LİNEER DALGA TEORİSİ

Giriş

Dalgalar, gerçekte viskoz akışkan içinde, irregüler ve değişken geçirgenliğe sahip bir taban üzerinde ilerlerler. Ancak, çoğu zaman akışkan hareketi neredeyse irrotasyoneldir. Bunun nedeni, viskoz etkilerin genellikle yüzeye ve tabana yakın bölgelerdeki ince "sınır tabaka" larda yoğunlaşmasıdır. Su da sıkıştırılamaz bir akışkan olarak kabul edilebileceği için dalgalar için de bir hız potansiyeli ve akım fonksiyonu mevcuttur.

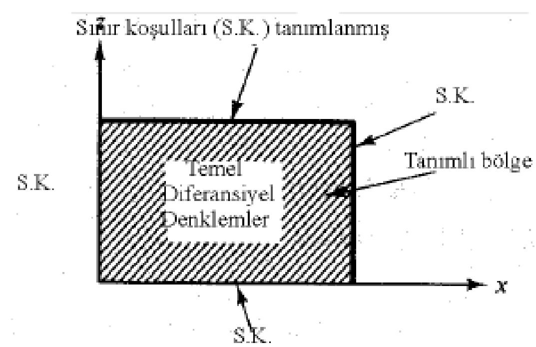
Dalgaların gerçek davranışı, mühendislik uygulamalarına adapte edilmek amacıyla basitleştirilebilir. Küçük genlikli dalgalarda (yani dalga yüksekliğinin, dalga boyu ve su derinliğine oranla çok küçük olması durumunda) lineer teori kullanılabilir. Lineer teoride yapılan kabuller şunlardır;

- Sıvı viskozitesiz ve sıkıştırılamayan cinsten, yoğunluk sabit
- Yüzey gerilimi ihmal edilebilir
- Coriolis etkisi ihmal edilebilir
- Basınç serbest yüzeyde üniform ve sabit
- Dalga diğer su hareketlerinden bağımsız
- Dalga iki boyutlu ve küçük genliğe sahip

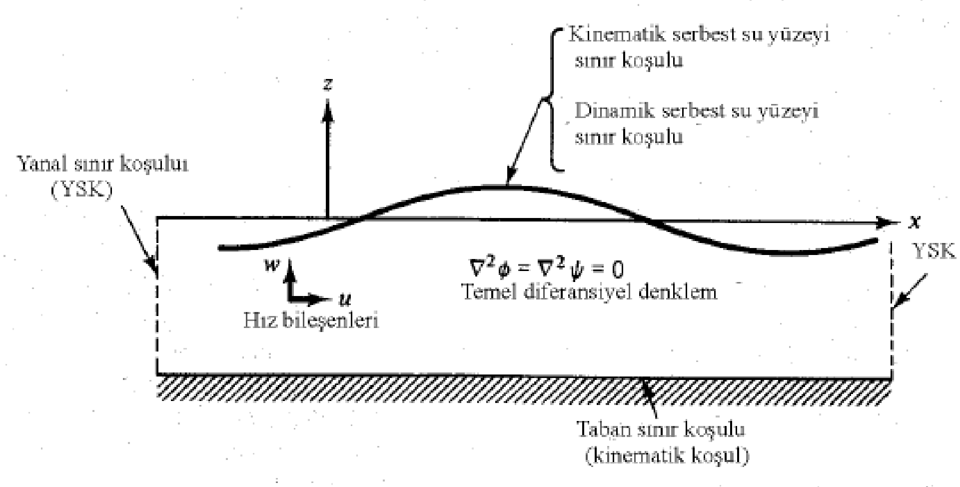
Lineer dalga teorisi, potansiyel teoriye ait basit bir sınır değer problemidir.

Sınır Değer Problemleri

Birçok klasik fizik problemi ve mühendislik alanındaki çoğu analitik problem sınır değer problemi olarak karşımıza çıkar.



(a)



(b)

Temel Diferansiyel Denklemler
İrrotasyonel hareket ve sıkıştırılamaz akışkan kabulleri yapılırsa, süreklilik denklemini sağlayacak aşağıdaki gibi bir hız potansiyeli mevcuttur. Φ: hız potansiyeli   Ψ: akım fonksiyonu

$$\nabla . u = 0 \text{ veya } \nabla . \nabla \phi = 0$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Sıkıştırılamaz ve irrotasyonel akışlar için Laplace denklemi akım fonksiyonuna da uygulanabilir. Sıkıştırılamaz akışkana ait hız değerlerinin irrotasyonalite şartında yerine konmasıyla bu kez akım fonksiyonu için Laplace denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \text{ veya } \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Bu denklem tüm akışkan için geçerlidir. Eğer hareket rotasyonel ancak sürtünmesiz olursa temel denklem şu hali alır;

$$\nabla^2 \psi = \omega \ (\omega : \text{vortisite})$$

Sınır Şartları
Aşağıda çözümü verilecek olan lineer dalga teorisi, daha önce de bahsedildiği gibi potansiyel teoriye ait basit bir sınır değer problemidir. Dolayısıyla, elde edilecek olan çözümlerin dalga hareketindeki sınır şartlarını gerçeklemeleri gerekir. Bu sınır şartları;

- Dinamik su yüzeyi sınır şartı
- Kinematik su yüzeyi sınır şartı
- Yatay taban sınır şartı

şeklindedir.

Dinamik Su Yüzeyi Sınır Şartı
Sabit yüzeyler için sınır şartını tanımlamak nispeten daha kolaydır. Sabit yüzeyler basınç
değişimlerine karşı koyabilirler. Ancak hava-su arayüzeyinde olduğu gibi "serbest" yüzeyler basınç değişimlerine karşı koyamazlar ve basıncın üniform olarak kalması için tepki verirler. Dinamik serbest su yüzeyi şartı olarak adlandırılan sınır şartı da herhangi bir serbest yüzey veya ara yüzeyde basınç dağılımını tanımlamak için gereken şarttır.
Serbest yüzeyin yer değiştirmesinin ilginç yanlarından biri üst sınırın önceden bilinmemesidir. Serbest yüzeydeki basıncın dalga boyunca üniform olması için gerekli dinamik serbest yüzey sınır şartı için serbest yüzeye, z=η(x,t)'ye, pη=sabit olacak şekilde Bernoulli denklemi uygulanır.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p_\eta}{\rho} + gz = C(t)$$

burada, p_η sabittir ve genellikle geyc basıncı, p_η=0 olarak alınır. Verilen bağıntıdaki lineer olmayan $\frac{1}{2} V^2$ terimi de ihmal edilirse;

$$z = \eta \text{ için } g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

elde edilir. Lineer dalga teorisi, dalga yüksekliğinin dalga boyuna nazaran çok küçük olduğu varsayımına dayanır. Buna göre, yukarıdaki denklemin, serbest su yüzeyi yerine durgun su yüzünde geçerli olduğunu kabul etmekte bir sakınca yoktur. Böylece;

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

denklemi ile dinamik su yüzeyi sınır şartı elde edilmiş olur.

Kinematik Su Yüzeyi Sınır Şartı

Bir dalganın serbest su yüzeyi F(x,y,z,t)=η(x,y,t)-z=0 olarak tanımlanabilir. Burada η(x,y,t) serbest yüzeyin z=0 yatay düzleminden olan mesafesidir. Serbest su yüzeyinde sıvının bu yüzeyi terkedemediği ve serbest su yüzeyinde her nokta için sıvı normal hızının yüzey normal hızına eşit olduğu kabulü yapılırsa, kinematik su yüzeyi sınır şartı tanımlanmış olur. Bu da, serbest su yüzeyi denkleminin hareketi takiben alınmış türevinin sıfıra eşitlenmesine denktir. Buna göre kinematik su yüzeyi şartı ;

$$\frac{d}{dt}(\eta - z) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

olur. Lineer teoriye uygun olarak, lineer olmayan daha küçük mertebedeki terimleri ihmal etmek suretiyle lineerleştirilmiş kinematik su yüzeyi şartı ;

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\eta=0} = 0$$

haline gelir.

Kinematik ve dinamik su yüzeyi sınır şartı olarak verilen iki denklem birleştirilerek tek bir su yüzeyi sınır şartı elde edilebilir ;

$$\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=\eta=0} = 0$$

Yatay Taban Sınır Şartı

Suyun d derinliğinde yatay bir tabanla sınırlandırılmış olduğu kabul edilirse, taban boyunca sıvıya ait düşey hızların sıfır olması gerekir.

$$w\Big|_{z=-d} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Sıvıya ait yoğunluğun sabit ve hareketin potansiyel olması nedeniyle ele alınan problemde süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

şeklinde yatay taban sınır şartı haline gelir.

Lineer Dalga Teorisine Göre Dalga Karakteristikleri

Bir dalga tarafından, bir dalga periyodu kadar sürede alınan mesafe dalga boyuna eşit olduğundan, dalga hızı şu şekilde verilebilir;

$$C = \frac{L}{T}$$

Lineer dalga teorisi ile, dalga boyu ve su derinliğine bağlı olarak verilen hız ifadesi;

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh(\frac{2\pi \cdot d}{L})}$$

Dalga boyu;

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \cdot \tanh(\frac{2\pi \cdot d}{L})$$

Açısal frekans;

$$\frac{w^2}{g} = \frac{2\pi}{L} \cdot \tanh(\frac{2\pi \cdot d}{L})$$

Periyod;

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

şeklindedir.

Dalga Karakteristiklerinin Su Derinliğine Bağlı Değişimi

Deniz derinliğinin değişmesiyle dalga karakteristikleri de değişime uğrar. Su sığlaştıkça dalga hızı (c) ve dalga boyu (L) küçülür, dalga periyodu (T) sabit kalır. Deniz derinliği konusu bağıl derinlik (d/L oranı) ile incelenir. Buna göre derinlik sınıflandırması şu şekildedir:

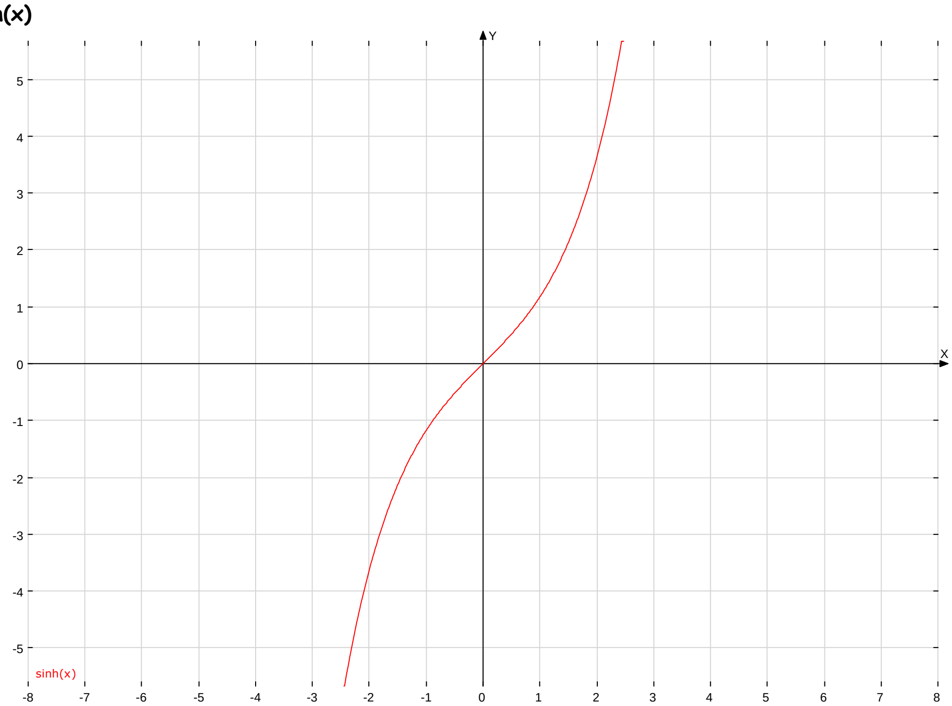
Sınıflandırma	**d/L**	**kd = 2πd/L**
Derin su dalgası	> 1/2	> π
Geçiş derinliği	1/25 ile 1/2 arası	1/4 ile π arası
Sığ su dalgası	< 1/25	< 1/4

Çeşitli dalga karakteristiklerine ait formüllerde, çok sığlaşma ve çok derinleşmeye göre, hiperbolik fonksiyonların aldığı limit değerlerde önemli basitlikler sağlanır:

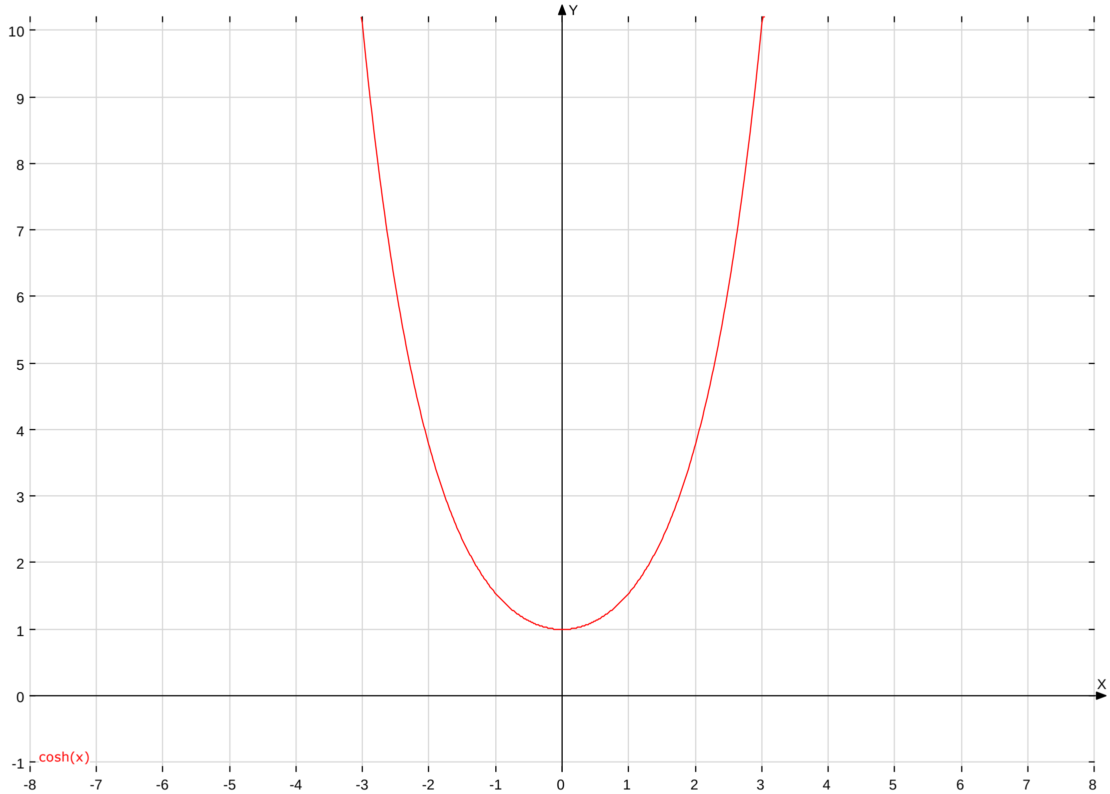
Fonksiyon	**Sığ Su**	**Derin Su**
sinh(kd)	kd	$e^{kd}/2$
cosh(kd)	1	$e^{kd}/2$
tanh(kd)	kd	1

Hiperbolik fonksiyonlara ait grafikler;

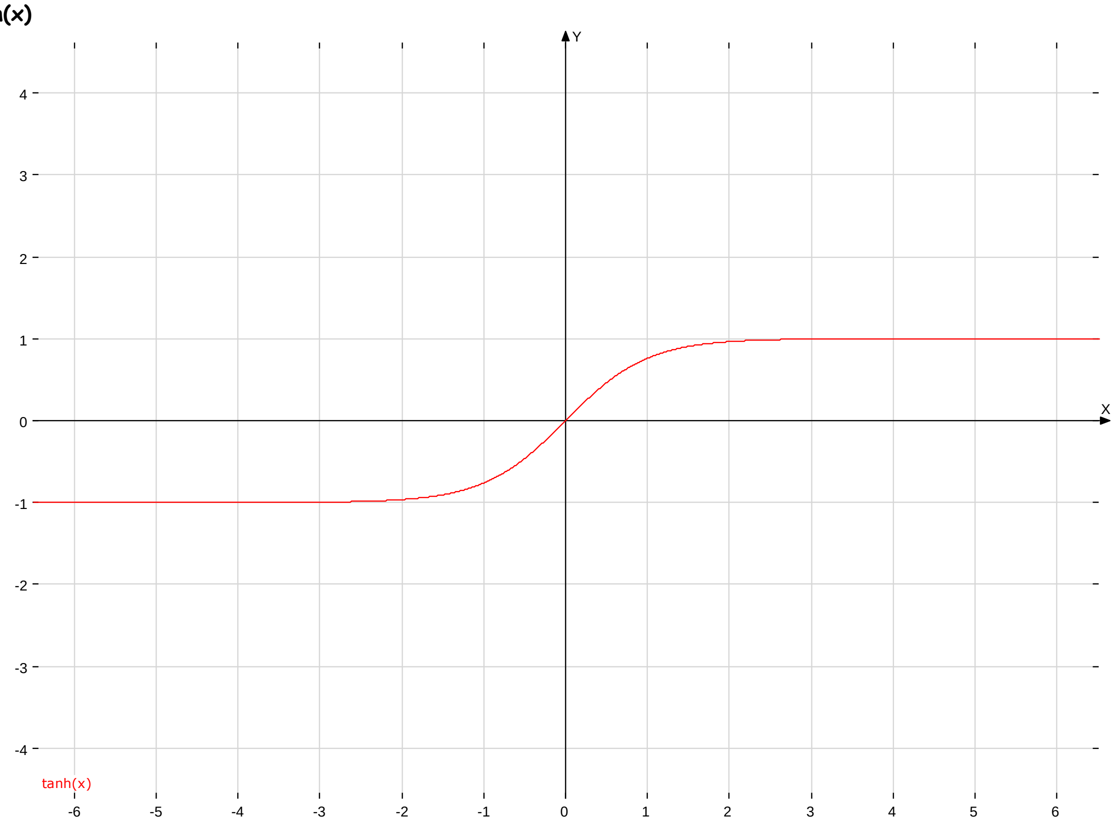
sinh(x)



cosh(x)



tanh(x)



Geçiş derinliği söz konusu olduğunda, yukarıda dalga karakteristikleri için verilen denklemler kullanılır. Derin su ve sığ su hali için ise hiperbolik fonksiyonların limit değerleri kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilmiştir.

1. Derin Su Hali (1/2<d/L)

Derin su hali için hız bağıntısı;

$$C_0 = \sqrt{\frac{gL_0}{2\pi}} \quad \text{ve} \quad C_0 = \frac{gT}{2\pi}$$

Dalga boyu;

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$

Periyod;

$$T = \sqrt{\frac{2\pi \cdot L_0}{g}}$$

2. Sığ Su Hali (d/L<1/25)

Sığ su için verilen dalga karakteristikleri ;

$$C = \sqrt{g \cdot d}$$

$$L = \sqrt{gT^2 \cdot d}$$