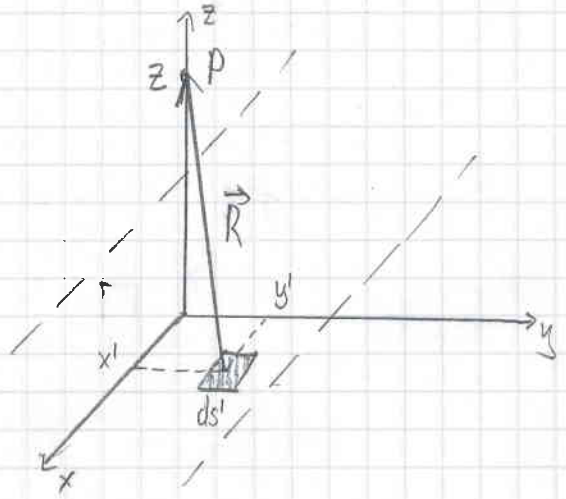
4. Ödev:

1)



$$\vec{R} = (z-z')\vec{e}_z + (y-y')\vec{e}_y + (x-x')\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{R} = z\vec{e}_z - x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\times\vec{R}}{|\vec{R}|^3}\,dv'$$

Burada akım yoğunluğu yüzeysel olduğundan $dv' \to ds' = dx'dy'$

$$\vec{J} = J_0\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{(J_0\vec{e}_x)\times(z\vec{e}_z - x'\vec{e}_x - y'\vec{e}_y)}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}\,dx'dy'$$

vektörel çarpım sonucu:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 J_0}{4\pi}\int_S \frac{z}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}\,dx'dy'\,\vec{e}_y - \frac{\mu_0 J_0}{4\pi}\int_S \frac{y'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}\,dx'dy'\,\vec{e}_z$$

Sağ el kuralına göre akımın yönü $\vec{e}_x$ olduğundan $P(0,0,z)$ noktasında manyetik alanın yönü $\vec{e}_y$ olacaktır. Dolayısıyla $\vec{e}_z$'li bileşen sıfır değerini alır. Buna göre

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 J_0 z}{4\pi}\int_{y'=-a}^{a}\int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{dx'dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{e}_y$$

Öncelikle $$\int_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(y'^2+z^2)}\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}}\Bigg|_{x'=-\infty}^{x'=\infty} = \frac{2}{(y'^2+z^2)}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 \dot{J}_0 z}{2\pi}\int_{y'=-a}^{a}\frac{dy'}{(y'^2+z^2)}\,\vec{e}_y$$

Burada $\int_{-a}^{a}\frac{dy'}{y'^2+z^2} = \frac{1}{z^2}\int_{-a}^{a}\frac{dy'}{1+\frac{y'^2}{z^2}}$ $u=\frac{y'}{z}$ $du=\frac{dy'}{z}$ dönüşümüyle

$$= \frac{1}{z^2}\int\frac{z\,du}{1+u^2} = \frac{1}{z}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{z}\tan^{-1}u = \frac{1}{z}\tan^{-1}\left(\frac{y'}{z}\right)\Bigg|_{y'=-a}^{y'=a}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 J_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right)\vec{e}_y$$

2) a) x=a'daki telin orijinde oluşturduğu manyetik endüksiyon: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{e}_z$

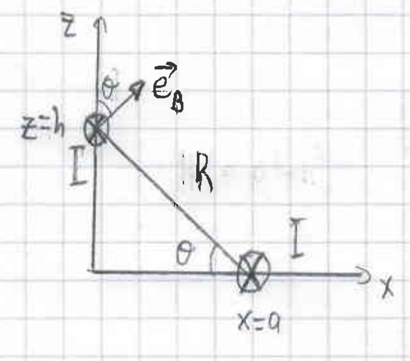
z=h'daki telin orijinde oluşturduğu manyetik endüksiyon: $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}(-\vec{e}_x)$

Çemberin oluşturduğu endüksiyon: $\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 R_0^2 I}{2R_0^3}\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R_0}\vec{e}_z$

Orijindeki toplam manyetik end: $\vec{B} = \vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2}\left[\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{\pi a}\right)\vec{e}_z - \frac{1}{\pi h}\vec{e}_x\right]$

b) $d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$ $d\vec{l} = dy\,\vec{e}_y$

$\vec{B}$'nin ifadesi için xz düzleminde kesite bakılabilir:



R: iki tel arasındaki uzaklık

$\Rightarrow R=\sqrt{a^2+h^2}$

$\vec{e}_B$: x=a'daki telin z=h'daki tel üzerinde oluşturduğu manyetik alanın yönünü gösteren birim vektör.

Buna göre $\vec{e}_B = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_x$ Burada $\sin\theta = \frac{h}{a}$ ve $\cos\theta = \frac{a}{h}$

Sonuç olarak $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,\vec{e}_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi (a^2+h^2)^{1/2}}\left(\frac{a}{h}\vec{e}_z + \frac{h}{a}\vec{e}_x\right)$

$$\Rightarrow d\vec{F} = I\cdot dy\,\vec{e}_y \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+h^2}}\left(\frac{a}{h}\vec{e}_z + \frac{h}{a}\vec{e}_x\right)$$

L boyuna etkiyen kuvvet: $\vec{F} = \int_{y=0}^{L} d\vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi\sqrt{a^2+h^2}}\left[\frac{a}{h}\vec{e}_x - \frac{h}{a}\vec{e}_z\right]$$

c) $x=a$'daki telin oluşturduğu manyetik endüksiyonun xy düzlemindeki ifadesi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}\vec{e}_z$$

R_0 yarıçaplı daire için $\vec{ds} = \vec{n}\,ds = dx\,dy\,\vec{e}_z$

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}\,dx\,dy$$

R_0 yarıçaplı çember için denklem $x^2+y^2=R_0^2$

$$\Rightarrow \phi = \int_{y=-R_0}^{R_0}\int_{x=-\sqrt{R_0^2-y^2}}^{\sqrt{R_0^2-y^2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}\,dx\,dy$$

Hatırlatma: $\int_{L_1}^{L_2}\frac{dx}{C-x} = \ln\left(\frac{C-L_1}{C-L_2}\right)$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{y=-R_0}^{R_0} \ln\left(\frac{a+\sqrt{R_0^2-y^2}}{a-\sqrt{R_0^2-y^2}}\right) dy$$

Alternatif olarak silindirik koordinatlar kullanılabilir: $x,y,z \rightarrow \rho,\phi,z$

Bu durumda $x=\rho\cos\phi$ olduğundan $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a-\rho\cos\phi)}\vec{e}_z$

$$\vec{ds} = \vec{n}ds = \rho d\phi d\rho \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R_0} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\rho}{(a-\rho\cos\phi)} d\rho d\phi$$

$$\Rightarrow \int \vec{B}\cdot\vec{ds} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\cdot\ln(a-R_0\cos\phi)+R_0\cos\phi}{\cos^2\phi} d\phi$$

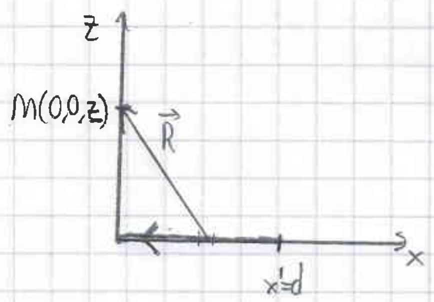
3) Çember şeklinde bükülmüş tel için daha önce bulunduğu gibi (sadece sınırlar değişir)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\phi'=\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{d^2 d\phi'\vec{e}_z + dz d\phi' \vec{e}_\rho}{(d^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d^2}{(d^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\phi' + \frac{zd}{(d^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_x\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos\phi' d\phi'$$

$$+ \frac{zd}{(d^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_y\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin\phi' d\phi'$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{3\mu_0 I d^2}{8(d^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z - \frac{z\cdot d}{(d^2+z^2)^{3/2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_y)$$

x ekseni üzerindeki tel parçası için



$$\vec{d\ell} = -dx'\vec{e}_x$$

$$\vec{R} = z\vec{e}_z - x'\vec{e}_x$$

$$I\vec{d\ell}\times\vec{R} = -Idx'\vec{e}_x \times (z\vec{e}_z - x'\vec{e}_x)$$

$$\Rightarrow I\vec{d\ell}\times\vec{R} = Idx'\vec{e}_y$$

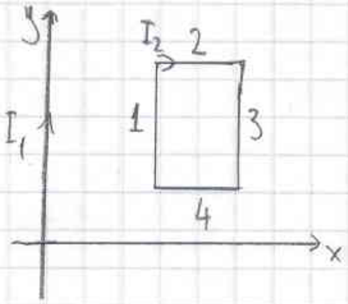
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x'=0}^{d} \frac{I\,dx'}{(z^2+x'^2)^{3/2}}\,\vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{z^2}\,\frac{d}{\sqrt{d^2+z^2}}\,\vec{e}_y$$

Benzer şekilde y ekseni üzerindeki tel için $\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{z^2}\,\frac{d}{\sqrt{d^2+z^2}}\,\vec{e}_x$

$M(0,0,z)$ noktasındaki toplam endüksiyon:

$$\vec{B} = \vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3 = \frac{3\mu_0 I d^2}{8(d^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{e}_z + \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{z^2}\,\frac{d}{\sqrt{d^2+z^2}} - \frac{z\cdot d}{(d^2+z^2)^{3/2}}\right](\vec{e}_x+\vec{e}_y)$$

4) a)



1. kenara etkiyen kuvvet için $d\vec{F}_1 = I_2\,d\vec{l}\times\vec{B}_1$

$d\vec{l} = dy\,\vec{e}_y$ $\quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi W_1}(-\vec{e}_z)$ $\quad d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi W_1}\,dy\,(-\vec{e}_x)$

$$\vec{F}_1 = \int_{H_1}^{H_2} d\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi W_1}(H_2-H_1)(-\vec{e}_x)$$

Benzer şekilde 3. tele etkiyen toplam kuvvet $\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi W_2}(H_2-H_1)\,\vec{e}_x$

2. kenara etkiyen kuvvet için $d\vec{F}_2 = I_2\,d\vec{l}\times\vec{B}_1$

$d\vec{l} = dx\,\vec{e}_x$ $\quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\vec{e}_z)$ $\quad d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\,dx\,\vec{e}_y$

$$\vec{F}_2 = \int_{x=W_1}^{W_2} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\,dx\,\vec{e}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right)\vec{e}_y$$

Benzer şekilde 4. kenar için $\vec{F_4} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right)(-\vec{e}_y)$

Çerçeveye etkiyen toplam kuvvet: $\vec{F}_{top} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}(H_2 - H_1)\left[\frac{1}{W_2} - \frac{1}{W_1}\right]\vec{e}_x$

b) $\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds}$ $\qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\vec{e}_z)$ $\qquad \vec{ds} = dx\,dy\,(-\vec{e}_z)$

$$\Rightarrow \phi = \int_{y=H_1}^{H_2} \int_{x=W_1}^{W_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx\,dy = \int_{y=H_1}^{H_2} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right) dy = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln\left(\frac{W_2}{W_1}\right)(H_2 - H_1)$$

5. Ödev

1) Merkezi orijinde bulunan tek bir bobinin ekseni üzerinde herhangi bir $P(x,0)$ noktasında oluşturacağı manyetik endüksiyon, üzerinden I akımı akan N sayıda çemberin oluşturacağı manyetik endüksiyona eşittir.

Bildiğimiz gibi I akımı akan çemberin ekseni üzerinde (bu soru için x ekseni) oluşturduğu manyetik endüksiyon:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

Buna göre N sarımlı bobin için $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$

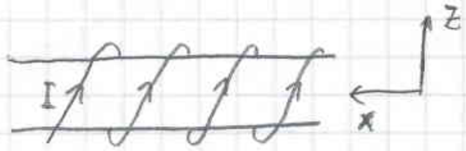
Merkezi $x = R$ noktasında bulunan ikinci bobin için manyetik endüksiyon x ekseninde öteleme ile elde edilebilir.

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N I R^2}{2[R^2+(x-R)^2]^{3/2}} \vec{e}_x$$

Dolayısıyla Helmholtz düzeneği için toplam end:

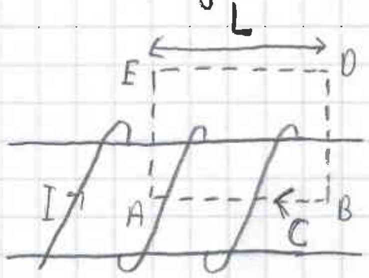
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N I R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{[R^2+(x-R)^2]^{3/2}}\right]\vec{e}_x$$

2)



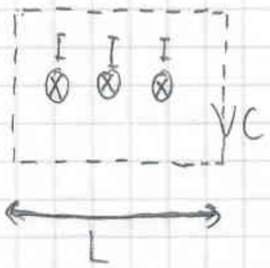
Sağ el kuralına göre solenoidin içinde $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Toroidal bobine benzer şekilde dışarıda $\vec{B} = 0$

Manyetik endüksiyonu bulmak için sarmalın bir kısmını içeren dikdörtgen biçimli bir C eğrisi üzerinde Ampere yasası uygulanır.



C eğrisi ABDE dikdörtgeni ($\overline{AB} = \overline{DE} = L$)

$$\vec{B}_{iç} = B \cdot \vec{e}_x$$
$$\vec{B}_{dış} = 0$$



Solenoidin birim boyunda n sarım bulunduğundan C eğrisi içinde kalan toplam akım nLI

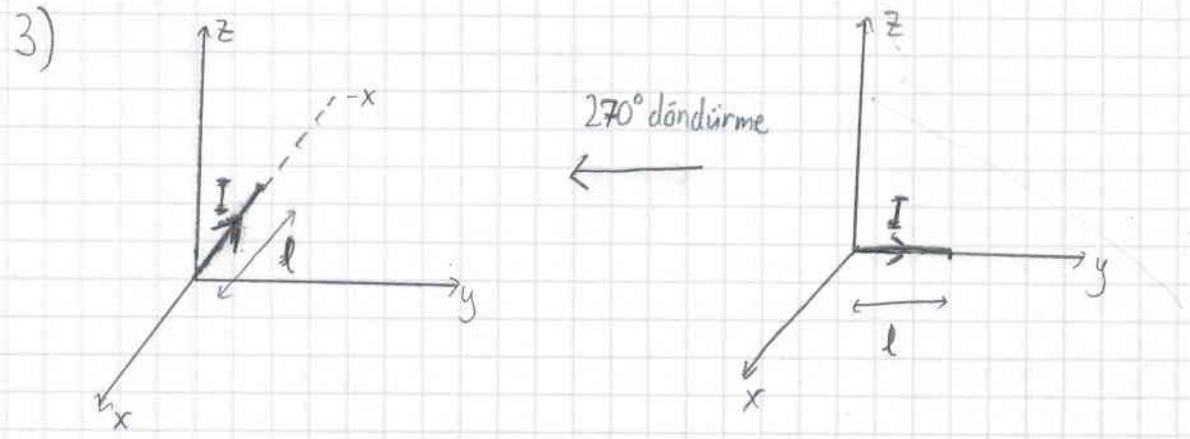
$$\Rightarrow \oint \vec{B}\,d\vec{\ell} = \mu_0 nLI \quad \text{(Ampere yasası)}$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_E^D \underbrace{\vec{B}_{dış}}_{=0} \cdot(-\vec{e}_x)\,dx + \int_D^B \underbrace{B\,\vec{e}_x\cdot(-\vec{e}_z)}_{=0}\,dz + \int_B^A \underbrace{B\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x}_{=1}\,dx + \int_A^E \underbrace{B\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z}_{=0}\,dz$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_B^A B\,dx = B\int_B^A dx = B\cdot L$$

$$\Rightarrow B\cdot L = \mu_0 nLI \Rightarrow B = \mu_0 nI \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 nI\,\vec{e}_x$$

3)



Yapılan iş $W = -\int \vec{F}\cdot d\vec{l}$ $\quad d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}\Big|_{z=0}$ (tel her zaman z=0 düzleminde)

Bu ifadelerdeki $d\vec{l}$ terimleri farklı. $W = -\int \vec{F} d\vec{l}$'deki $d\vec{l}$, telin taşınırken izlediği yolu ifade ediyor. $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$'deki $d\vec{l}$ ise akımın yönünü belirtiyor.

Telin hareketi boyunca akım ρ yönünde olduğundan $d\vec{F} = I\,d\rho\,\vec{e}_\rho \times B_0\,\vec{e}_z$

$$\Rightarrow d\vec{F} = I B_0\, d\rho\,(-\vec{e}_\phi)$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} \Rightarrow W = -\int \vec{F} d\vec{l} = -\iint d\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Tel ϕ'ye göre negatif yönde döndürüldüğünden $d\vec{l} = \rho\, d\phi\,(-\vec{e}_\phi)$

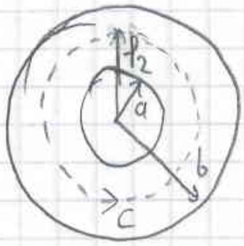
$$\Rightarrow W = -\int_{\rho=0}^{l}\int_{\phi=-\pi}^{\frac{\pi}{2}} I B_0\, \rho\, d\phi\, d\rho = -\frac{I B_0\, 3\pi l^2}{4}$$

Sonucun negatif çıkması işin manyetik alan tarafından yapıldığını gösterir.

4) silindirik koordinatlarda ρ_i yarıçaplı çember şeklinde C eğrileri seçilerek Ampere yasası uygulanır.

i) $0<\rho_1<a$ için $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{iç} = I_1 \Rightarrow \vec{H} = \dfrac{I_1}{2\pi\rho_1}\vec{e}_\phi$

ii) $b>\rho_2>a$ için $I_{iç}$, ρ_2 ile a yarıçapları arasındaki bölgeden geçen akımı da içerir.



$$I_{iç} = I_1 + \int \vec{J}\,d\vec{s} \qquad d\vec{s} = \rho\, d\rho\, d\phi\, \vec{e}_z$$

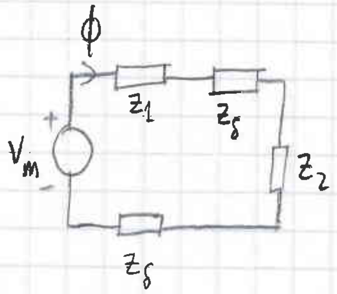
$$\int \vec{J}\,d\vec{s} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{\rho_2} -\frac{k}{\rho}e^{-\rho}\,\rho\, d\rho\, d\phi = k2\pi\left(e^{-\rho_2}-e^{-a}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \left[\frac{I_1}{2\pi\rho_2} + \frac{k(e^{-\rho_2}-e^{-a})}{\rho_2}\right]\vec{e}_\phi$$

iii) $\rho_3>b$ için $\int \vec{J}\,d\vec{s} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b} -\frac{k}{\rho}e^{-\rho}\,\rho\, d\rho\, d\phi = k2\pi\left(e^{-b}-e^{-a}\right)$

$$\Rightarrow \vec{H} = \left[\frac{I_1}{2\pi\rho_3} + \frac{k(e^{-b}-e^{-a})}{\rho_3}\right]\vec{e}_\phi$$

5) Devrenin eşdeğeri:



Burada $V_m = N \cdot I$

$\phi = B \cdot S$

$Z_1 = \dfrac{l_1}{\mu_1 S}$ $\quad Z_2 = \dfrac{l_2}{\mu_2 S}$ $\quad Z_\delta = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$

$$V_m = \phi \left[Z_1 + Z_2 + 2 \cdot Z_\delta \right] \qquad V_m = 5000 \text{ A·Sarım}$$

$$Z_1 = \frac{0{,}15\,m}{1000\mu_0 \cdot 0{,}001\,m^2} = \frac{0{,}15}{\mu_0} \left[\frac{1}{H}\right] \qquad Z_2 = \frac{0{,}15}{2\mu_0} \left[\frac{1}{H}\right] \qquad Z_\delta = \frac{10}{\mu_0} \left[\frac{1}{H}\right]$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{V_m}{Z_1 + Z_2 + 2Z_\delta} = 247\mu_0 \ [Wb]$$

$$B = \frac{\phi}{S} = 247000\mu_0 = 0{,}31 \ [T]$$

Birimler:

Reluktans	(Z)	$1/H$	[H: Henry]
Permittivite	(μ)	H/m	
Manyetik alan	(ϕ)	Wb	[Wb: Weber]
Many. end	(B)	T	[Tesla ; $1T = 1\,Wb/m^2$]
Many. alan	(H)	A/m	[A: Ampere]