

DALGA İSTATİSTİĞİ

Dalga teorileri genel olarak açık deniz yapılarının tasarımında ortaya çıkan problemlere yanıt bulmak amacıyla kullanılır. Bu teorilerin temelinde, özellikleri bir periyod dan diğer bir periyoda zamanla değişmeyen düzenli dalga kabulü yatar. Bununla birlikte doğadaki okyanus dalgaları rasgele karakterdedir. Bu nedenle bu tip dalgalar istatistik özellikleri ile tanımlanır. Bu istatistik özelliklerine, tipik örnekleme süresi 30 dakika zaman aralığı ile sınırlandırılmış okyanus dalga kayıtları ile ulaşılır. Dalga kayıtlarının **stasyoner** olduğu kabul edilir ve özelliklerin birkaç saatlik periyotlarda zamanla değişmediği düşünülmektedir. Bu dalga kayıtları kısa **dönem istatistiği** olarak kabul edilir.

KISA DÖNEM DALGA İSTATİSTİĞİ

Kısa dönem okyanus dalgaları rasgele bir süreçtir ve olasılık kanunlarının geçerli olduğu zamanla değişen fonksiyonlardır. **Stasyonelik** ve **ergodiklik**, okyanus dalgalarının kısa dönem istatistiklerinin tanımlandığı iki kabuldür. **Stasyonier süreçlerin istatistikleri zamanla değişmez.** $x(t)$ zamanın bir fonksiyonu olan rasgele bir sinyal olmak üzere, zamanın başlangıcından bağımsız ise x değişkeninin istatistik özelliklerinin stasyonier olduğu düşünülebilir. $x(t)$ süreciyle verilen bir kayıt topluluğu düşünülürse, bu sürecin ortalaması $x(t)$ ' nin beklenen değeriyle verilebilir.

$$\mu_x = E[x(t)] \quad (5.1)$$

Burada E , $x(t)$ 'nin beklenen değerini göstermektedir. Standart sapma veya sürecin karelerinin ortalamasının karekökü şu şekilde tanımlanabilir.

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}[x(t)]} \quad (5.2)$$

Burada Var , $x(t)$ 'nin varyansını belirtmektedir. Otokorelasyon fonksiyonu ise şu şekilde verilebilir.

$$R(t_1, t_2) = E[x(t_1).x(t_2)] \quad (5.3)$$

Eğer μ_x ve σ_x , t 'nin bütün değerleri için sabit ve R sadece $\tau = t_2 - t_1$ ' in fonksiyonu ise $x(t)$ süreci stasyonierdir.

Ek olarak

farklı noktalarda ölçülen $x(t)$ değerlerinin özellikleri zamanla değişmiyorsa, $x(t)$ 'nin homojen olduğu söylenebilir.

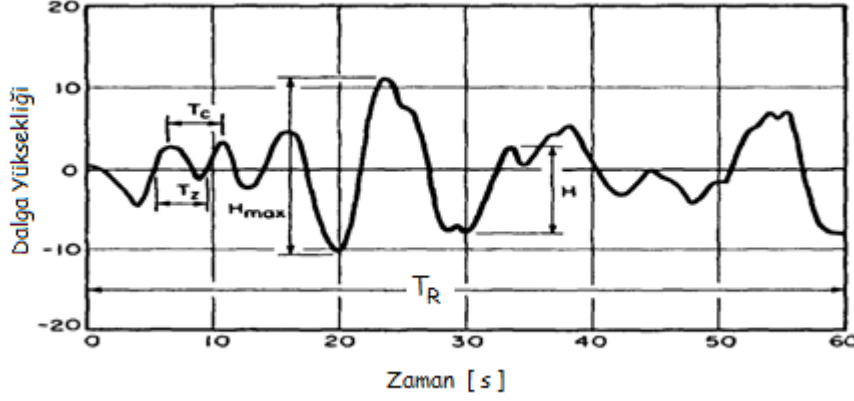
Pratikte $x(t)$ değişkeni sınırlı bir zaman ve alan üzerinde stasyoner ve homojen olabilir. Böylece okyanus dalgalarının bir kaç saatlik süre içinde stasyoner olduğu aksi takdirde özelliklerinin değişeceği beklenebilir. $x(t)$ ölçülmüş örneği, diğer olası örneklerin tipik bir örneği ise $x(t)$ değişkeninin ergodik olduğu düşünülebilir. Bu şekilde,

toplumun herhangi bir kaydının zamansal ortalaması toplumun bütününün ortalaması ile aynı ise stasyoner süreç ergodiktir.

Ergodik bir süreç için, toplumdaki alınan bir örneğin ortalaması toplumun μ_x ortalamasına ve örneğin varyansında toplumun σ_x^2 varyansına yaklaşır. Stasyoner ve ergodik süreç kavramı, okyanus dalgalarının kısa dönem istatistiklerine uygulanmasında ve geliştirilmesinde önemli olmakla birlikte , gerçekte bu hipotezler gerçek dışıdır.

Okyanus dalgalarının tanımlanmasında kullanılan dalga parametrelerinin tanımına başlanabilir. Burada okyanus dalgalarının istatistik parametrelerinin hesaplanmasında bilinen yöntemler tartışılacak ve yaklaşık ifadeler verilecektir. Dalganın şematik bir tanımı **Şekil 5.1'** de verilmiştir. Kayıt uzunluğu T_R ile verilmektedir. Kayıttaki maksimum dalga yüksekliği H_{max} , dalga tepesi ile dalga çukuru arasındaki maksimum yüksekliktir. Sıfırdan geçen periyod T_z ile gösterilirken tepeler arasındaki periyod T_o ile verilmektedir.

Okyanus dalgalarının tanımlanmasında, kısa dönem parametresi olarak kullanılan bir çok parametre vardır. Deniz durumunun tanımlanmasında kullanılan en önemli iki parametre, karakteristik dalga yüksekliği ve karakteristik dalga periyodudur. Deniz yüksekliği farklı değerlerde tanımlanabilir. Örneğin ; **ortalama yükseklik, yüksekliğin ortalama karesel karekökü**, en yüksek üçte bir dalganın ortalaması (**belirgin dalga yüksekliği**) ve son olarak gözlenebilecek **en büyük dalga yüksekliği**dir.



Şekil 5 1 Açık Deniz Dalga Parametrelerinin Tanımı

Bu parametrelerin en çok kullanılanı **belirgin dalga yüksekliğidir**. Belirgin dalga yüksekliği H_s (veya $H_{1/3}$) olarak yazılır ve **belli bir dalga kaydının üçte-birine karşı gelen en büyük dalgaların ortalamasıdır**. Ortalama periyod , sıfırdan geçme periyodu, pik periyod vb. karakteristik periyod olarak alınabilir. Bu niceliklerin tanımları ve hesaplama yöntemleri kısaca açıklanacaktır.

İstatistik parametreler zaman ortamında veya frekans ortamında tanımlanmış dalga kayıtlarından doğrudan elde edilebilir. Diğer bir durumda , **S(f)** veya **S(ω)** ile gösterilen **enerji yoğunluk spektrum** tanımlaması olarak bilinmektedir. Bu parametrelerin hesaplanması için **enerji yoğunluk spektrumunun momenti** olarak bilinen büyüklüklere ihtiyaç duyulur. Bir enerji spektrumunun n ' inci mertebeden momentinin genel ifadesi şu şekilde yazılabilir :

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df \quad (5.4)$$

S(f) teriminin tanımlanmasına dikkat edilirse burada f (cyclic) çevrimsel frekanstır. Eşdeğer bir ifade ω açısız frekansına göre yazılabilir. Bununla beraber daha sonraki tanımlarda m_n hesaplarında ifadeler içine girecek **(2π)ⁿ** faktörünün sonuçlarının yorumlanmasına dikkat edilmelidir.

m_0 sıfırıncı moment, enerji yoğunluk spektrum eğrisinin altındaki alanı tanımlar

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(f) df = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (5.5)$$

Yukarıdaki eşitlikten S(f) ile S(ω) arasındaki ilişki elde edilebilir.

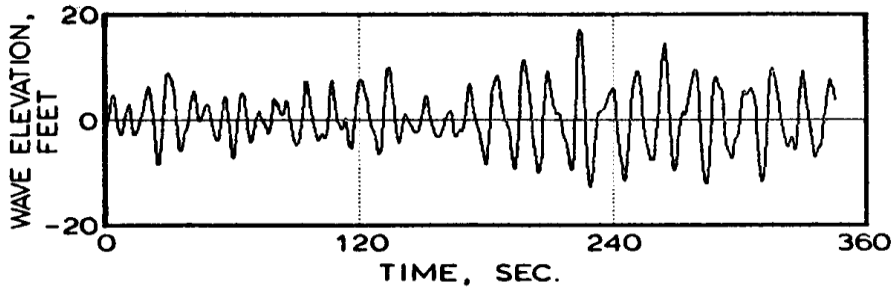
$$S(f) = 2\pi S(\omega) \quad (5.6)$$

Belirgin Dalga Yüksekliği

Belirgin dalga yüksekliği kavramı, belirli bir deniz ortamında bütün dalgaların en büyük üçte birinin ortalama dalga yüksekliği olarak ilk defa Sverdrup ve Munk (1947) 'de ifade edilmiştir. Belirgin dalga yüksekliği H_s veya $H_{1/3}$ ile gösterilmektedir. Deniz kaptanları görsel gözlemlere dayanarak belirgin dalga yüksekliğine yakın dalga yüksekliği değerleri bulmuşlardır. Hoffman ve Walden (1977) Kuzey Atlantik Okyanusunda , India ve Papa meteoroloji istasyonlarındaki okyanus meteoroloji gemilerinde uzman gözlemcilerin dalga yüksekliği gözlemleri ile belirgin dalga yüksekliği arasında bir ilişki olduğunu belirlemişlerdir ve aşağıdaki doğrusal denklemi önermişlerdir.

$$H_s = 0.775 \cdot H_v + 7.0 \quad (5.7)$$

Bu ilişki belirgin dalga yüksekliklerinin yaklaşık 12.2 m 'nin üzerindeki değerleri için geçerlidir. Belirgin dalga yüksekliğinin çıkarılmasına yardım edecek oldukça değerli çok sayıda gözlenmiş ölçümler mevcuttur. (Örneğin ; Hogben ve Lumb, 1967)



Şekil 5.2. 18 Şubat 1974 'de OWS Hava Raportörlüğünün J istasyonunda Kayıt Edilen Dalga Profili

Belirgin dalga yüksekliğinin aşağıdaki tanımında dalga kaydından en büyük üçte-bir dalgalar seçilmiştir. Bu dalga yüksekliklerinin ortalaması belirgin dalga yüksekliğini verir.

$$H_{1/3} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N/3} H_i \quad (5.8)$$

burada N , H_i büyükten küçüğe sıralanmış bir dalga kaydında ardışık dalga yüksekliklerinin sayısıdır.

18 Şubat 1974 'de *Julliet* istasyonunda OWS meteoroloji raportörlüğüne ait gemiyle taşınan bir

kadronun kaydettiği dalga seviyelerinin bir kesiti örnek olarak Şekil 5.2 ' de gösterilmiştir. Belirgin dalga yüksekliği , kayıtlarda en büyük üçte bir dalganın ortalamasıyla zaman ortamında hesaplanmış ve Tablo 5.1 'de 5.84 m olarak gösterilmiştir.

Bu hesap yöntemi zaman alıcıdır ve daha basit yaklaşık bir yöntem Tueker (1963) tarafından önerilmiştir. **En büyük dalga tepesi yüksekliği a_c** ile **en küçük dalga çukuru a_t** ve kayıttaki sıfırdan geçme sayısı N_z biliniyorsa, dalga kayıtlarından belirgin dalga yüksekliği değeri doğrudan tahmin edilebilir.

$$H_s = \sqrt{2}C_1(a_c + a_t) \quad (5.9)$$

C_1 fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$C_1 = (\ln N_z)^{-1/2} [1 + 0.289(\ln N_z)^{-1} - 0.247(\ln N_z)^{-2}]^{-1} \quad (5.10)$$

Şekil 5.2 ' deki örnek için, belirgin dalga yüksekliği Tucker yöntemi ile 6.46 m olduğu gösterilebilir.

Spektral analizde, belirgin dalga yüksekliği dalga spektrumunun içerdiği toplam enerjiye bağlıdır, m_0 dalga enerji yoğunluk spektrumunun altındaki alan ise ;

$$H_s = 4\sqrt{m_0} \quad (5.11)$$

Tablo 5.1 Düzensiz Dalga İstatistikleri (10 Şubat 1974 'de OWS Hava Raportörlüğünün J İstasyonunda)

Zaman Ortamı Analizi		
Belirgin Dalga Yükseldiği	19,2 ft	5.856m
Belirgin Dalga Yüksekliği (Tucker Metodu)	21,1ft	6.436 m
Dalga Yüksekliklerinin Karesel Ortalama Karekök Değeri	12,9 ft	3.935 m
Su Yüzeyinin Standart Sapması	5,3 ft	1.617 m
Su Yüzeyinin Standart Sapması (Tucker Metodu)	5,4 ft	1.647 m
Sıfırdan Geçen Ortalama Dalga Periyodu	10,92 ft	3.33 m
Tepe Periyodunun Ortalaması	8,74 ft	2.67 m
Spektral Genişlik Parametresi	0,60 ft	0.183 m
Frekans Ortamı Analizi		
Belirgin Dalga Yüksekliği	16,5 ft	5.03 m
Dalga Yüksekliklerinin Karesel Ortalama Karekök Değeri	11,7 ft	3.57 m
Spektral Yoğunluk Fonksiyonunun Sıfırncı Momenti	17,1 ft	5.2 m
Spektral Yoğunluk Fonksiyonunun Birinci Momenti	1,67 ft ² /s	0.155 m ² /s
Spektral Yoğunluk Fonksiyonunun İkinci Momenti	0,19 ft ² /s ²	0.018 m ² /s ²
Spektral Yoğunluk Fonksiyonunun Dördüncü Momenti	0,0043 ft ² /s ⁴	
Pik Perivod	12,00 s	
Ortalama Periyod (m_0/m_1) momentleri esas alınarak hesaplanan)	10,24 s	
Ortalama Periyod ($\sqrt{m_0/m_2}$) esas alınarak hesaplanan)	9,52 s	
Spektral Genişlik Parametresi	0,70	
Serbestlik Derecesi	6,69	
<i>NOT : $\Delta t = 0.400$ saniye ; LAGS = 240 ; $T_R = 5.7533$ dakika</i>		

Bu durumda enerji yoğunluk spektrumu tek yönlüdür. Şekil 5.2 'deki dalga için belirgin dalga yüksekliği frekans ortamı analizi ile 5.03 m. Olarak belirlenmiştir. Bu belirgin dalga yüksekliği tahmini nadiren olmakla birlikte bu örnekte diğer iki yöntemle göre daha küçüktür.

Dalga Yüksekliklerinin Karesel Ortalamasının Karekök Değeri (Root Mean Square) H_{rms}

Dalga yüksekliklerinin karesel ortalamasının karekök değeri dalga kayıtlarından aşağıdaki formülle hesaplanmaktadır.

$$H_{rms} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i^2 \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

Şekil 5.2 'deki dalga profili için H_{rms} değeri 3.92 m. Hesaplanmıştır. Frekans ortamında H_{rms} değeri ise ;

$$H_{rms} = 2\sqrt{m_0} \quad (5.13)$$

ifadesi ile belirlenebilir. Frekans ortamı analizi ile karesel ortalama karekök değeri 3.57 m. Olarak elde edilebilir. Dalga seviyesinin karesel ortalama karekök değeri ise

$$\sigma = \sqrt{m_0} \quad (5.14)$$

şeklindedir. Dikkat edilmesi gereken dalga seviyeleri dalga kaydındaki minimum ve maksimum olmak üzere ters dalga genlikleri arasındaki Δt zaman aralıklarında elde edilmektedir. Böylece σ aynı zamanda şu ifadeye eşittir.

$$\sigma = \left[\frac{1}{T_s} \sum_{T_s} \eta^2(t) \right]^{1/2} \quad (5.15)$$

örnekteki dalga profili için bu değer 1.62 m. bulunmuştur. Tucker , $|\overline{\eta(t)}|$ düzeltilmiş dalga seviyelerinin ortalamasını dikkate alarak eşdeğer bir formül vermiştir.

$$\sigma = 1.253|\overline{\eta(t)}| \quad (5.16)$$

Bu ifade 5.12 ile elde edilen değerlere oldukça yakın değerler vermektedir. Yukarıda verilen örnek için , dalga yüzeyi seviyelerinin standart sapması 1.64 m olarak hesaplanmaktadır.

Maksimum Dalga Yükseklikleri

Bir dalga kaydında maksimum dalga yüksekliği, kayıtlardaki bütün dalga tepesi ve çukurları arasındaki düşey uzaklık değerlerinin en büyüğü olarak alınmaktadır.

Kayıtlarda gözlenebilecek maksimum dalga yüksekliği değeri, kayıttaki H_{rms} değerinden (veya benzer şekilde belirgin dalga yüksekliğinden) elde edilebilir. Longuet-Higgins (1952) **dar band kayıt spektrumu için** , bir kayıttaki belli sayıda dalganın dalga yüksekliklerinin karesel ortalama karekök değeri ile gözlenebilecek maksimum dalga yüksekliği değeri arasındaki ilişkiyi çıkarmışlardır. H_{max} ve H_{rms} arasındaki bu ifade ;

$$H_{max} = \left[\sqrt{\ln N} + \frac{0.2886}{\sqrt{\ln N}} \right] H_{rms} \quad (5.17)$$

Bu ifade ile ilgili detaylı bilgi 5.1.6.2 'de verilmiştir. Dalga yüksekliklerinin maksimum değeri, aşağıda tanımlanan kayıttaki $\overline{T_z}$ ortalama periyod değeri temel alınarak düzenlenmiştir. Böylece 3 saatlik periyod içerisinde gözlenebilecek olası maksimum dalga yüksekliği $N = 10.800 / \overline{T_z}$ alınarak ve 5.17 denklemleri ile hesaplanabilir.

Ortalama Dalga Periyodu

Zaman ortamı analiziyle, ortalama dalga periyodu toplam süre uzunluğundan (T_R) iki farklı yöntemle elde edilebilir. N_z kayıttaki sıfırdan geçme sayısı, $\overline{T_z}$ sıfırdan geçme periyodlarının ortalaması ise ;

$$\overline{T_z} = \frac{T_R}{N_z} \quad (5.18)$$

şeklinde elde edilebilir.

Şekil 5.2 ' deki dalga için **sıfırdan geçen ortalama periyodu** $\overline{T_z} = 10.92$ s. 'dir. Diğer taraftan kayıttaki dalga tepelerinin sayısı N_c ise **ortalama dalga tepe periyodu** $\overline{T_c}$;

$$\overline{T_C} = \frac{T_R}{N_C} \quad (5.19)$$

Denklem 5.18 ve 5.19 da ki T_R kayıt uzunluğu, kayıttaki sıfırdan geçme kuralına göre tanımlanmış kesirli kısımlar gözardı edilerek düzenlenmiştir. Yukarıdaki örnekte ortalama dalga tepe periyodu 8.74 s. 'dir. Dikkat edilirse bu periyodların tanımı gereği $\overline{T_C} < \overline{T_z}$ dir.

$\overline{T_C}$ ve $\overline{T_z}$ değerlerinin farkı aşağıda tanımlanan spektrum genişliğinden belirlenebilir. $\overline{T_C}$ değeri $\overline{T_z}$ değerine yakınsa, kayıttaki tekil dalgaların çoğu sıfır çizgisinden geçmektedir. Bu nedenle dalga spektrumunun enerjisinin küçük bir frekans bandında toplandığı ve dar band spektrumu olduğu düşünülebilir.

Frekans ortamında , ortalama dalga periyodu denklem 5.4 'de tanımlanan m_n spektral momentlerden hesaplanabilir. $T_{0,1}$ ortalama dalga periyodu m_0 momentinin m_1 momentine oranı şeklinde tanımlanmaktadır.

$$T_{0,1} = \frac{m_0}{m_1} \quad (5.20)$$

$T_{0,2}$ ortalama dalga periyodu şu ifade ile verilebilir.

$$T_{0,2} = \frac{m_0}{m_2} \quad (5.21)$$

Yukarıda verilen örnekte $T_{0,1}$ ve $T_{0,2}$ spektral periyodları sırasıyla 10.24 s. ve 9.52 s. olarak hesaplanmaktadır. **İstatistikte oldukça sık kullanılan diğer iki karakteristik periyod daha vardır.** Bunlardan birincisi **enerji spektrum yoğunluğunun pik değeri olan T_0 periyodu**, ikincisi ise dalga kaydındaki **en yüksek üçte-bir dalganın ortalama dalga periyodudur (T_s).**

Spektral Genişlik Parametresi

ϵ , spektral genişlik parametresi dalga enerji yoğunluk spektrumunun *rms* genişliğinin ölçüsüdür, ϵ değeri 0 ile 1 arasında değişir, ϵ değeri küçükse spektrumun dar band olduğu, ϵ değeri 1 ' e yakınsa geniş band spektrumudur. Zaman ortamı analizinde, ϵ , spektral genişlik parametresinin tahmini kaydın ortalama tepe periyodu ve ortalama sıfırdan geçme periyodundan yararlanarak

yapılabilir.

$$\varepsilon_t^2 = 1 - \left(\frac{\overline{T_c}}{\overline{T_z}} \right)^2 \quad (5.22)$$

Dalga profilindeki yerel piklerin çoğu sıfırdan geçerek devam ediyorsa yani $\overline{T_c} \approx \overline{T_z}$ ise spektral genişlik parametresi sıfıra yaklaşacaktır. Diğer yandan , profilde yerel piklerin önemli bir bölümü sıfırdan geçmiyorsa, spektrum geniş band spektrumu olacaktır. Şekil 5.2 deki örnekte ε_t değeri 0.60 dır.

Enerji spektral analizde, spektral genişlik parametresi spektrum momentlerinden elde edilebilir. Bu durumda ε parametresi;

$$\varepsilon_s^2 = \frac{m_0 \cdot m_4 - m_2^2}{m_0 \cdot m_4} = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 \cdot m_4} ; \quad \varepsilon_s = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 \cdot m_4}} \quad (5.23)$$

ifadesinden elde edilebilir. Burada dikkat edilirse **yüksek mertebeden momentlerin alındığı görülmelidir. Yüksek frekanslarda enerji spektral yoğunluk tahmininde oluşan gürültü (bozulma), m_4 gibi yüksek moment hesaplarıyla kuvvetlenecektir.** Bunun nedeni frekansın dördüncü kuvvetinin tahmininden kaynaklanmaktadır. Bu şekilde hesap işlemleri uygun bir frekansta sona erdirilebilir. Dalga örneği için ε spektral genişlik parametresi 0.70 dir. **Spektral genişlik parametresinin 0.60 dan küçük olması durumunda , spektrumun dar band olduğunu düşünmek uygundur.**

Bazı durumlarda, spektral genişlik parametresinin değerinin geniş band spektrumunun ne derece bir göstergesi olduğundan şüphe edilmektedir. Bunun en önemli sebebi, m_2 ve m_4 gibi yüksek momentlerin hata olasılıklarıdır. Goda (1974) aşağıda tanımı verilen spektral piklik parametresini önermiştir.

$$Q_p = \frac{2}{m_0^2} \int_0^{\infty} f \cdot S^2(f) df \quad (5.24)$$

Bu ifade enerji yoğunluk spektrumunun sadece birinci momentine bağlıdır, ε ve Q_p arasındaki doğrudan bir ilişki yokken ε 'nun küçük değer alması durumunda Q_p değeri büyümekte ve aksi durum oluşmaktadır.

Bir fırtına anında, fırtına geliştikçe ε değerinin azalması ve fırtına yatışıkça ε değerinin artması

beklenir. Q_p için tersi durum doğrudur. Q_p değerinin 2 değerine yakın olması halinde spektrumun rüzgar etkisiyle oluşan açık deniz dalgalarını, 2 değerinden büyük olması durumunda ağırlık dalgalarını yansıttığı kabul edilmektedir. Q_p ' nin 1 değerini alması durumu beyaz gürültü (white noise) spektrumunu göstermektedir (Goda ,1985).

Olasılık Dağılımı ve Eklenik Dağılım Fonksiyonu

Belirli basit kabuller altında, **rasgele değişken olan dalga parametreleri**, bilinen olasılık dağılım fonksiyonlarına uymaktadır.

Bir dalga kaydında aşağıdaki parametrelerin olasılık dağılımları incelenebilir;

- Dalga yüzeyi
- Dalga yüksekliği
- Dalga periyodu

Daha önce bahsedildiği gibi, **bu dağılımlar deniz ortamında kısa dönem olasılıkları olarak kabul edilebilir**. Çünkü dalga parametreleri, deniz ortamında bir kaç saatlik periyodlarla ölçülen ve **ardışık saatlerde değişmesi beklenen dalgalardan** elde edildikleri için sınırlanmaktadır.

Eklenik olasılık ve olasılık yoğunluk tanımları şu şekilde yapılabilir. **Olasılık yoğunluğu, meydana gelmesi beklenen belirli bir olayın gözlenme yüzdesidir. Eklenik olasılık ise bu olayın aşılmama olayının gözlenme yüzdesidir.** x rasgele değişkeninin $P(x)$ eklenik olasılığı belirli x_0 değerine eşit ve bu değerden küçük kalma olasılığıdır.

$$P(x)=\text{Prob} [x(t) \leq x_0] \quad (5.25)$$

Diğer taraftan **$p(x)$** olasılık yoğunluğu, eklenik dağılımın değişim oranıdır ve eklenik dağılımın türevi alınarak elde edilir.

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (5.26)$$

Olasılık yoğunluk eğrisinin altındaki **a** ve **b** aralığındaki alan, rasgele değişkenin **a** ve **b** aralığında değerler alma olasılığını verecektir.

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx \quad (5.27)$$

Toplam olasılık ise bire eşit olacaktır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (5.28)$$

ve

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx \quad (5.29)$$

μ_x ve σ_x **değerleri ortalama** ve **standart sapmadır**. T_R uzunluğunda $\mathbf{x(t)}$ kayıtlarından \mathbf{x} rasgele değişkeninin ortalaması şu şekilde hesaplanabilir.

$$\mu_x = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} x(t)dt \right\} \quad (5.30)$$

$$\sigma_x = \lim_{T_R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T_R} \int_0^{T_R} [x(t) - \mu_x]^2 dt \right\}^{1/2} \quad (5.31)$$

Değişim katsayısı farklı kayıtlara ait ortalama değerlerin boyutsuz bir ölçüsü olarak şu şekilde tanımlanır.

$$C_x = \frac{\mu_x}{\sigma_x} \quad (5.32)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonuna bağlı olarak, rasgele bir değişkenin ortalama değeri;

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x)dx \quad (5.33)$$

Burada **E** beklenen değeri göstermektedir. Bu şekilde μ_x olasılık yoğunluk fonksiyonunun merkezi uzaklığı olarak düşünülebilir. Benzer şekilde rasgele değişkenin varyansı da hesaplanabilir.

$$\sigma_x^2 = E[(x - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 .p(x)dx \quad (5.34)$$

Diğer bir anlamda, varyans ortalamaya göre olasılık yoğunluk fonksiyonunun atalet momenti olduğu görülebilir. Varyansın şu şekilde de elde edilebileceğine dikkat edilebilir.

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \mu_x^2 \quad (5.35)$$

Burada iki olasılık dağılımı tartışılacaktır. Gauss (Normal) dağılımı ve Rayleigh dağılımı, bunlar kısa dönem açık deniz dalga parametrelerinin dağılımlarının tanımlanmasında oldukça kullanışlıdır.

Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (5.36)$$

Eklenik olasılık dağılımı 5.29 denkleminde $p(x)$ ' in integrali alınarak elde edilebilir. $P(x)$ ' in kapalı bir formda elde edilmesi mümkün değildir.

Normal dağılım olarak adlandırılan bu dağılım ortalama ve standart sapma ile tanımlanır. Gauss (normal) dağılımın bir diğer gösterilişi de $p(x) = N(\mu_x, \sigma_x)$, şeklindedir. Sıfır ortalama ($\mu_x = 0$) ve birim standart sapma ($\sigma_x = 1$) değeri için olasılık dağılımı,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{X^2}{2}\right] \quad (5.37)$$

ifadesine indirgenir,

Eklenik dağılım fonksiyonu bir hata fonksiyonu ile aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{X^2}{2}\right] dx \quad (5.38)$$

Genel olarak $P(x)$ şu şekilde yazılabilir.

$$P(x) = \Phi\left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right] = \Phi(z) \quad ; \quad z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad , \quad z : \text{Standart değişken} \quad (5.39)$$

Bu değerler standart istatistik kitaplarında tabloleştirilmiştir (Lin , 1967). x' in anlık genliği normal bir dağılıma sahip ise;

$$Q[x(t) > x_o] = 1 - P[x(t) \leq x_o] = 1 - \Phi\left[\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right] \quad (5.40)$$

Q değeri aşılma olasılığı olarak bilinir. x' in verilen bir **t** zaman periyodunda x_o 'ı aşma olasılığını göstermektedir.

Stasyonier bir Gaussian süreç için , pik oranlarının beklenen değeri;

$$f_p = \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^{1/2} \quad \text{pik frekans} \quad (5.41)$$

ifadesiyle verilebilir ve ortalama sıfırdan geçme periyodunun tanımı dikkate alınarak, sıfırdan geçme oranının beklenen değeri ;

$$f_z = \left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{1/2} \quad \text{sıfırdan geçme frekansı} \quad (5.42)$$

olarak yazılabilir.

Buradan düzensizlik faktörü tanımlanabilir.

$$\alpha = \frac{f_z}{f_p} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.43)$$

Bu şekilde **α** (alfa) bir kayıttta sıfır çizgisini geğmeyen kaç tane pik olduğunu ölçer. Spektral yoğunluk fonksiyonunun genişliğidir, örneğin, $\alpha = 1$ ise süreç dar band dır. Spektral genişlik parametresine dikkat edilirse, α ile ilişkili olduğu görülebilir.

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \alpha} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (5.44)$$

Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve ilişkili eklenik dağılımı integral alınarak elde edilebilir.

$$p(x) = \frac{\pi \cdot x}{2\mu_x^2} \exp\left[-\frac{x}{4}\left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2\right] \quad x \geq 0$$

$$p(x) = 0 \quad x < 0 \quad (5.46)$$

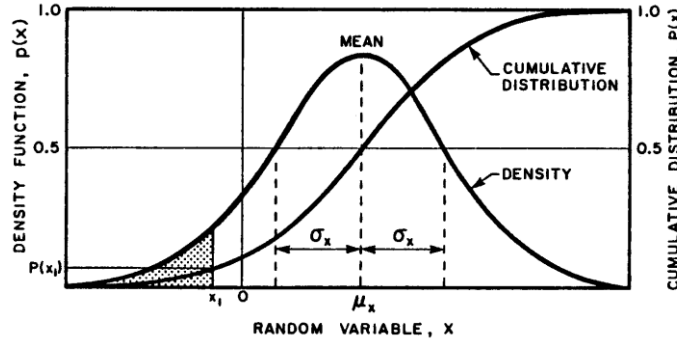
Ve

$$P(x) = 1 - \exp\left[-\frac{x}{4}\left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2\right] \quad x \geq 0$$

$$P(x) = 0 \quad x < 0 \quad (5.47)$$

Rayleigh dağılımı için dönüş periyodu şu şekilde verilebilir.

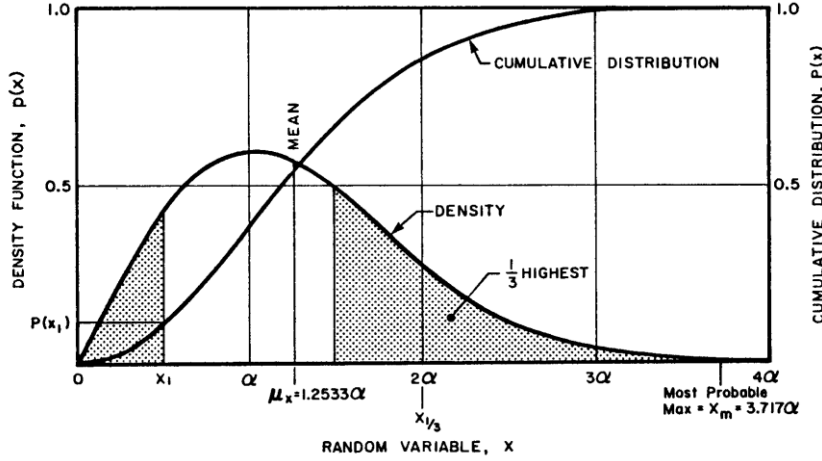
$$T_L(x) = \exp\left[-\frac{x}{\left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2}\right] \quad (5.48)$$



Şekil 5.3 Normal (Gaussian) Olasılık Dağılımı: (A) Eklenik Dağılım ve (B) Olasılık Yoğunluğu

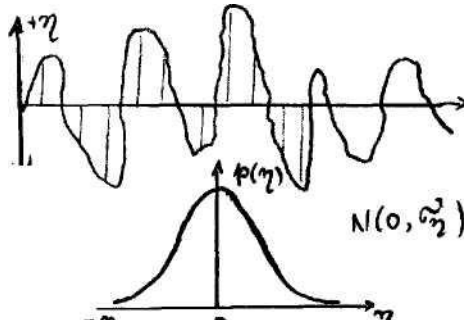
Gauss ve Rayleigh dağılımları için olasılıklar sırasıyla Şekil 5.3 ve 5.4 de noktalanmıştır. Dikkat edilirse Gauss olasılık yoğunluk fonksiyonu ortalamaya göre simetriktir. Pozitif ve negatif değerler almaktadır. Diğer taraftan Rayleigh dağılımının fonksiyonu pozitif değerlere sahiptir. $x = 0$ noktasında sıfır değer olarak maksimum değere yükselmekte ve eksponansiyel olarak tekrar sifira ulaşmaktadır. μ_x ortalama değeri ve σ_x standart sapma değeri yoğunluk fonksiyonu

üzerinde gösterilmiştir. Normal dağılım için eklenik dağılım fonksiyonu $P(x)$, pik değerinde maksimum eğime sahiptir. Rayleigh dağılımının ortalama değeri ise pik değerinin sağında kalmaktadır. (1.2533α) . Rayleigh dağılımının da pik değere karşı gelen x değeri α ile gösterilmiştir. Her iki fonksiyonun eklenik dağılım fonksiyonları x 'in büyük değerlerinde asimtotik olarak bir değerine ulaşmaktadır.



Şekil 5.4 Rayleigh Olasılık Dağılımı: (A) Eklenik Dağılım ve (B) Olasılık Yoğunluğu

Su Seviyesinin Olasılık Dağılımı (η)



Su yüzeyinin olasılık dağılımı, faz bileşeninin keyfi olarak değiştiği kabulüne göre, Gauss (Normal) olduğu düşünülebilir. Fakat $(-\pi, \pi)$ aralığında üniform dağılmamaktadır. Gauss modeli kesin su seviyesinde sıfır ortalamaya ($\mu_\eta = 0$) olarak açıkça kabul edilebilir. Bu nedenle ortalama su seviyesi profilin ortalama değeri veya beklenen değeri olarak kabul edilebilir. Bu durumda η 'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta}} \exp\left[-\frac{(\eta - \mu_\eta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right] \quad (5.49)$$

σ_η su yüzeyi kotunun standart sapmasıdır ve

$$\sigma_\eta = \sqrt{m_0} \quad (5.50)$$

Su yüzeyi kotunun olasılık yoğunluk fonksiyonu sıfır kotuna göre simetrik olup burada maksimum değerini alır. Pozitif su yüzeyi yüksekliklerinin olasılıkları ile negatif yüksekliklerin olasılıkları aynıdır.

Dalga Yüksekliklerinin Olasılık Yoğunlukları (H)

Dar band spektrumu, spektrum enerjisinin dar bir frekans aralığında yoğunlaşması olarak tanımlanır. Dalga profili çok az değişen bir dalga grubunu andırır. Bu nedenle spektral genişlik parametresi sıfıra yakın değerler alır. Dar band Gauss okyanus dalgalarının bileşenleri düzensiz görünümde ve **a dalga genliğinin** teorik olarak Rayleigh dağılımına uyduğu Longuet- Higgins (1952) tarafından gösterilmiştir. Dağılım fonksiyonu okyanus dalga kayıtlarının analizi sonucu ampirik bir formül ile Putz (1952) tarafından verilmiştir. Bu şekilde **a** genliğinin olasılık yoğunluğu ve eklenik dağılımı şu şekilde yazılmaktadır.

$$p(a) = \frac{a}{m_0} \exp\left[-\frac{x^2}{2m_0}\right] \quad (5.51)$$

$$P(a) = 1 - \exp\left[-\frac{a^2}{2m_0}\right] \quad (5.52)$$

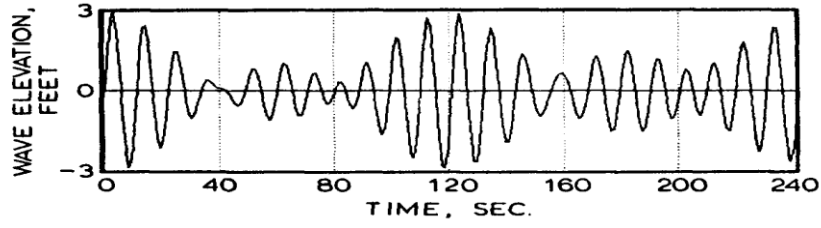
Bu denklemler 5.46 ve 5.47 denklemleri ile karşılaştırılabilir. Dar band spektrumu için aşağıdaki ilişkilerin varlığı görülebilir.

$$\mu_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_a \quad (5.53)$$

ve

$$\sigma_a = \sqrt{2m_0} \quad (5.54)$$

burada σ_a sıfır ortalamalı a değişkeninin standart sapmasıdır.



Şekil 5.5 Dar-Band Spektrumunun Yüzey Profili

Daha önce bahsedilen konularla ilişkili kurarak Rayleigh dağılımından ne gibi sonuçlar çıkarılabileceği üzerinde durulursa ve 5.51 denklemini tekrar yazılırsa;

$$p(x) = \frac{x}{m_0} \exp\left[-\frac{x^2}{2m_0}\right] \quad (5.55)$$

burada a genliği yerine x değişkeni konmuştur. Bu şekilde $p(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ başlangıç noktasında n 'inci momentini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p(x) dx \quad (5.56)$$

integral n değerinin tek ve çift sayı olması için parçalara ayrılarak elde edilebilir.

$$E[x^{2n}] = 2^n (n!) m_0^n \quad (5.57)$$

Ve

$$E[x^{2n+1}] = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0^{(2n+\frac{1}{2})}} \quad (5.58)$$

Dikkat edilirse

$$E[x^0] = 1 \quad (5.59)$$

olup bunun olasılık yoğunluk fonksiyonunun altındaki alan birdir. Ek olarak birinci moment x ' in ortalama değerini verecektir.

$$E[x] = \mu_x = \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0} \quad (5.60)$$

İkinci mertebe moment bütün x değerlerinin karelerinin ortalaması olarak tanımlanabilir. Bu şekilde x 'in rms değeri;

$$x_{rms} = \sqrt{E[x^2]} = \sqrt{2m_0} \quad (5.61)$$

Bu iki denklem 5.53 ve 5.54 denklemleri ile aynıdır. σ_x^2 varyansı ikinci mertebe momentten ortalamanın karesi çıkarılarak;

$$\sigma_x^2 = \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] m_0 \quad (5.62)$$

5.25 denkleminde elde edilebilir. Ortalama değerden ($\pm \sigma$) bir standart sapma aralığına düşen bütün noktaların eklenik dağılımını düşünürsek;

$$P(x) = \int_{\mu-a}^{\mu+a} \frac{x}{m_0} e^{-\frac{x^2}{2m_0}} dx \quad (5.63)$$

integral alındığında

$$P(x) = -e^{-\frac{x^2}{2m_0}} \Big|_{\mu-a}^{\mu+a} \quad (5.64)$$

ve buradan

$$P(x) = 0.674 \quad (5.65)$$

değeri belirlenebilir.

Okyanus dalgalarının tanımlanmasında, genel olarak a genliği yerine H dalga yüksekliği kullanılır. $H = 2a$ kabul edilir ve yukarıdaki denklem dalga yüksekliği dağılımına kolayca çevrilebilir, m_0 yerine H_{rms} değerini kullanmak çalışmalar için daha uygundur. m_0 yerine ve a yerine $H/2$ yerleştirilerek;

$$p(H) = \frac{2H}{H_{RMS}^2} \exp\left[-\frac{H^2}{H_{RMS}^2}\right] ; H_{rms} = 2\sqrt{2m_0} ; m_0 = \frac{H_{rms}^2}{8} ; a = \frac{H}{2} \quad (5.67)$$

Ve

$$P(H) = 1 - \exp\left[-\frac{H^2}{H_{RMS}^2}\right] \quad (5.67)$$

Dikkat edilirse $p(H)$ ve $P(H)$ birbiriyle uyumludur. Düzensiz dalga profilinden lineer dalga teorisi kullanılarak su-parçacıklarının hızı, ivme ve dinamik basınç elde edilirse bunların genlikleri (veya çift genlikleri) benzer dağılımlara uyar.

H_{rms} ve $H_{1/3}$ arasındaki ilişkiyi belirleyelim. En yüksek üçte-bir dalganın ortalaması olan $H_{1/3}$ belirlemek istersek;

$$P(H_0) = \frac{2}{3} = 1 - \exp\left[-\frac{H_0^2}{H_{RMS}^2}\right] \quad (5.68)$$

$$H_0 = 1.0481H_{rms} \quad (5.69)$$

burada $H > H_0$ olan bütün değerler en yüksek üçte-bir aralığındadır. 5.68 denkleminde $H_{1/3}$ eklenik dağılım fonksiyonunun altında, $H \geq H_0$, değerleri için elde edilen alanın merkezine olan uzaklıktır. Buradan $H_{1/3}$ şu şekilde tanımlanabilir.

$$H_{1/3} = \frac{\int_{H_0}^{\infty} Hp(H)dH}{\int_{H_0}^{\infty} p(H)dH} \quad (5.70)$$

burada $p(H)$, 5.66 denkleminde verilen fonksiyondur. İntegral alındığında

$$H_{1/3} = 1.416H_{rms} \quad (5.71)$$

$$H_{1/3} = 4,005\sqrt{m_0} \quad (5.72)$$

Benzer şekilde en büyük onda-bir ve yüzde-bir dalga yüksekliklerinin ortalamaları da ;

$$H_{1/10} = 5,091\sqrt{m_0}$$

$$H_{1/100} = 6,672\sqrt{m_0} \quad (5.73)$$

1000 dalga içerisinde görülebilecek maksimum dalga yüksekliği H_{\max} , $P(H)= 1-1000$

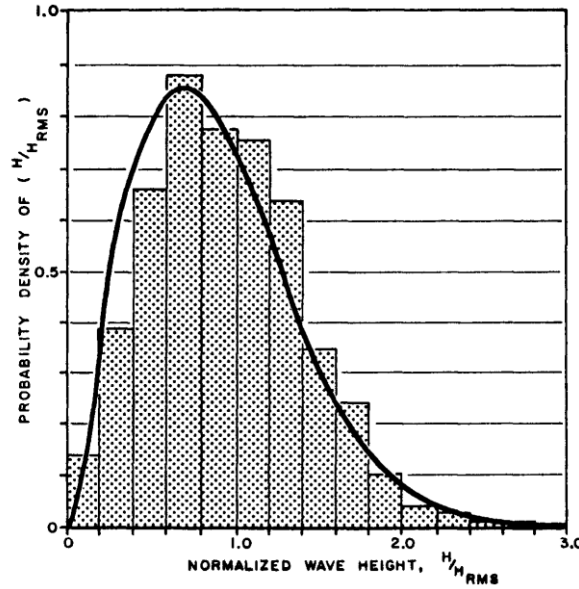
$$\int_0^{H_{\max}} \frac{2H}{H_{rms}^2} \exp\left(-\frac{H^2}{H_{rms}^2}\right) dH \quad (5.74)$$

$$H_{\max} = 1.86H_{1/3} \quad (5.75)$$

Genel olarak N dalga içerisinde gözlenebilecek maksimum dalga yüksekliği **rms** dalga yüksekliğine bağlı olarak 5.17 denklemindeki ilişkiye benzer bir araştırma yaparak elde edilebilir. Kayıtlardan gözlenebilecek maksimum dalga yüksekliği verilen N dalga sayısı için Tablo 5.2 'de gösterilmiştir. Dikkat edilirse 1000 dalga sayısı için 1.86 katsayısı hesaplanmaktadır.

Tablo 5.2. Bir Dar-Band Spektrum Kaydında, N Dalga Sayısının Bir Fonksiyonu Olarak $H_{\max}/H_{1/3}$ Değerleri

N	$\frac{H_{\max}}{H_{1/3}}$
100	1.53
200	1.641
500	1.772
1000	1.866
2000	1.956
5000	2.097
10000	2.150
20000	2.228
50000	2.328
100000	2.401



Şekil 5.6 Açık Deniz Dalgı Kayıtlarından Elde Edilen Normalize Edilmiş Dalgaların Histogramı ile Rayleigh Dağılımının Karşılaştırılması

Eylül 1961 Kuzey Atlantik fırtına dalgı kayıtlarının olasılık yoğunluğu Şekil 5.6 'da Rayleigh dağılımı ile karşılaştırılmıştır. Bu histogram bir kaç gün boyunca fırtına koşullarında kayıtlı edilen çok sayıda dalgı kaydının ortalamasıdır. Bu histogram için her dalgı kaydının **rms** dalgı yüksekliği hesaplanmıştır. Daha sonra bu kaydın dalgı yüksekleri H_{rms} değerine göre normalize edilmiştir. Bu H/H_{rms} , normalize edilmiş değerler bütün dalgı kayıtları için 0.2 değerinde artan sınıf aralıklarında gruplandırılmıştır. Her grubun olasılık yoğunluğu her gruba düşen dalgı sayısının toplam dalgı sayısına bölünerek elde edilmiştir. Bu histogram altındaki alan 1.0 değerine eşittir.

Bir dalgı kanalında benzeştirilen düzensiz dalgı kayıtları ile Rayleigh dağılımının aşılma olasılıkları **Şekil 5.7** 'de noktalanmıştır. Teorik aşılma olasılıkları Rayleigh olasılık kağıdı üzerinde düz bir çizgi olarak gösterilmiştir. Laboratuvar datası Rayleigh dağılımıyla korelasyonu oldukça iyi çıkmıştır. Noktalanmış aşılma olasılıkları aşağıdaki ilişkiden elde edildiğine dikkat edilmelidir.

$$Q(x) = 1 - P(x) \quad (5.76)$$

Burada $Q(x)$, aşılma olasılığıdır.

Kaynak:

Hydrodynamics of Offshore Structures- S. K. Chakrabarti, Sayfa ; 128-165