Bu nedenle,

$$\eta(0,0) = \eta(x_o, t_o)$$

$\mathbf{\frac{x_o}{t_o} = c}$, $\mathbf{c = \frac{L}{T}}$, $\mathbf{\frac{t_o}{T} - \frac{x_o}{L} = 0}$, $\boldsymbol{\theta = 2\pi\left(\frac{t_o}{T} - \frac{x_o}{L}\right)}$

$\eta(x,t)$, $\phi(x,z,t)$ ve $\eta(\theta)$, $\phi(\theta,z)$

Sınır koşulları ile esas denklemde üç bilinmeyen var. İki bilinmeyene indirildi. Ancak denklemlerden x ve t 'yi yok etmek için koordinat değişimi yapmak gerekiyor.

$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = \frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}.\frac{\partial\theta}{\partial x} = \emptyset_\theta\left(-\frac{2\pi}{L}\right)$	$\frac{\partial\emptyset}{\partial t} = \frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}.\frac{\partial\theta}{\partial t} = \emptyset_\theta\left(\frac{2\pi}{T}\right)$
$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} = \emptyset_{\theta\theta}\left(-\frac{2\pi}{L}\right)^2 = k^2\emptyset_{\theta\theta}$	$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial t^2} = \emptyset_{\theta\theta}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega^2\emptyset_{\theta\theta}$

Bu son durum için denklemlerimiz,

LAPLACE DENKLEMİ

$$k^2\emptyset_{\theta\theta} + \emptyset_{zz} = 0$$

Kinematik taban şartı , $\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = 0$ *ve* $z = -h$

Kombine serbest su yüzeyi şartı,
$\emptyset_z + \frac{\omega^2}{g}\emptyset_{\theta\theta} = 0$; *z=0*

Periyodiklik şartı

$$\emptyset_\theta(0,z) = \emptyset_\theta(2\pi,z)$$

$$\theta = \omega t - kx$$

Bu kısımda ise elimizde olan diferansiyel denklemin çözümü ile ilgileneceğiz. Kullanacağımız yöntem "değişkenlere ayırma",

$\phi(\theta,z)$, ***Harmonik Fonksiyonlar***

$$\phi(\theta,z) = f(\theta).Z(z)$$

$\frac{\partial\emptyset}{\partial\theta} = f'.z$	$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial\theta^2} = f''.z$	*LAPLACE'da yerine konursa*
$\frac{\partial\emptyset}{\partial z} = f.z'$	$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2} = f.z''$	
$-k^2\frac{f''}{f} = \frac{z''}{z}$		

f yalnızca θ *'a bağımlı iken* $\mathbb{Z}$ *yalnızca* z *'ye bağımlıdır.* θ *ve* z *değeri için bu iki ifadenin eşit çıkması için aynı katsayıya olmaları gerekir. Örneğin* λ^2

$\mathrm{f}'' + \frac{\lambda^2}{\mathrm{k}^2}\mathrm{f} = 0$ ve $\mathrm{z}'' - \lambda^2.\mathrm{z} = 0$

$\mathbf{f}'' + \frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{\mathbf{k}^2}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ **çözümü**

$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = \mathrm{r}^2$ f=1	$\mathrm{r}^2 + \frac{\lambda^2}{\mathrm{k}^2} = 0$	$\Delta = 0 - 4.1\frac{\lambda^2}{\mathrm{k}^2} < 0$ *Eşlenik komleks kök çifti*
$r_{1,2} = \frac{0}{2.1} - \frac{0}{1.2}\sqrt{0 - 4.1\frac{\lambda^2}{\mathrm{k}^2}} = \pm\frac{\lambda}{k}i$		$\alpha = \pm\beta i$
Genel Çözüm		
$\mathrm{f} = \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1\theta} + \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{\mathrm{r}_2\theta}$		$\mathrm{f} = \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)} + \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)}$
Euler formülü	$\mathrm{e}^{\beta ix} = \cos(\beta x) + \mathrm{i}.\sin(\beta x)$ $\mathrm{e}^{-\beta ix} = \cos(\beta x) - \mathrm{i}.\sin(\beta x)$	$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}[\mathrm{C}_1\cos(\beta x) + \mathrm{C}_2\sin(\beta x)]$

Bizim denklemimizde $\alpha = 0$

$$\mathrm{f} = \mathrm{A}_1\cos\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) + \mathrm{A}_2\sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right)$$
$$\mathrm{f} = \mathrm{A}.\sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta + \delta\right)$$
$$\mathbb{Z}'' - \lambda^2.\mathbb{Z} = 0$$

$\frac{d^2\mathbb{Z}}{dz^2} = r^2$; $r^2 - \lambda^2 = 0$

$\mathbb{Z} = 1$; $\Delta = 1 + 4.1.1 > 0$

$\mathbb{Z}$ ve f ayrı ayrı çözülerek $\phi(\theta, z)$ harmonik fonksiyonu bulunur.

$$\mathrm{f} = \mathrm{A}.\sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta + \delta\right)$$
$$\mathbb{Z} = \mathrm{B}.\cosh(\lambda.\mathrm{z}) + sinh(\lambda.\mathrm{z})$$

Buradaki A, B ve C integral sabitleri olup **λ** ile birlikte değerlendirilecektir (*sınır koşulları ile*).

İlk sınır koşulumuz olarak periyodikliği kullanırsak $\mathrm{f}'(0) = \mathrm{f}'(2\pi) \leftarrow \emptyset_\theta$

$\frac{\lambda}{k} = 1$ veya $\lambda = k$ olmalı, x ve t 'nin merkezini seçerek $\delta = 0$

Taban şartını kullanarak

$\frac{\partial \emptyset}{\partial z} = 0$; $\mathbb{Z}' = 0$; $z = -h$

$$\mathbb{Z}' = \mathrm{B.k.\sinh(-kh) + C.k.\cosh(-kh)} = 0$$

$$\mathrm{B = C.\coth(kh)}$$

$$\mathbb{Z} = \mathrm{C\,(\coth(kh)\,.\cosh(kz) + \sinh(kz))}$$

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{\sinh(kh)}}\,\mathrm{(\cosh(kh)\,.\cosh(kz) + \sinh(kh)\,.\sinh(kz))}$$

$$\mathbb{Z} = \mathrm{C}\frac{\mathrm{\cosh[k(z+h)]}}{\mathrm{\sinh(kh)}}$$

$$\mathrm{f = A.}\sin\theta$$

$$\phi(\theta,z) = f(\theta).\mathbb{Z}(z)$$

$$\phi = A.C.\left(\frac{\mathrm{\cosh[k(z+h)]}}{\mathrm{\sinh(kh)}}\right).\sin\theta$$

Kombine serbest su yüzeyi şartınıda kullanırsak;

$$\phi_z = A.C.k\left(\frac{\mathrm{\sinh[k(z+h)]}}{\mathrm{\sinh(kh)}}\right).\sin\theta$$

$$\phi_{tt} = -A.C.\omega^2\left(\frac{\mathrm{\cosh[k(z+h)]}}{\mathrm{\sinh(kh)}}\right).\sin\theta$$

$$A.C.k\left(\frac{\mathrm{\sinh[k(z+h)]}}{\mathrm{\sinh(kh)}}\right).\sin\theta - \frac{1}{g}A.C.\omega^2\left(\frac{\mathrm{\cosh[k(z+h)]}}{\mathrm{\sinh(kh)}}\right).\sin\theta = 0$$

$$\mathrm{k.\sinh[k(z+h)]} - \frac{\omega^2}{g}\mathrm{\cosh[k(z+h)]} = 0$$

$$\frac{\omega^2}{g.k} = \tanh(z+h)$$

z=0 için;

$$\omega^2 = g.k\tanh(kh)$$

$$c^2 = \frac{g}{k}.\tanh(kh)$$

$$c = \sqrt{\frac{g.L}{2\pi}.\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

$$\eta = -\frac{1}{gk}\phi_t = -AC\frac{\omega}{g}\coth(kh)\cos\theta$$

$$\eta = -\frac{AC}{c}\cos\theta$$

cos θ en fazla [0,1] ; $\left(\frac{AC}{c}\right) = \frac{H}{2} = a$

$$\eta = a.\cos\theta = \frac{H}{2}\cos(\omega t - kx)$$

$$\phi = -\frac{H.c}{2}.\left(\frac{\cosh[\mathrm{k(z+h)}]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right) sin(\omega t - kx)$$

ya da

$$\phi = \frac{H.c}{2}.\left(\frac{\cosh[\mathrm{k(z+h)}]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right) sin(kx - \omega t)$$

$$c = \sqrt{\frac{g.L}{2\pi}.\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}.\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

$\boldsymbol{d \geq L/2}$ ***derin su*** **;**

$\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \to 1$; $L_o = \frac{gT^2}{2\pi}$; $c_o = \frac{gT}{2\pi}$

$L = L_o \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$ ve $c = c_o\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$

$\boldsymbol{d \leq L/2}$ **sığ su ;**

$$\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \to \left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

$$c = \sqrt{\frac{g.L}{2\pi}.\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} = \sqrt{gd}$$

$\boldsymbol{1/20 \leq d \leq 1/2}$ ***Geçiş bölgesi*** **;**

$$c = \frac{g.T}{2\pi}.tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) = \frac{g}{\omega}.tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) = \frac{\omega}{k}$$

Hız Alanı
Hız potansiyel fonksiyonun belli doğrultudaki türevlerinin o doğrultudaki hızı verdiğine göre;

$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x}$ ve $w = \frac{\partial \emptyset}{\partial z}$

$$\phi = -\frac{H.c}{2}.\left(\frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)}\right)\sin(\omega t - kx)$$

$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = \frac{H.c}{2}.k.\left(\frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)}\right)cos(\omega t - kx)$; $k = \frac{2\pi}{L}$; $c = \frac{L}{T}$

$$u = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = \pi\frac{H}{T}\left(\frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)}\right)cos(\omega t - kx)$$

$w = \frac{\partial \emptyset}{\partial z} = -\frac{H.c}{2}.k.\left(\frac{sinh[k(z+h)]}{sinh(kh)}\right)sin(\omega t - kx)$; $k = \frac{2\pi}{L}$; $c = \frac{L}{T}$

$$w = \frac{\partial \emptyset}{\partial z} = -\pi\frac{H}{T}\left(\frac{sinh[k(z+h)]}{sinh(kh)}\right)sin(\omega t - kx)$$

Potansiyel fonksiyonundan faydalanarak iki boyutlu orbital hızları elde edebiliriz ancak bu hızlar sözkonusu akışkan parçacıklarının yörüngeleri hakkında bir fikir vermez.

Akışkan konumu:

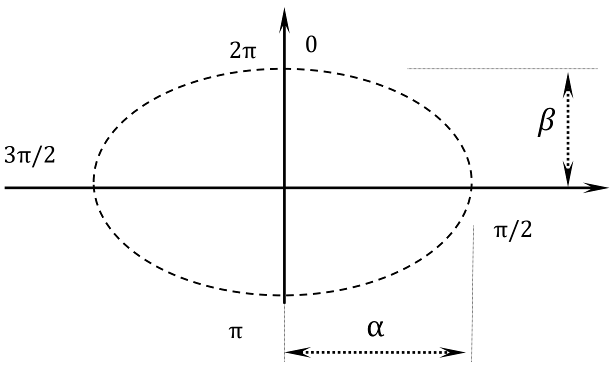
$\frac{dx}{dt} = u(x,z,t)$; $\frac{dz}{dt} = w(x,z,t)$

u ve w 'nin x ve z 'ye bağlı olmaları nedeniyle bu ifadeleri doğrudan çıkaramıyoruz.

$x = \zeta + \Delta x$; $z = \xi + \Delta z$

$(\zeta, \xi) \rightarrow$ *ortalama konum ; yörüngenin merkezi*

$$x = \zeta + \frac{H}{2}\left(\frac{\cosh[k(\xi+h)]}{\sinh(kh)}\right)sin(\overbrace{\omega t - k\zeta}^{\theta})$$
$$z = \xi + \frac{H}{2}\left(\frac{\sinh[k(\xi+h)]}{\sinh(kh)}\right)cos(\overbrace{\omega t - k\zeta}^{\theta})$$



$(\zeta,\xi) = (0{,}0) \quad \text{ve} \quad \theta = 0; 2\pi$	$\beta = \frac{H}{2}\left(\frac{\sinh[\mathrm{k}(\xi+\mathrm{h})]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right)$
$(\zeta,\xi) = (0{,}0) \quad \text{ve} \quad \theta = \left(\frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\alpha = \frac{H}{2}\left(\frac{\cosh[\mathrm{k}(\xi+\mathrm{h})]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right)$

BASINÇ

Dalgaların olmasından meydana gelen basınç Bernoulli denklemiyle;

$$g.z + \frac{\mathrm{p}}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \phi_t = 0$$

Yalnızca dalgaların yaratacağı basınç için z=0 alınır ve ikinci mertebe terimler ihmal edilir $\left(\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^2 \text{ ve } \left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]^2\right)$.

$$\overbrace{\mathrm{p_t}}^{\textit{Toplam basınç}} = \overbrace{\mathrm{p}}^{\textit{Dinamik basınç}} + \underbrace{\rho gz}_{\textit{Hidrostatik basınç}}$$

Dalga nedeniyle oluşan basıncı ifade eden $\mathrm{p_t}$ Bernolli denklemi yardımıyla yazılırsa;

$$\frac{\mathrm{p_t}}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{p_t}}{\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{p_t} = -\rho\phi_t$$

$$\mathrm{p_t} = \rho g \frac{H}{2}\left(\frac{\cosh[\mathrm{k}(\mathrm{z}+\mathrm{h})]}{\cosh(\mathrm{kh})}\right) cos(\omega t - kx)$$

Not : $\boldsymbol{\eta = \frac{H}{2} cos(\omega t - kx)}$

GRUP HIZI

Genlikleri ve ilerleme yönleri aynı fakat periyodları birazfarklı iki küçük genlikli dalga düşünelim.

$$\eta_1 = a.cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{ve} \quad \eta_2 = a.cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

Burada $T_1 < T_2$ olarak düşünürsek $\omega_1 > \omega_2$, $L_1 < L_2$ ve $k_1 > k_2$ olur.
Hareketin başlangıcında t=0 ve x=0 için,

$\eta_s = \eta_1 + \eta_1 = 2a$; olur

*$x = L_1$ olduğunda ise ilk vektör 360º devir yaptığı halde $\mathrm{T_1} \neq \mathrm{T_2}$ olduğu için $\mathrm{T_2}$ tam devir yapmamış olacak ve su yüzeyi $\eta_s \neq 2a$ olacaktır. Bir **L** mesafesi sonra bu iki vektör arası faz farkı 180º olacak ve $\eta_s = 0$ olacaktır. Bu söylediklerimizi analitik olarak;*

$$\eta_s = 2a.\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t - \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x\right].\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t - \left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x\right]$$

DALGA ENERJİSİ

Dalga enerjisi potansiyel ve kinetik enerjinin birleşiminden oluşmaktadır. Potansiyel enerji serbest su yüzeyindeki değişimlerden, kinetik enerji ise akışkan parçacıklarının hızlarından oluşmaktadır.

Potansiyel enerji;

Yatay düzlemde birim alanda görülen potansiyel enerji;

$$E_p = \int_{-h}^{\eta} \rho gzdz - \int_{-h}^{0} \rho gzdz = \int_{0}^{\eta} \rho gzdz = \frac{1}{2}\rho g\eta^2$$

Ancak bizim için genel hal;

$E_p = \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{H}{2}\cos\theta\right)^2$; *"Anlık Değer"*

E_p *'nin bir dalga peryodu veya dalga boyu boyunca ortalama değeri alırsak;*

$$E_p = \frac{1}{2}\rho g\overline{\eta^2} = \frac{1}{2}\rho g\left(\overline{\frac{H}{2}\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho g\frac{H^2}{4}cos^2\theta$$

$E_p = \frac{1}{16}\rho gH^2$; *"Zamansal Ortalama Değer"*

Kinetik Enerji

Yukarıda verilen tanım gereği birim hacim için anlık kinetik enerji $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}\right)$;

$$E_k = \frac{1}{2}\rho(u^2+w^2)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\left\{\left[\frac{\pi H}{T}\left(\frac{\cosh[\mathrm{k}(\mathrm{z}+\mathrm{h})]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right)cos(\omega t - kx)\right]^2 + \left[\frac{\pi H}{T}\left(\frac{\sinh[\mathrm{k}(\mathrm{z}+\mathrm{h})]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right)sin(\omega t - kx)\right]^2\right\}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{H\omega}{2\sinh(kh)}\right)^2\left(cosh^2[k(z+h)].cos^2\theta + sinh^2[k(z+h)].sin^2\theta\right)$$

$\boldsymbol{c = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega}\tanh kh}$ *ve* $\boldsymbol{\omega^2 = gk\tanh kh}$ *olur.*

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\frac{H^2(g.k.\tanh(kh)}{4.sinh^2(kh)}\left(cosh^2[k(z+h)].cos^2\theta + sinh^2[k(z+h)].sin^2\theta\right)$$

$$\mathbf{tanh\,kh} = \frac{\mathbf{sinh\,kh}}{\mathbf{cosh\,kh}}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\frac{H^2g.k}{4.\sinh(kh)\cosh(kh)}\left(cosh^2[k(z+h].cos^2\theta + sinh^2[k(z+h].sin^2\theta\right)$$

$\mathbf{sinh(x)\,cosh(x) = sinh(2x)}$ *ise ;*

$$E_k = \frac{1}{4}\rho gkH^2 \frac{1}{\sinh[2(kh)]}\left(cosh^2\,[k(z+h)].cos^2\,\theta + sinh^2\,[k(z+h)].sin^2\,\theta\right)$$

$\boldsymbol{cosh^2x = 1 + sinh^2x}$
$\boldsymbol{cos^2x = 1 - sin^2x}$

$$E_k = \frac{1}{4}\rho gkH^2 \frac{1}{\sinh[2(kh)]}\left([1 + sinh^2\,[k(z+h)]].[1 - sin^2\,\theta] + sinh^2\,[k(z+h)].sin^2\,\theta\right)$$

$$E_k = \frac{1}{4}\frac{\rho gkH^2}{\sinh[2(kh)]}\left(\overbrace{1 - sin^2\,\theta}^{cos^2\,\theta} + sinh^2\,[k(z+h] - sin^2\,\theta sinh^2\,[k(z+h)] + sinh^2\,[k(z+h)].sin^2\,\theta\right)$$

$$E_k = \frac{1}{4}.\frac{\rho H^2 gk}{\sinh[2(kh)]}\left(cos^2\,\theta + sinh^2\,[k(z+h)]\right)$$

Birim alanlı yatay düzlem için bu ifade çıkarıldıktan sonra düşeyde $-\boldsymbol{h} \rightarrow \boldsymbol{\eta}$ *arasında integrasyonu yapılmalıdır. Ancak* ***-h*** *ile* ***0*** *arası yapılacak integrasyon sonucu yapılacak hata* ***0[H³]*** *mertebesindedir.*

$$E_k = \int_{-h}^{0} \frac{1}{4}.\frac{\rho H^2 gk}{\sinh[2(kh)]}\left(cos^2\,\theta + sinh^2\,[k(z+h)]\right) dz$$

$$E_k = \frac{1}{4}.\left(\frac{\rho H^2 gk}{\sinh[2(kh)]}\right)\left\{\int_{-h}^{0}(cos^2\,\theta)\,dz \int_{-h}^{0}(sinh^2\,[k(z+h)])dz\right\}$$

$\boldsymbol{\cosh 2k(z+h) = 1 + 2sinh^2\,[k(z+h)]}$ *ise;*

$$sinh^2\,[k(z+h)] = \frac{\cosh 2k(z+h) - 1}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{4}.\left(\frac{\rho H^2 gk}{\sinh[2(kh)]}\right)\left\{h.cos^2\,\theta + \frac{1}{2}\int_{-h}^{0}(\cosh 2k(z+h) - 1)dz\right\}$$

$$E_k = \frac{1}{4}.\left(\frac{\rho H^2 gk}{\sinh[2(kh)]}\right)\left\{h.cos^2\,\theta + \frac{1}{4k}\sinh 2kh\right\}$$

$$E_k = \frac{1}{16}\rho gH^2 + \frac{1}{8}\rho gH^2\frac{2kh}{\sinh[2(kh)]}\left(cos^2\,\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Burada ilk terim ortalama değer iken ikinci terim salınımı gösterir. Toplam anlık değeri verir.

Toplam enerji yoğunluğu (energy density) =Kinetik ve Potansiyel enerjilerin ortalamasının toplamına denir.

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{8}\rho gH^2$$

Dalga enerjisi;

$$E = \frac{1}{8}\rho g H^2 L$$

ENERJİ AKISI

Yukarıdaki gibi hesaplanan enerji doğrudan dalga hareketindeki enerji denklemine giremez. Bu nedenle derinlik boyunca integrasyonu yapılmış değerin birim genişlikteki bir düşey düzlemden geçen miktarı önem kazanır. Birim genişlikteki bu düzlemden geçen enerjiye "Enerji Akısı (E_f)" denir.

Birim genişliği ve derinlik doğrultusunda dz boyutu olan düşey düzleme (p.dz.1) kuvveti etkimektedir.Bu kuvvet etkidiği akışkan hacmini dt zamanında (u.dt) kadar yatay mesafe aldırır. Öyle ise yapılan iş = (p.u.dz.dt) olur.

Aynı zaman diliminde belirtilen hacimdeki su (u.dt.dz) bu kesitten bir miktar enerji ile birlikte taşınır. (Potansiyel+Kinetik) enerji;

$$\left[\rho g z + \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)\right] u.dz.dt$$

Böylelikle birim zamanda, birim genişlikten geçen enerji;

$E_f = \int_{-h}^{\eta}\left[p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)\right] u.dz$ *; olur.*

$E_f = \int_{-h}^{\eta}\left[p_t + \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)\right] u.dz$ *;* p_t*: excess pressure*

Lineerleştirme

$$E_f = \int_{-h}^{\eta} p_t.u.dz$$

$$\mathrm{u} = \frac{\pi H}{T}\left(\frac{\cosh[\mathrm{k(z+h)}]}{\sinh(\mathrm{kh})}\right) cos(\omega t - kx)$$

ve

$\mathrm{p_t} = \rho g \frac{H}{2}\left(\frac{\cosh[\mathrm{k(z+h)}]}{\cosh(\mathrm{kh})}\right) cos(\omega t - kx)$; kullanarak

$E_f = \int_{-h}^{0} p_t.u.dz$ *; (belli bir düşey kesit, x=0)*

$$E_f = \frac{1}{4}\rho g H^2 \omega \frac{cos^2\,\omega t}{\cosh(kh).\sinh(\mathrm{kh})}\int_{-h}^{0} cosh^2\,[k(z+h)]dz$$

$$E_f = \frac{1}{2}\rho g H^2 \omega \frac{cos^2\,\omega t}{\sinh(2\mathrm{kh})}\int_{-h}^{0}\frac{1}{2}[1 + \cosh k(z+h)]dz$$

$$E_f = \frac{1}{4}\rho g H^2 \omega \frac{cos^2\ \omega t}{\sinh(2kh)}\left(h + \frac{1}{2k}\sinh(2kh)\right)$$

$$E_f = \frac{1}{8}\rho g H^2 c\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) cosh^2 \omega t$$

Ortalama Flux

$$E_f = \frac{1}{16}\rho g H^2 c\left(1 + \underbrace{\frac{2kh}{\sinh 2kh}}_{G}\right)$$

$$E_f = \mp C_g$$

$$C_g = \frac{1}{2}\ c\ (1 + G)$$