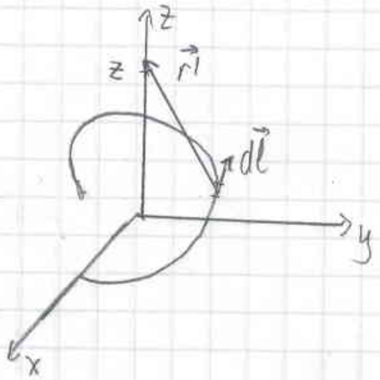
(1)

EM Alanlar 2016 - Vize I

1)



$\vec{r}' = (z - z')\vec{e}_z - a\vec{e}_\rho$

$\vec{r}' = (z - t)\vec{e}_z - a\vec{e}_\rho$

$x' = a\cos t$

$y' = a\sin t$

$z' = t$

$\rho' = a$

$\phi' = t$

$d\vec{l} = dz'\vec{e}_z + a\,d\phi'\vec{e}_\phi$

$d\vec{l} = dt\,\vec{e}_z + a\,dt\,\vec{e}_\phi$

$\Rightarrow dl = |d\vec{l}| = (dt^2 + a^2 dt^2)^{1/2} = \sqrt{1+a^2}\cdot dt$

a) $dq = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot \sqrt{1+a^2}\,dt$

Toplam yük : $Q = \int_{t=0}^{2\pi} dq = \int_{t=0}^{2\pi} \lambda\sqrt{1+a^2}\,dt = 2\pi\lambda\sqrt{1+a^2}$

b) $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3}\,dq = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{t=0}^{2\pi} \frac{\sqrt{1+a^2}}{[(z-t)^2+a^2]^{3/2}}\left[(z-t)\vec{e}_z - a\vec{e}_\rho\right] dt$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\vec{e}_x \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{\sqrt{1+a^2}\;a\cos t}{[(z-t)^2+a^2]^{3/2}}}_{f_1(z,a,t)} dt + \vec{e}_y \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{\sqrt{1+a^2}\;a\sin t}{[(z-t)^2+a^2]^{3/2}}}_{f_2(z,a,t)} dt + \vec{e}_z \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{\sqrt{1+a^2}\,(z-t)}{[(z-t)^2+a^2]^{3/2}}}_{f_3(z,a,t)} dt\right]$$

c) $x = z - t$, $dx = -dt$ için integral:

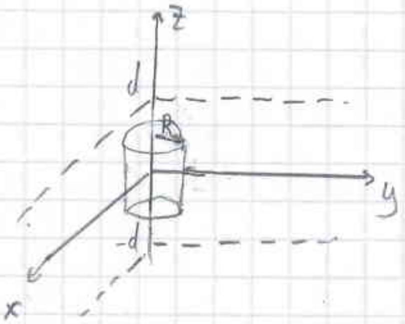
$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{1+a^2}\int \frac{-x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ $\quad u = x^2 + a^2 \quad du = 2x\,dx$ için

$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{1+a^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int\frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}$

Sonuç olarak elektrik alanın z bileşeni

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{1+a^2}\,\frac{1}{\sqrt{(z-t)^2+a^2}}\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{1+a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-2\pi)^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right]$$

2)



Gauss yüzeyi R yarıçaplı silindir yüzeyi

Elektrik alan $z>0$ için $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$

$z<0$ için $\vec{E} = E_z(-\vec{e}_z)$ formunda

Bu yapıda akı sadece silindirin tabanlarından geçer, yan yüzey katkı yapmaz.

$-d<z<d$ bölgesi için silindirin boyu $2z_1$ $(z_1<d)$

$Q = \int \vec{D}\,\vec{ds}$ tabanlar için $\vec{ds} = \rho\, d\phi\, d\rho\,(\pm e_z)$

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} \varepsilon_0 E_z \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z\, \rho\, d\rho\, d\phi + \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} \varepsilon E_z(-\vec{e}_z)\cdot(-\vec{e}_z)\, \rho\, d\rho\, d\phi$$

$$Q = 2\cdot\varepsilon_0 E_z \cdot \pi R^2$$

İçeride kalan yük: $Q = \int_V \rho_V\, dv = \int_{z=-z_1}^{z_1}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} \rho_0 \cdot |z| \cdot \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$

$$\Rightarrow Q = \rho_0 \pi R^2 \cdot \left[\int_{-z_1}^{0} -z\,dz + \int_{0}^{z_1} z\,dz\right] = \rho_0 \pi R^2 z_1^2$$

Buna göre $-d<z<d$ bölgesinde elektrik alan $E_z = \dfrac{\rho_0 z^2}{2\varepsilon_0}(\pm\vec{e}_z)$

Bölgenin dışında silindirin boyu $2z_2$ $(z_2>d)$

içeride kalan yük $Q = \pi R^2 \int_{z=-d}^{d} \rho_0 \cdot |z| \cdot dz = \rho_0 \pi R^2 \cdot d^2$

Buna göre $z>d$ bölgesinde $E_z = \dfrac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$; $z<-d$ bölgesinde $E_z = \dfrac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}_z)$

b) $\vec{E} = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$

$z > d$ için $\dfrac{\partial V_{dış}}{\partial z} = -\dfrac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V_{dış} = -\dfrac{\rho_0 d^2}{2\varepsilon_0} z + C_1$

$z = z_0$ için $V_{dış}(z_0) = -\dfrac{\rho_0 d^2 z_0}{2\varepsilon_0} + C_1 = V_0 \Rightarrow C_1 = V_0 + \dfrac{\rho_0 d^2 z_0}{2\varepsilon_0}$

$z < d$ için $\dfrac{\partial V_{iç}}{\partial z} = -\dfrac{\rho_0 z^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V_{iç} = -\dfrac{\rho_0 z^3}{6\varepsilon_0} + C_2$

$z = d$ sınır yüzeyinde potansiyel sürekli olmalı

$V_{iç}(d) = V_{dış}(d) \Rightarrow C_2 = \dfrac{\rho_0 d^3}{6\varepsilon_0} - \dfrac{\rho_0 d^3}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_0 d^2 z_0}{2\varepsilon_0} + V_0$

3) $\vec{E} = E_\phi \vec{e}_\phi \Rightarrow V = V(\phi)$

Laplace denklemi $\Delta V = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \Rightarrow V(\phi) = A\phi + B$

$\phi = 0$ için $V(0) = B = V_0$

$\phi = \alpha$ için $V(\alpha) = A\alpha + B = V_\alpha \Rightarrow A = \dfrac{V_\alpha - V_0}{\alpha}$

$\Rightarrow V(\phi) = \dfrac{V_\alpha - V_0}{\alpha}\phi + V_0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi = -\dfrac{V_\alpha - V_0}{\alpha}\dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\phi$

b) $\phi = 0$ için sınır koşulu : $\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{s0}$

$\vec{n} = \vec{e}_\phi$ için $\vec{D}_2 = -\varepsilon_r \dfrac{V_\alpha - V_0}{\alpha}\dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\phi$ ve $\vec{D}_1 = 0$ (iletken)

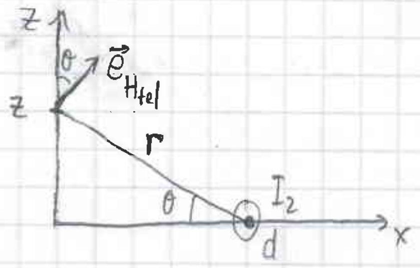
Buna göre yüzey yük yoğunluğu $\rho_{s0} = -\varepsilon_r \dfrac{V_\alpha - V_0}{\alpha}\dfrac{1}{\rho}$ [C/m²]

Toplam yük $Q = \int \rho_{s0}\, ds = \displaystyle\int_{z=0}^{h}\int_{\rho=\rho_1}^{\rho_2} -\varepsilon_r \frac{V_\alpha - V_0}{\alpha}\frac{d\rho}{\rho}\, dz = -\varepsilon_r h \frac{V_\alpha - V_0}{\alpha}\cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ [C]

c) $C = \dfrac{Q}{V_0 - V_\alpha} = \dfrac{\varepsilon_r h}{\alpha} \ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

4) a) Çemberin oluşturduğu manyetik alan: $\vec{H}_{ç} = \dfrac{I_1 a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$

Sonsuz telin oluşturduğu manyetik alanın yönünü gösteren birim vektör:



Burada $\vec{e}_{H_{tel}} = \cos\theta\, \vec{e}_z + \sin\theta\, \vec{e}_x$

$\cos\theta = \dfrac{d}{r}$ ve $\sin\theta = \dfrac{z}{r}$

$r = \sqrt{z^2+d^2}$

Telin z noktasında oluşturduğu manyetik alan:

$$\vec{H}_{tel} = \frac{I_2}{2\pi r} \vec{e}_{H_{tel}} = \frac{I_2}{2\pi \sqrt{z^2+d^2}} \left[\frac{d}{r} \vec{e}_z + \frac{z}{r} \vec{e}_x \right]$$

P noktasındaki toplam alan $\vec{H}_p = \vec{e}_z \left[\dfrac{I_1 a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} + \dfrac{I_2 d}{2\pi r^2} \right] + \dfrac{I_2 z}{2\pi r^2} \vec{e}_y$

b) $d\vec{F} = I_1 (d\vec{l} \times \vec{B})$

$\vec{B}$: I_2 telinin I_1 çerçevesi üzerinde oluşturduğu manyetik alan

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d-x)} \vec{e}_z = x = \cos\phi \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d - a\cos\phi)} \vec{e}_z$$

$d\vec{l} = a\, d\phi\, \vec{e}_\phi$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi (d-\cos\phi)} d\phi \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{d\phi}{d - a\cos\phi} \vec{e}_\rho$$