

YÖNLÜ EN DÜŞÜK TOPLAM DEĞİŞİNTİ DIRECTIONAL TOTAL VARIATION MINIMIZATION

İlker Bayram

Mustafa E. Kamaşak

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi
ibayram@itu.edu.tr

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi
kamasak@itu.edu.tr

ÖZETÇE

En düşük toplam değişinti (TD) görüntülerdeki ani değişimleri değişim yönü ayırt etmeksizin cezalandıran eşyönlü bir fonksiyoneldir. Genel olarak, imgelerde bulunan nesnelere baskın bir yön bulunmadığı için eşyönlü TD değişik uygulamalarda sıklıkla imge önseli (prior) olarak kullanılmaktadır. Bazı durumlarda ise imge içerisindeki nesnelere baskın bir yön bulunabilir. Bu gibi durumlarda eşyönlü TD yerine yönlü TD kullanılabilir. Bu bildiride yönlü TD 'nin ne şekilde gerçekleştirilebileceği anlatılmakta ve gürültü giderme uygulaması gösterilmektedir.

ABSTRACT

Total variation minimization (TVM) is an isotropic functional that penalizes the abrupt changes in all directions in the images. Isotropic TVM is frequently used as image prior as there are typically no dominant direction of the objects in the images. However, in some cases, objects in the image may have a dominant direction. In these cases directional TVM can be preferred instead of isotropic TVM. In this work, implementation of directional TVM is described and its application for image denoising is demonstrated.

1. GİRİŞ

Toplam değişinti (TD) imgelerdeki ani değişimleri cezalandırır. Böylelikle Şekil 1a gibi imgelerde oldukça etkili bir önsel olarak kullanılabilirler. Normal toplam değişinti eşyönlü (isotropic) bir fonksiyon olmasından dolayı Şekil 1b'deki gibi bir yöne baskın nesnelere içeren imgeler için çok uygun değildir. Bu tür imgeler için yönlü TD kullanılabilir. Bu çalışmada yönlü TD 'nin gerçekleştirilmesi tarif edilmekte ve gürültü giderme uygulaması gösterilmektedir.

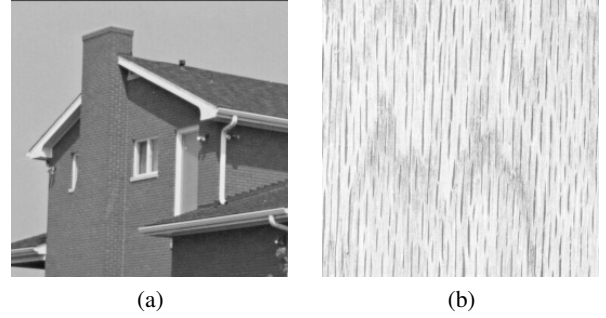
Ayrık uzay imgelerde $f(i, j)$ TD şu şekilde ifade edilebilir:

$$TD(f) = \sum_{i,j} \sqrt{(\Delta_1 f(i, j))^2 + (\Delta_2 f(i, j))^2}. \quad (1)$$

Bu ifadede Δ_1 ve Δ_2 yatay ve dikey fark işlemlerini tarif etmekte olup aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\Delta_1 f(i, j) = f(i, j) - f(i - 1, j), \quad (2)$$

$$\Delta_2 f(i, j) = f(i, j) - f(i, j - 1). \quad (3)$$



Şekil. 1: Toplam değişinti (a)'daki gibi parçabaşı-pürüzsüz (piecewise smooth) imgeler için basit ve etkili bir önseldir (prior). Bu çalışmada, (b)'deki gibi baskın yöne sahip imgeler için yönlü bir toplam değişinti tanımlıyoruz.

TD ifadesi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$TD(f) = \sum_{i,j} \|\Delta f(i, j)\|_2 = \sum_{i,j} \sup_{t \in B_2} \langle \Delta f(i, j), t \rangle. \quad (4)$$

Bu ifadedeki Δ

$$\Delta f(i, j) = \begin{pmatrix} \Delta_1 f(i, j) \\ \Delta_2 f(i, j) \end{pmatrix} \quad (5)$$

şeklinde doğrusal bir işlemi ve B_2 ise ℓ_2 normunun birim küresini ifade etmektedir. Bu noktadan sonra Δ 'yı (5)'te tanımlanan doğrusal dönüşüm için kullanacağız.

TD, imgeler için dönme-değişken (rotation variant) olmadığı için eşyönlü bir ifadedir. B_2 yerine farklı kümeler kullanarak yönlü TD elde edilebilir. Özellikle, Şekil 2'de gösterildiği gibi yatay eksenden θ açısı kadar döndürülmüş, birim kısa eksene ve $\alpha > 1$ uzun eksene sahip bir elips $E_{\alpha, \theta}$ kullanırsak, ortaya çıkan norm

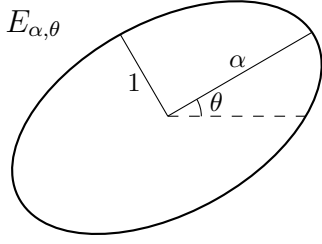
$$TD_{\alpha, \theta}(f) = \sum_{i,j} \sup_{t \in E_{\alpha, \theta}} \langle \Delta f(i, j), t \rangle \quad (6)$$

şeklinde olacaktır. Bu norm θ^\perp (θ yönüne dik) yönündeki değişikliklere karşı daha hassas olacaktır.

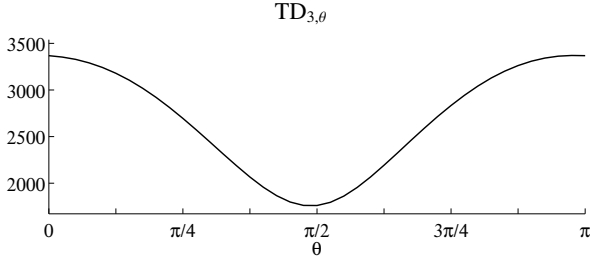
Tarif edilen yönlü TD, imgelerde gürültü giderme uygulamalarında düzenleme amacı ile kullanılabilir:

$$f^* = \underset{f}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|y - f\|_2^2 + \lambda TD_{\alpha, \theta}(f). \quad (7)$$

Bu denklemde y elde bulunan gürültülü imgeyi ifade etmektedir. Yönlü TD'nin kullanımını göstermek amacı ile bu problemi çözen bir yöntem geliştirilmektedir.



Şekil 2: Elips $E_{\alpha, \theta}$ yönlü TD normunu tanımlamak için kullanılmaktadır.



Şekil 3: Şekil 1b'deki imgenin yönlü TD normunun θ parametresine bağlı olarak değişimi. Burada, α parametresini 3'e eşitlenmiştir. Fonksiyonun, (baskın bir dikey yönlenmeden ötürü) beklendiği gibi $\pi/2$ civarında en küçük değerini aldığı görülmektedir.

1.1. Varolan çözümler

Toplam değişiminin gürültü giderme problemlerinde amaç fonksiyonu olarak kullanılması Rudin, Osher ve Fatemi tarafından [1] önerilmiştir. Yazarlar, aynı makalede öne sürdükleri optimizasyon problemini çözen kısmi türevli denklem tabanlı bir yöntem de sunmuşlardır. Chambolle [2], (7)'nin eşyönlü halinin çözümünü bir izdüşümden faydalanarak nitelendirmiş ve bahsi geçen izdüşümü gerçekleştiren bir yöntem geliştirmiştir. Beck ve Teboulle [3] farklı yinelemelerden faydalanarak yöntemin nasıl hızlandırılabileceğini tartışmıştır. Esedoğlu ve Osher [4] (4)'de B_2 'den farklı kümeler kullanarak daha genel eşyönlü olmayan toplam değişimintiler tanımlamıştır. Yazarlar buna ek olarak (7)'teki problemin çözümlerinin özelliklerini çalışmış, fakat çözümleri elde eden, bu makaledekine benzer bir yöntem geliştirmemişlerdir.

2. YÖNLÜ TD GÜRÜLTÜ GİDERME PROBLEMİ

2.1. Problemin Çözümünün Nitelendirilmesi

(7)'in çözümünü nitelendirmek için, iki bileşenli bir vektör alanı tanımlayalım.

$$T(i, j) = \begin{pmatrix} T_1(i, j) \\ T_2(i, j) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

$T(i, j)$ 'yi kullanarak,

$$TD_{\alpha, \theta}(f) = \sup_{T(i, j) \in E_{\alpha, \theta}} \langle \Delta f, T \rangle \quad (9)$$

yazabiliriz. Aşağıdaki nitelendirme [2, 4]'da bulunabilir.

Önerme 1.

$$T^* = \operatorname{argmin}_{T(i, j) \in E_{\alpha, \theta}} \|f - \Delta^T T\|_2^2, \quad (10)$$

olduğu halde, $P_f = \Delta^T T^*$ olsun. Bu durumda, (7), en küçük değerini $f - P_f$ fonksiyonu için alır.

Problem, esasen bir izdüşüm problemidir. İzleyen bölümde bu izdüşümü gerçekleştiren bir yöntem tarif edilmektedir.

2.2. İzdüşüm Yöntemi

Notasyonu basit tutmak için, bu bölümde $\lambda = 1$ ve $\theta = 0$ olarak alacağız – genel λ ve θ değerlerindeki durumlara geçiş kolaylıkla yapılabilir. Ayrıca, θ sabit olduğu için $E_{\alpha, \theta}$ yerine E_α yazacağız. Amacımız,

$$C(T) = \|f - \Delta^T T\|_2^2 \quad (11)$$

fonksiyonunu, tüm (i, j) 'ler için $T(i, j) \in E_\alpha$ kısıtı dahilinde en aza indirilmektedir. k 'inci yinelemede elimizdeki değer $T^{(k)}$ olsun. Bu durumda, yapmamız gereken, öyle bir $T^{(k+1)}$ bulmaktır ki $T^{(k+1)}(i, j)$ 'in tüm değerleri E_α 'ye ait olsun, ve $C(T^{(k+1)}) \leq C(T^{(k)})$ sağlansın. Bu noktada,

$$C^{(k)}(T) = \left\| \frac{1}{2} \underbrace{(\Delta f + (2I - \Delta \Delta^T) T^{(k)})}_{F^{(k)}} - T \right\|_2^2, \quad (12)$$

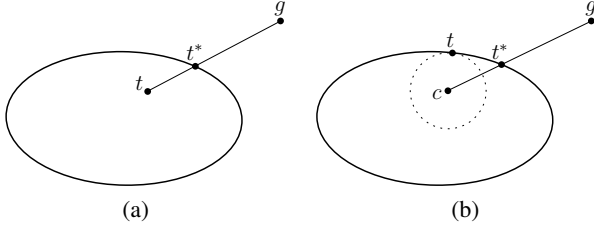
olduğu halde, eğer herhangi bir T için $C^{(k)}(T) < C^{(k)}(T^{(k)})$ ise, $C(T) < C(T^{(k)})$ eşitsizliği de sağlanır. Bu sav, [5]'de bahsedilenlere benzer bir üstselleştirme (majorization) iddiasıyla gösterilebilir. Özetle, k 'inci yinelemede $C^{(k)}$ fonksiyonunu azaltmaya çalışmamız yeterlidir.

$C^{(k)}(T)$ 'nin (i, j) indislerine göre ayrıştırılabilir (separable) olduğunu görüyoruz. Notasyonu daha da basitleştirmek için (i, j) 'yi sabitleyelim ve $t_n = T_1^{(k)}(i, j)$ ve $n = 1, 2$ için $g_n = F_n^{(k)}(i, j)$ alalım. $\|g - t^*\|_2^2 \leq \|g - t\|_2^2$ eşitsizliğini sağlayan, E_α içinde bir t^* bulmak istiyoruz. Üç farklı durum düşünelim:

- (1) $g \in E_\alpha$.
 $t^* = g$ olarak alabiliriz.
- (2) $g \notin E_\alpha$ ve t , E_α 'nin sınırında değil (yani, $t_1^2/\alpha^2 + t_2^2 < 1$).
 t^* 'ı t g doğru parçasının E_α 'nin sınıрыyla kesiştiği nokta olarak alabiliriz (bkz. Şekil 4a).
- (3) $g \notin E_\alpha$ ve t , E_α 'nin sınırında (yani, $t_1^2/\alpha^2 + t_2^2 = 1$).
 E_α içinde, E_α 'ya t noktasında teğet bir disk düşünelim. c diskin merkezi olsun. t^* 'yi c g doğru parçasının E_α 'nin sınıрыyla kesiştiği nokta olarak alabiliriz. (bkz. Şekil 4b).

Son durum için birkaç noktayı göz önünde bulundurmamız gerekiyor. Faydalandığımız fikir Lin ve Han'ın çalışmasından [6] alınmıştır. Yazarlar bahsi geçen makalede iki elipsoidin birbirine en yakın noktalarını bulmaya çalışmaktadır.

- $t_1^2/\alpha^2 + t_2^2 \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan noktalar kümesi olarak tanımlanan E_α elipsini düşünelim. $\alpha \geq 1$, olduğu takdirde, yarıçapı $r = 1/\alpha$ olan bir diski elipsin herhangi bir noktasına teğet olacak şekilde elipsin içinde kalacak şekilde yerleştirebiliriz.
- Eğer r yarıçaplı bu disk elipse (t_1, t_2) noktasında teğetse, (c_1, c_2) olarak ifade edilen merkezi, $s = \sqrt{t_1^2/\alpha^4 + t_2^2}$ olduğu halde $c_1 = t_1 - r t_1/(\alpha^2 s)$, $c_2 = t_2 - r t_2/s$ olur.



Şekil. 4: (a) t elipsin içindeyse, gt doğru parçasının elipsin sınırıyla kesiştiği nokta g 'ye t 'den daha yakındır. (b) t elipsin üzerindeyse ve c elipse t noktasında teğet olup da elipsin içinde kalan bir diskin merkeziyse, t^* , g 'ye t 'den daha yakındır. Bu sav üçgen eşitsizliği kullanılarak gösterilebilir.

- $c \in E_a$ ve $g \notin E_a$ noktalarından geçen doğru parçası E_a 'nin sınırını $t^* = c + th$ noktasında keser. Burada,

$$h = g - c, \quad t = \sqrt{\kappa^2 + \tau} - \kappa, \quad (13)$$

$$\kappa = \frac{h_1 c_1 + \alpha^2 h_2 c_2}{h_1^2 + \alpha^2 h_2^2}, \quad \tau = \frac{\alpha^2 - (c_1^2 + \alpha^2 c_2^2)}{h_1^2 + \alpha^2 h_2^2}.$$

λ , α , θ parametrelerinin istenildiği gibi seçildiği durumda (7)'deki f^* noktasını veren kod taslağı Yöntem 1'de verilmiştir.

3. GÜRÜLTÜ GİDERME DENEYLERİ VE SONUÇLAR

Çalışmada tarif edilen yönlü TD için örnek uygulama olarak imgelerde gürültü giderme kullanılmıştır. Bu amaç ile Şekil 5a ve 6a'da gösterilen doku ve makarna görüntüleri üzerinde deneyler yapılmıştır. Deneyler için kullanılan gri tonlu imgelerin eleman değerleri 0 ile 1 arasında olacak şekilde ölçeklendirilmiştir. Daha sonra bu imgeler üzerine bağımsız ve aynı dağılıma sahip ortalaması sıfır ve standart sapması 0.1 olan Gauss gürültüsü eklenmiştir. Gürültülü imgeler Şekil 5b ve 6b'de gösterilmektedir.

Şekil 5b'de gösterilen doku imgesi eşyönlü TD yöntemi kullanarak gürültüsü giderilmiştir. Denklem (7)'de gösterilen λ değeri ortalama karesel gürültününün karekökünü (OKGK) en aza indirecek şekilde seçilmiştir. Eşyönlü TD ($\alpha = 1$) sonucu Şekil 5c'de gösterilmektedir. Şekil 5b'deki gürültülü imgenin OKGK değeri 0,1009 iken, eşyönlü TD ile gürültüsü giderilmiş Şekil 5c'de gösterilen imgenin OKGK değeri 0,0489 olarak bulunmuştur. Dolayısı ile eşyönlü TD ile gürültü görüntü elemanı başına %5,11 oranında giderilmiştir. Gürültülü doku imgesinin yönlü TD ile gürültüsü giderilmiş hali Şekil 5d'de gösterilmektedir. Bu sonuç $\alpha = 5$ ve $\theta = \pi/2$ yönü ile elde edilmiştir. Yönlü TD ile gürültüsü giderilmiş imgenin OKGK değeri 0,0429'dir. Dolayısı ile yönlü TD ile gürültülü imgedeki gürültü ortalama olarak %5,8 oranında giderilmiştir. Yönlü TD yöntemi eşyönlü TD ile karşılaştırıldığında ise görüntü elemanı başına %0,69 oranında daha fazla gürültü gidermiştir.

Benzer şekilde Şekil 6b'de gösterilen gürültülü makarna imgesine eşyönlü TD ve yönlü TD yöntemleri uygulanarak gürültüsü giderilmiştir. Gürültülü makarna imgesinin OKGK değeri 0,1002'dir. Eşyönlü TD yöntemi ile gürültüsü giderilmiş makarna imgesi Şekil 6c'de gösterilmektedir. Bu imgenin OKGK değeri 0,0431 olup, imgedeki gürültü görüntü elemanı

Algorithm 1 Yönlü TD Gürültü Giderme

Girdi: $\lambda, f, \alpha, \theta$; (7)'deki gibi

Çıktı: f^* ; (7)'deki gibi

$n = 1, 2$ için $T_n(i, j) \leftarrow 0$

$$M \leftarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

for iter = 1 **to** MaxIter **do**

for all (i, j) **do**

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \leftarrow M \begin{bmatrix} F_1(i, j) \\ F_2(i, j) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \leftarrow M \begin{bmatrix} T_1(i, j) \\ T_2(i, j) \end{bmatrix}$$

$$s \leftarrow g_1^2/\alpha^2 + g_2^2$$

$$u \leftarrow t_1^2/\alpha^2 + t_2^2$$

if $s \leq 1$ **then**

$$t^* \leftarrow g$$

else

if $u < 1$ **then**

$$c \leftarrow t$$

else

$$p \leftarrow \sqrt{t_1^2/\alpha^4 + t_2^2}$$

$$c \leftarrow t - \frac{1}{\alpha p} \begin{bmatrix} t_1/\alpha^2 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

end if

$$h \leftarrow g - c$$

$$\kappa \leftarrow \frac{h_1 c_1 + \alpha^2 h_2 c_2}{h_1^2 + \alpha^2 h_2^2}$$

$$\tau \leftarrow \frac{\alpha^2 - (c_1^2 + \alpha^2 c_2^2)}{h_1^2 + \alpha^2 h_2^2}$$

$$t^* \leftarrow c + (\sqrt{\kappa^2 + \tau} - \kappa) h$$

end if

$$\begin{bmatrix} T_1(i, j) \\ T_2(i, j) \end{bmatrix} \leftarrow M^T t^*$$

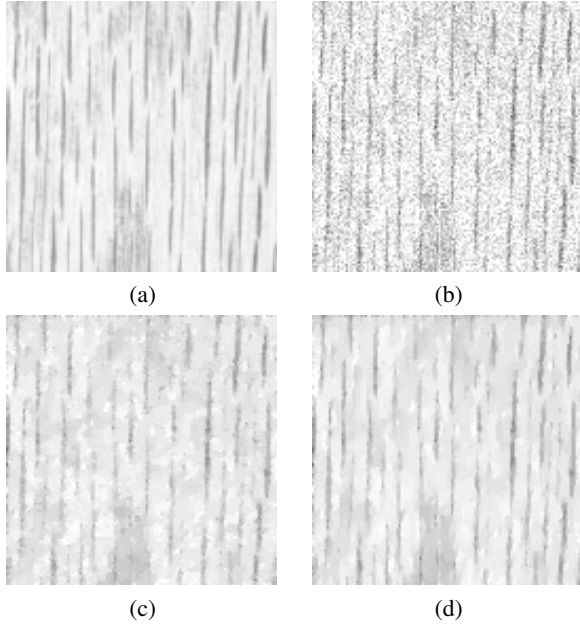
end for

end for

$$f^* \leftarrow f - \Delta^T T$$

başına ortalama %5,71 oranında giderilmiştir. Bu imgedeki makarna nesnelere baskın yönü yaklaşık $\pi/4$ açıdadır. Dolayısı ile yönlü TD yöntemi $\alpha = 5$ ve $\theta = \pi/4$ yönü ile kullanılarak gürültüsü giderilmiştir. Yönlü TD kullanılarak gürültüsü giderilmiş makarna imgesi Şekil 6d'de gösterilmekte olup OKGK değeri 0,0269'dir. Dolayısı ile yönlü TD kullanılarak görüntü elemanı başına ortalama %7,33 oranında gürültü giderilmiştir.

Makarna imgesinin gürültüsü değişik α değerleri ve değişik açılardaki yönlü TD kullanılarak giderilmiştir. Gürültüsü giderilmiş imgelere ait OKGK değerleri Şekil 7'de gösterilmektedir. Yönlü TD yöntemi yöne bağlı olarak farklı oranlarda gürültüyü gidermektedir. Makarna nesnelere baskın yönü yaklaşık olarak $\pi/4$ açısında bulunduğu için yönlü TD yöntemi en düşük OKGK değerini tüm α değerleri için $\pi/4$ açısı etrafında vermektedir. $\pi/4$ yönündeki TD yöntemi sonuçları incelendiğinde küçük α değerinin ($\alpha = 3$) gürültü gidermede yeterince etkin olmadığı görülmektedir. Öte yandan yüksek α değerleri ($\alpha = \{7, 9, 11\}$) doğru yönde gürültüyü etkin



Şekil 5: Doku (a) Gürültüsüz imge (b) Gürültülü imge (c) Eşyönlü EDTD ile gürültüsü giderilmiş imge (d) Yönlü EDTD ile gürültüsü giderilmiş imge.

gidermesine rağmen yönün doğru seçilmediği durumlarda gürültüyü gidermede yetersiz kaldığı görülmektedir.

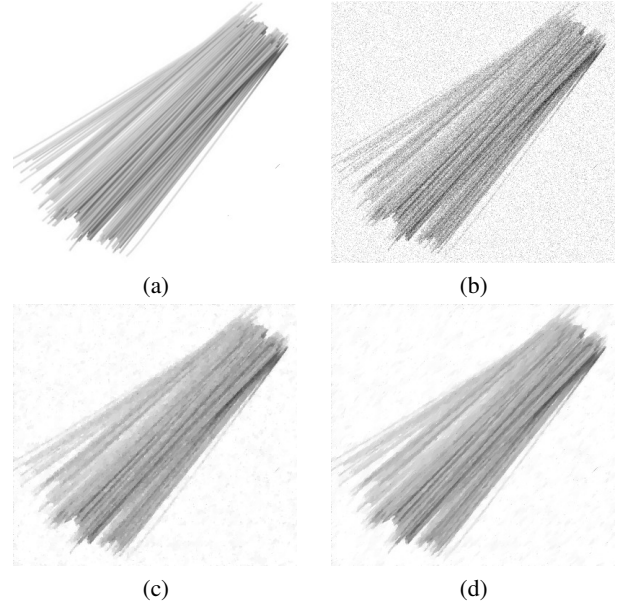
4. SONUÇ

Bu çalışmada yönlü TD yönteminin nasıl gerçekleştirileceği tarif edilmiş ve imgelerde gürültü giderme uygulaması ile deneyler yapılmıştır.

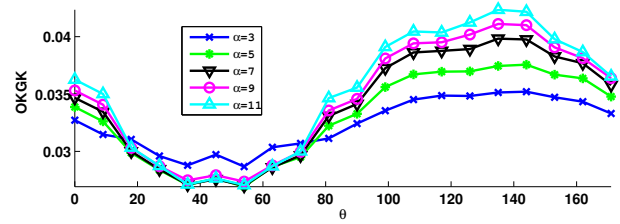
Baskın yönlü nesnelere içeren imgelerde yönlü TD yöntemi eşyönlü TD yöntemi ile karşılaştırıldığında gürültüyü daha fazla giderdiği gözlemlenmiştir.

5. KAYNAKÇA

- [1] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259–268, Nov. 1992.
- [2] A. Chambolle, "An algorithm for total variation minimization and applications," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 20, no. 1-2, pp. 89–97, January-March 2004.
- [3] A. Beck and M. Teboulle, "Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 18, no. 11, pp. 2419–2434, 2009.
- [4] S. Eshedoglu and S. Osher, "Decomposition of images by the anisotropic Rudin - Osher - Fatemi model," *Comm. Pure and Appl. Math*, vol. 57, pp. 1609–1626, 2004.
- [5] M. A. T. Figueiredo, J. M. Bioucas-Dias, and R. D. Nowak, "Majorization-minimization algorithms for wavelet-based image restoration," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 16, no. 12, pp. 2980–2991, Dec. 2007.



Şekil 6: Makarna (a) Gürültüsüz imge (b) Gürültülü imge (c) Eşyönlü EDTD ile gürültüsü giderilmiş imge (d) Yönlü EDTD ile gürültüsü giderilmiş imge.



Şekil 7: Makarna imgesinin değişik α değerleri ve yönlerdeki (θ) TD yöntemi ile gürültüsü giderilmiş imgelerin OKGK değerleri.

- [6] A. Lin and S.-P. Han, "On the distance between two ellipsoids," *SIAM J. on Optimization*, vol. 13, no. 1, pp. 298–308, 2002.