Elektromagnetik Alanlara Giriş Vize Sınavı (22.04.2016)

1. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = a\sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z = t \end{cases}$$

şeklinde verilmiş olan helisin üzerinde λ $[C/m]$ sabit çizgisel yük yoğunluğu mevcuttur.

a) Helis üzerindeki toplam yük miktarı Q değerini belirleyiniz. Hatırlatma:

$$d\vec{\ell} = h_1 du_1 \vec{e}_1 + h_2 du_2 \vec{e}_2 + h_3 du_3 \vec{e}_3 = h_1 \frac{du_1}{dt} dt\, \vec{e}_1 + h_2 \frac{du_2}{dt} dt\, \vec{e}_2 + h_3 \frac{du_3}{dt} dt\, \vec{e}_3 \quad \text{için}$$

$$d\ell = \left| d\vec{\ell} \right| = dt \sqrt{\left(h_1 \frac{du_1}{dt} \right)^2 + \left(h_2 \frac{du_2}{dt} \right)^2 + \left(h_3 \frac{du_3}{dt} \right)^2}$$

b) Helisin ekseni üzerindeki bir $P(0,0,z)$ noktasında elektrik alanın

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\vec{e}_x \int_{t=0}^{2\pi} f_1(z,a,t)dt + \vec{e}_y \int_{t=0}^{2\pi} f_2(z,a,t)dt + \vec{e}_z \int_{t=0}^{2\pi} f_3(z,a,t)dt \right]$$

formunda ifade edilebileceği belirtilmiştir. $f_1(z,a,t)$, $f_2(z,a,t)$, $f_3(z,a,t)$ fonksiyonlarının açık ifadelerini elde ediniz.

c) $f_3(z,a,t)$ fonksiyonunu içeren integrali hesaplayarak elektrik alanın $\vec{e}_z$ bileşenini belirleyiniz.

2. Boş uzayda $-d \le z \le d$ bölgesinde hacimsel yoğunluğu $\rho_v(z) = \rho_0 |z|$ $[C/m^3]$ olan bir yük dağılımı mevcuttur.

a) Bu bölgenin içinde ve dışında elektrik alan ifadelerini Gauss bağıntısından yararlanarak belirleyiniz.

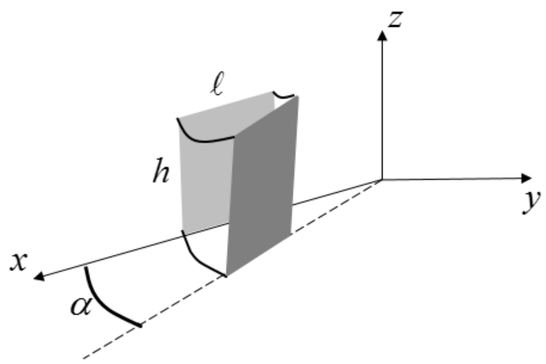
b) $z = z_0$ ($d < z_0$) noktasında elektrostatik potansiyel $V(z_0) = V_0$ olarak ölçülmüştür. $0 < z < d$ ve $d < z$ bölgelerinde potansiyel fonksiyonunun ifadesini belirleyiniz.

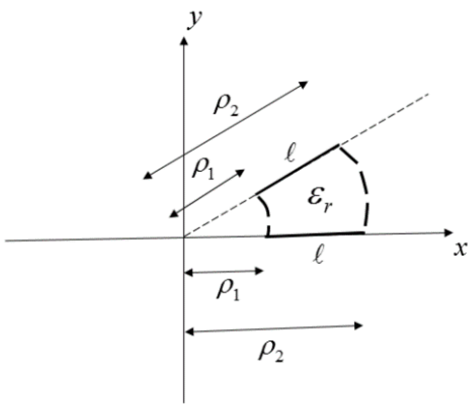
3. $h \times \ell$ boyutlarında özdeş iki iletken plaka aşağıdaki şekillerde gösterildiği gibi $\phi = 0$ ve $\phi = \alpha$ düzlemlerine yerleştirilmiştir. Plakalar arasındaki bölge ε_r sabitli dielektrik malzeme ile doldurulmuştur ve bu bölgede elektrik alanın $E = E_\phi \vec{e}_\phi$ formunda olduğu kabul edilmektedir. $\phi = 0$ düzlemindeki plakanın potansiyel değeri V_0, $\phi = \alpha$ düzlemindeki plakanın potansiyel değeri ise V_α olarak verilmiştir.

a. Plakalar arasındaki bölgede elektrik alanın ifadesini elde ediniz.

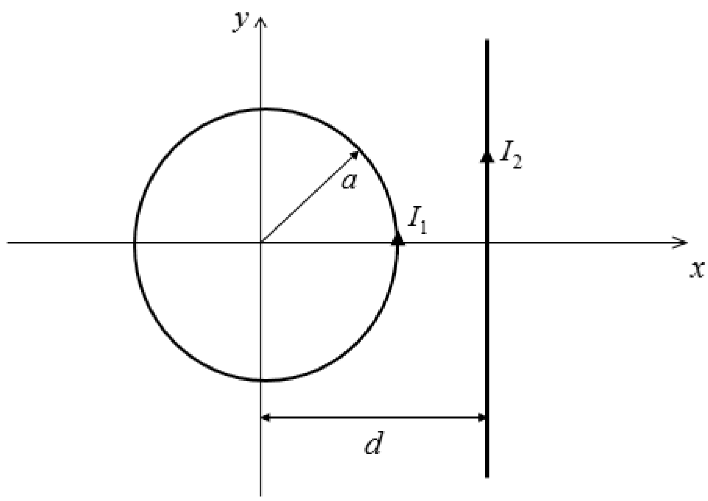
b. $\phi = 0$ düzlemindeki plakanın üzerindeki yük yoğunluğunu ve toplam yük miktarını belirleyiniz.

c. Sistemin kapasitesini bulunuz.





4. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi üzerinden I_1 akımı akan çember şeklindeki a yarıçaplı çerçeve ve üzerinden I_2 akımı akan sonsuz uzun tel xy düzlemine yerleştirilmiştir.
   a) a yarıçaplı çerçevenin ekseni üzerindeki bir $P(0,0,z)$ noktasında toplam manyetik alanın büyüklüğünü ve yönünü belirleyiniz.
   b) Üzerinden I_2 akımı akan sonsuz uzun telin a yarıçaplı çerçeveye etki ettirdiği toplam manyetik kuvvetin yönünü belirleyiniz ve büyüklüğünü integral formunda ifade ediniz. (İntegraldeki terimlerin ve integral sınırlarının açık ifadelerini yazınız.)



Kartezyen Koordinat Sistemi	*Silindirik Koordinat Sistemi*	*Küresel Koordinat Sistemi*
(x,y,z)	(ρ,ϕ,z)	(r,θ,ϕ)
$(h_1=h_2=h_3=1)$	$(h_1=1,\ h_2=\rho,\ h_3=1)$	$(h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=r\sin\theta)$
$d\vec{\ell}=dx\vec{e}_x+dy\vec{e}_y+dz\vec{e}_z$	$d\vec{\ell}=d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\phi\vec{e}_\phi+dz\vec{e}_z$	$d\vec{\ell}=dr\vec{e}_r+rd\theta\vec{e}_\theta+r\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi$
$d\vec{S}_x=dydz\vec{e}_x$	$d\vec{S}_\rho=\rho d\phi dz\vec{e}_\rho$	$d\vec{S}_r=r^2\sin\theta d\theta d\phi\vec{e}_r$
$d\vec{S}_y=dxdz\vec{e}_y$	$d\vec{S}_\phi=d\rho dz\vec{e}_\phi$	$d\vec{S}_\theta=r\sin\theta drd\phi\vec{e}_\theta$
$d\vec{S}_z=dxdy\vec{e}_z$	$d\vec{S}_z=\rho d\rho d\phi\vec{e}_z$	$d\vec{S}_\phi=rdrd\theta\vec{e}_\phi$
$dV=dxdydz$	$dV=\rho d\rho d\phi dz$	$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

$$\nabla A=gradA=\frac{1}{h_1}\frac{\partial A}{\partial u_1}\vec{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial A}{\partial u_2}\vec{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial A}{\partial u_3}\vec{e}_3$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=div\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}h_2h_3F_1+\frac{\partial}{\partial u_2}h_1h_3F_2+\frac{\partial}{\partial u_3}h_1h_2F_3\right]$$

$$\nabla\times\vec{F}=rot\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$$

$$x=\rho\cos\phi \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$y=\rho\sin\phi \qquad \phi=\tan^{-1}(y/x)$$
$$z=z \qquad z=z$$

$$x=r\sin\theta\cos\phi \qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y=r\sin\theta\sin\phi \qquad \theta=\tan^{-1}\left(\sqrt{x^2+y^2}/z\right)$$
$$z=r\cos\theta \qquad \phi=\tan^{-1}(y/x)$$

$$\nabla\cdot(\nabla A)=div(gradA)=\nabla^2A=\Delta A$$

$$\Delta A=\frac{\partial^2A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2A}{\partial y^2}+\frac{\partial^2A}{\partial z^2}$$

$$\Delta A=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2A}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2A}{\partial z^2}$$

$$\Delta A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2A}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla\times(\nabla A)=rot(gradA)=0$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=div(rot\vec{F})=0$$

$$\int_S\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s}=\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

$$\int_V\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)\cdot dv=\oint_S\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$\int\frac{dt}{[t^2+c^2]^{3/2}}=\frac{1}{c^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+c^2}} \qquad \int\frac{tdt}{[t^2+c^2]^{3/2}}=-\frac{1}{\sqrt{t^2+c^2}}$$