# Dalga İklimi Dersi

# "Dalga Teorilerine Bir Bakış - Nonlineer Dalga Teorisi"

**Hazırlayanlar :**

**Ceren Bilgin**

**Hakan Karyemez**

**1.Tanımlar:**

Doğadaki hiç bir dalga tam olarak matematiksel bir ifade ile tanımlanamamaktadır. Ancak hesaplamalarda kullanabilmek amacı ile çeşitli yaklaşımlarla dalga formları tanımlanmaya çalışılmaktadır. Bir dalga grubunda bulunan bütün dalgalar matematiksel olarak ifade edilen dalga denklemi formuna uymak zorundadır. Her durumda bu bağımlılık sınır şartlarına bağlıdır. Bu sınır şartları lineer veya nonlineer olarak tanımlanabilmektedir.

**1.2 Dalga dikliği:**

Dalga yüksekliğinin dalga boyuna oranı olarak tanımlanmaktadır. Bu oran büyüdükçe dalga daha dik/sivri bir hal alacaktır.

$H/\lambda$ = dalga dikliği

**1.2.1 Küçük Genlikli Dalgalar:**

$H/\lambda$ oranının sıfıra yaklaştığı yani sonsuz derecede küçük olduğu dalgalar küçük genlikli dalgalardır. Bu dalgaların formu matematiksel olarak sinüs eğrisi ile temsil edilebilmektedir (sinüsoidal dalgalar). Küçük genlikli dalga teorisinin $H/\lambda < 1/20$ olduğu durumlara kadar genellikle doğru sonuç verdiği söylenebilir. Küçük Genlikli Dalgalar matematiksel olarak tanımlanırken sınır şartları lineerize edilmektedir. Yani sınır şartlarındaki ikinci veya daha yüksek mertebeden olan ifadeler ihmal edilmektedir.

**1.2.2 Büyük Genlikli Dalgalar (sonlu yükseklikte dalgalar):**

$H/\lambda$ oranı sonsuz derecede küçük olmayan dalgalardır. Gerçek dalga profili, bir sinüs eğrisine göre daha sivri bir dalga tepesine; ancak daha yayvan bir dalga çukuruna sahiptir. Bu nedenle $H/\lambda$ oranının büyük olduğu zamanlar için gerçeğe daha yakın sonuçlar elde etmek amacı ile nonlineer dalga teorileri geliştirilmiştir.

**1.3. Dalganın denkleminin tanımlanması**

*İki boyutlu sıkıştırılamaz bir akış için süreklilik denklemi:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

*Akış irrotasyonel olduğu için bir hız potansiyelinden de söz edilebilir.*

$$u = \frac{-\partial \phi}{\partial x} \qquad \text{ve} \qquad w = \frac{-\partial \phi}{\partial z}$$

Bu iki denklemin birleştirilmesi ile bir kısmı diferansiyel denklemi olan Laplace denklemi elde edilmektedir. Bu denklem uygun sınır şartlarında çözüldüğünde su dalgalarının davranışının incelenmesinde kullanılabilmektedir.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**1.3.1.Sınır Şartları:**

Potansiyel fonksyonunun çözümü için sınır şartları tabanda ve yüzeyde olmak üzere iki şekilde tanımlanır:

**1.3.1.1.Yatay Taban Sınır Koşulu:**

Dipte akışkan parçacıkları tabandan diğer bir deyişle katı sınırdan geçemez. Yani taban geçirimsiz ve bununla birlikte yatay kabul edilir.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$ z = -h olduğunda

**1.3.1.2.Yüzey Şartları**

*Kinematik serbest su yüzeyi sınır koşulu: (KSSK)*

Serbest su yüzeyinde sıvının bu yüzeyi terketmediği yani z=ζ iken sıvı normal hızı yüzey normal hızına eşit olduğu kabulu yapılırsa kinemtatik su yüzeyi koşulu tanımlanmış olur.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Lineer olmayan terimler ihmal edilirse:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta=0} = 0$$

*Dinamik serbest su yüzeyi sınır koşulu: (DSSK)*

Serbest su yüzeyinde her yerde toplam enerjinin sabit olduğu kabulu ile tanımlanır.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz = C_B(t) \quad \Rightarrow \quad z = \zeta \ (x;t)$$

Lineer olmayan terimler ihmal edilirse:

$$\frac{p}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial t} + gz = C_B(t) \quad \Rightarrow \quad z = \zeta \ (x;t)$$

**2.Büyük Genlikli Dalga Çözümleri**

**2.1. Nonlineer Dalgalar için Stokes'un Pertürbasyon yaklaşımı**

Stokes, sonlu yükseklikteki yer çekimi orijinli dalgaları inceleyebilmek için pertürbasyon teorisinden yararlanarak kendi adıyla anılan Stokes Teorisi'ni geliştirmiştir.Bu teoride hız potansiyeli, dalga profili ve dalga ilerleme hızı boyutsuz bir parametrenin ($\varepsilon$ =ka) kuvvet serileri olarak ifade edilmektedir. Bu seriler sınır ve süreklilik koşullarında yerlerine konulmuştur. Böylece bulunan bağıntılar $\varepsilon$'un artan kuvvetlerine göre düzenlenmek şartıyla, bunlara ait katsayılardan yüksek mertebede dalga teorileri elde edilmiştir. Kullanılan boyutsuz parametreye pertürbasyon parametresi adı verilir.

Problemin çözümü için Laplace denklemini ve ilgili sınır koşullarını boyutsuz formda yazmak gerekmektedir. Bu nedenle yerçekimi ivmesi "g", dalga genliği "a" ve dalga sayısı "k" için bazı boyutsuz değişkenler tanımlanabilir:

X= kx

Z=kz

Π= ζ /a

$$\Phi = \frac{k\phi}{a\sqrt{gk}} \quad , \quad T = \sqrt{gk}t \quad , \quad Q = \frac{k}{g}C_B(t) \quad , \quad \omega = \frac{\sigma}{\sqrt{gk}} \quad , \quad P = \frac{kp}{\rho g}$$

Yeni tanımlanan değişkenlerle Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2} = 0$$

$$P + (ka)^2 \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)^2\right] - (ka) * \frac{\partial\Phi}{\partial T} + Z = Q(t) \quad \Rightarrow$$ Z= kaΠ olduğu zaman

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{\partial\phi}{\partial t} + gz = C_B(t) \quad \Rightarrow$$ z= $\zeta$ (x;t)

serbest su yüzeyinde P=0 alınnacaktır. (ka=0 olduğunda Z=0 olacağını unutmamak gerekir. Bunun anlamı ise bu hallerde dallga olmayacağı yani bulunan sonuçların değersiz olacağıdır) Kinematik serbest su yüzeyi sınır koşulu (KSSK) ise aşağıdaki formu alır

$$\frac{\partial\Pi}{\partial T} - (ka)\frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial\Pi}{\partial X} = -\frac{\partial\Phi}{\partial Z} \quad \Rightarrow$$ Z= kaΠ olduğu zaman

Küçük genlikli dalga teorisinde nonlineer şartlar Z=0 civarinda ortalama su seviyesinde incelenmiş ve $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)^2$ gibi çok küçük büyüklükler ihmal edilmişti. Açıkça görülecektir ki $(ka)^2$ terimi ka ile kıyaslandığında çok daha küçüktür. Ancak pertürbasyon yaklaşımında sonucun $\varepsilon$ ile tanımlanan ka büyüklüğüne bağlı olduğu kabul edilmektedir. Buna bağlı olarak lineer çözüm $\varepsilon$ ye bağlı değilken ikinci, üçüncü mertebeden çözümler $\varepsilon^2$ , $\varepsilon^3$ gibi büyüklüklere bağlı olacaktır. Bu nedenle bütün büyüklükleri $\varepsilon$ ya bağlı bir seriler olarak tekrar ifade edebiliriz:

$$\Pi = \Pi_1 + \varepsilon\Pi_2 + \varepsilon^2\Pi_3 + \ldots\ldots$$

$$\Phi = \Phi_1 + \varepsilon\Phi_2 + \varepsilon^2\Phi_3 + \ldots\ldots$$

$$Q(t) = \varepsilon Q_1(T) + \varepsilon^2 Q_2(T) + \varepsilon^3 Q_3(T) + \ldots\ldots$$

$$\omega = \omega_1 + \varepsilon\omega_2 + \varepsilon^2\omega_3 + \ldots\ldots$$

Serbest su yüzeyinin (Z= kaΠ(X,T) )konumunu bilmediğimiz için nonlineer serbest su yüzeyi koşullarını Z=0 civarında $\varepsilon\Pi$ 'ye bağlı olarak tekrar yazarsak ve pertürbasyon çarpanlarını yukarda tanımladığımız $\Pi, \Phi ve Q(t)$

tanımladığımız denklemlerinde yerine koyarsak dinamik ve kinematik serbest su yüzeyi koşulları sırası ile aşağıdaki şekilleri alırlar:

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z}\right)^2\right]-\frac{\partial\Phi_1}{\partial T}-\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial T}+\Pi_1+\varepsilon\Pi_2+\varepsilon\Pi_1\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial X\partial Z}\right)....=Q_1(T)+\varepsilon Q_2(T)... \quad \text{Z=0 iken } \mathit{DSSK}$$

$$-\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z}-\varepsilon\frac{\partial\Phi_2}{\partial Z}-\frac{\partial\Pi_1}{\partial T}-\varepsilon\frac{\partial\Pi_2}{\partial T}+\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial X}\frac{\partial\Pi_1}{\partial X}-\varepsilon\Pi_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial^2 Z}....=0 \qquad \text{Z=0 iken } \mathit{KSSK}$$

Başlangıçta nonlineer olan sınır değer problemi bu şekilde mertebeleri artan sonsuz lineer denklemler serisi şeklinde tekrar yazılmış oldu. Bundan sonra denklemleri pertürbe ederek mertebelerine göre ayırmak mümkündür. Bu prosedür sonunda birinci ve ikinci mertebeden pertürbasyon sonuçları aşağıda verilmektedir.

<u>Birinci mertebeden pertürbasyon denklemleri:</u>

Birinci mertebeden pertürbasyon sonuçları daha yüksek mertebeler içermediği için lineer denklemle aynıdır:

$$\Phi=-\frac{\cos(kh+Z)}{\omega\cosh kh}\sin(X-\omega t)$$

$$\Pi=\cos(X-\omega T)$$

$$\omega_1^2=\tanh kh$$

$$Q_1(T)=0$$

<u>İkinci mertebeden pertürbasyon denklemleri:</u>

$$\phi=\varepsilon\phi_1+\varepsilon^2\phi_2$$

$$\phi=-\frac{H_1 g}{2\sigma}\frac{\cosh k(h+Z)}{\cosh kh}\sin(X-\sigma t)-\frac{3}{32}H_1^2\sigma\frac{\cosh 2k(h+Z)}{\sinh^4 kh}\sin 2(X-\sigma t)$$

$$\zeta=\varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2$$

$$\zeta=\frac{H_1}{2}\cos(kx-\sigma t)+\frac{H_1^2 k}{16}\frac{\cosh kh}{\sinh^3 kh}(2+\cosh 2kh)\cos 2(kx-\sigma t)$$

$$\sigma_1^2=gk\tanh kh$$

Stokes açılımının geçerliliğinin bir ölçüsü $\phi$ serilerinin kesişip kesişmediğidir (convergence). Kesişme ile ifade edilen $\phi$ serilerinin ikinci mertebeden pertürbasyon terimlerinin birinci mertebeden pertürbasyon terimlerine oranı 1'den küçük olma durumudur.

$$R=\frac{\varepsilon\phi_2}{\phi_1}=\frac{3}{8}\frac{ka\cosh 2kh}{\cosh kh\sinh^3 kh}<<1$$

Derin sularda ( kh> $\pi$ olduğu durumda) hiperbolik fonksyonun asimptotik formu R değerini düşürmektedir ve R oranı

$$R = 3e^{-2kh}ka$$

şeklini almaktadır. Derin sular için ka değerinin küçük olması nedeni ile R değeri de çok küçük olacaktır. Derin sularda dalganın dikliğinin maksimum olduğu hallerde görülebilecek değerler kh= $\pi$ ve ka= $\pi/7$ olacağı için R oranı

$$R = \frac{3\pi}{7}e^{-2\pi} = 0{,}0025$$

olacaktır. Ancak sığ sularda kh< $\pi/10$ iken hiperbolik fonsyonlar asimptot değerleri ile yer değiştirdiğinde

$$R = \frac{3}{8}\frac{ka}{k^3h^3} = \frac{3}{64\pi^2}\left(\frac{L^2H}{h^3}\right) < 1$$

olacaktır. Sığ sularda göreceli derinlik kh önemli bir parametre olmaktadır. kh = $\pi/10$ olduğunda maksimum dalga genliği su derinliğinin ¼'üne ulaşmaktadır. Bu değer sığ sularda artacaktır ve genlik su derinliğinin 0.4'üne eriştiği zaman dalga çatlamaya başlayacaktır. Bu nedenle sığ sulardaki yüksek dalgalar için Stokes açılımı sadece ikinci mertebeye kadar yapılmışsa çok doğru sonuçlar vermeyecaktir.

**2.2. Akım Fonksyonu Dalga Teorisi:**

Stokes Teorisinin yüksek mertebeli çözümlerde hesaplanması zor olması nedeni ile bilgisayar ortamında ya da daha faklı şekillerde hesaplanması kolay teorilere ihtiyaç duyulmuştur. Bunlardan biri Dean'in geliştirdiği Akım Fonksyonu Dalga Teorisidir.

Schwarz tarafından bulunan ve Cokelet tarafından geliştirilen bir yöntemle ise çatlama noktasında dalga yüksekliği dailk olmak üzere su dalgaların karekteristiklerini hesaplamak imümkün olmuştur. Bu yöntem Furier serisi içinde kompleks potansiyel bir çözümü tanımlamayı ve furier çarpanınlarını içermektedir. Furier çarpanları pertürbasyon terimleri şeklindedir.

Bu yöntemde akım fonskyonu kordinat sistemi dalga hızı ile hareket edecek şekilde yazılır ve sınır koşılları tekrar düzenlenir. Koordinat sisteminin hareket etmesinin avantajı ise problemin hareketsiz gibi çözülmesini sağlayarek sınır koşullarından gelen bilinmeyenlerin sayısını düşürmektir.

$\nabla^2\psi = 0$ Akış boyunca

$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] + g\,\zeta = Q_B \Rightarrow$ z= $\zeta$ (x) iken sabit bir değer DSSK

$-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ z= $\zeta$ olduğu zaman KSSK

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$ Z=-h iken

$$\psi(x,z) = Cz - \frac{Hg}{2\sigma}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos kx$$

Akım potansiyelini Ninci mertebeden tanımlarsak

$$\psi(x,z) = Cz + \sum_{n=1}^{N} X(n)\sinh\{nk(h+z)\}\cos nkx$$

**2.3.Cnoidal Dalga Teorisi:**

Cnoidal dalga teorisi 1/50<h/L<1/10 olduğu zamanlarda geçerli olmaktadır. Bununla birlikte bu aralıkta bazı kısmlarda hem Stokes hem de faha sonra üzerinde durulacak olan Soliter (tek) dalga teorileri de geçerli olmaktadır. Bu teori eliptik fonsksyonlarla ifade edilmekte ve cnoidal terimi "eliptic cosine" fonksyonunun kısaltması cn.'den gelmektedir.

Bu teoride yüzey profili Keulegan tarafından şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\zeta = -a_t + (a_c + a_t)cn^2\left[\sqrt{\frac{3}{4}\frac{a_c + a_3}{h^3}}(x - Ct), \sqrt{\frac{a_c + a_t}{a_c + a_3}}\right]$$

$a_c$ : durgun su hattından dalga tepesine olan mesafe

$a_t$ : durgun su hattından dalga çukuruna olan mesafe

$a_3$ :geometrik bir özelliği olmayan ancak uzunluk boyutunda bir terim.

Cnoidal dalganın hızı ise

$$C^2 = gh\left[\left(1 + \frac{a_c}{h}\right)\left(1 - \frac{a_t}{h}\right)\left(1 - \frac{a_3}{h}\right)\right]$$

şeklindedir. Housley ve Taylor tarafından yapılan deneyler Cnoidal teorinin dalga hızını 1/100<h/L<1/10 aralıklarında tanımlayabildiğini göstermiştir.

**2.4.Soliter Dalga Teorisi:**

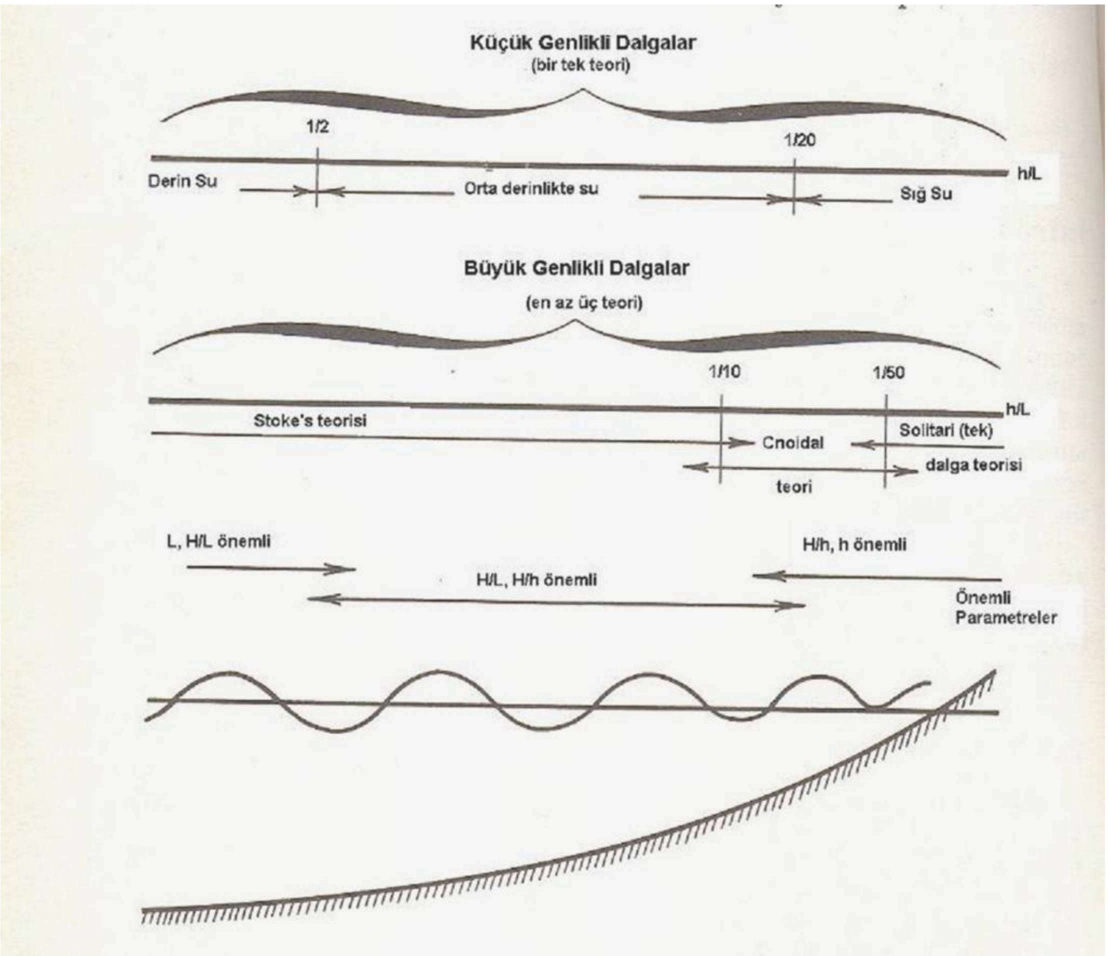
Osilasyon yapan bir dalga sığlaşan suda ilerledikçe dalga tepesi genliği $a_c$ , dalga çukuru genliğine $a_t$'ye kıyasla artan bir şekilde büyümektedir.Aynı zamanda dalga çukuru uzayıp düzleşirken, dalga tepesi ksalıp dikleşmektedir.Bu şartlar altında dalga karakteristikleri dalga boyu ve periyodundan bağımsız olarak, derinlik ve dalga yüksekliğinin fonksyonu olarak tanımlanabilir.

Bu durumda yüzey profili, x orijini dalga tepesindeyken

$$\zeta = H\left[\sec h\sqrt{\frac{3H}{4h^3}}(x - Ct)\right]^2$$ şeklinde tanımlanabilir. Hız ise;

$$C = \sqrt{g(H + h)}$$ olarak tanımlanır.

### 3. Dalga Teorilerinin Geçerli Olduğu Haller




**Kaynaklar:**


- Sabuncu, T., Gemi Hareketleri,İ.T.Ü. Yayınları, 1983
- Dean, R.,G., Dalrymple, R., A., Advanced Series in Ocean Engineering-Vol.2 "Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists,Prentice Hall, Inc, 1984
- Ippen A., T., Eustary and Coastline Hydrodynamics, McGraw-Hill Book Company, 1966
- Kapdaşlı, S., Kıyı Mühendisliği, İ.T.Ü. Yayınları, 1992