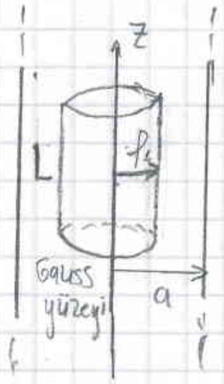
4) Bu soru Gauss veya Poisson denklemleri kullanılarak 2 farklı şekilde çözülebilir.

a) Elektrik alanı bulmak için Gauss metodundan faydalanmak daha uygun olur. Verilen geometri silindirik koordinatlarda sadece ρ (yarıçap) doğrultusunda değişim gösterdiğinden ϕ ve z koordinatlarına göre simetriktir. Dolayısıyla elektrik alan $\vec{E} = E(\rho)\,\vec{e}_\rho$ şeklinde ifade edilebilir. Buna uygun olarak ekseni z ekseninde bulunan L uzunluğunda ρ_1 yarıçaplı silindirin yüzeyi Gauss yüzeyi olarak seçilir.



i) Silindirin içindeki elektrik alan için $\rho_1 < a$

$$Q = \int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 E(\rho)\,\vec{e}_\rho$$

silindirin tabanları için $d\vec{S} = \pm \vec{e}_z\, ds$

$$\Rightarrow \int_S \varepsilon_0 E(\rho) \underbrace{\vec{e}_\rho \cdot (\pm \vec{e}_z)}_{=0} dS = 0$$

Dolayısıyla silindirin tabanından akı geçmez. Yan yüzey için $d\vec{S} = \vec{e}_\rho\, \rho_1 d\phi dz$

$$\Rightarrow Q = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{L} \varepsilon_0 E(\rho_1)\cdot \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho\, \rho_1 d\phi\, dz = \varepsilon_0 E(\rho_1)\cdot \rho_1 2\pi L$$

$$\Rightarrow E(\rho_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi L \rho_1}$$

Q : Gauss yüzeyinin (L boyunda, ρ_1 yarıçaplı silindir) içinde kalan toplam yük.

$\rho_1 < a$ için $$Q = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho_1} \underbrace{k_0 \rho^2}_{=\rho_V} \cdot \rho\, d\rho\, d\phi\, dz = k_0 2\pi L \frac{\rho_1^4}{4} \quad [C]$$

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k_0}{\varepsilon_0}\frac{\rho_1^3}{4}\vec{e}_\rho \qquad 0 \leq \rho_1 \leq a$

Silindirin dışındaki alanı bulmak için Gauss yüzeyinin yarıçapı $\rho_1 > a$ olarak seçilir. Bu durumda da $E(\rho_1) = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi L \rho_1}$ ifadesi geçerli kalır.

Burada $Q = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a} k_0\rho^2 \cdot \rho d\rho d\phi dz = k_0 2\pi L \frac{a^4}{4}$ [C]

$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k_0}{\varepsilon_0}\frac{a^4}{4\rho_1}\vec{e}_\rho \qquad a \leq \rho_1 < \infty$

b) Potansiyel fonksiyonunu doğrudan hesaplamak için a yarıçaplı silindirin içinde Poisson denklemi $\Delta V = -\rho_v/\varepsilon_0$; dışında ise Laplace denklemi $\Delta V = 0$ kullanılabilir.

Simetriden ötürü $V = V(\rho)$ olacağından silindirik koordinatlarda

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\right)$$

$\rho < a$ için $\quad \Delta V = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\right) = -\frac{k_0\rho^2}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = -\frac{k_0\rho^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho\frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{k_0\rho^4}{4\varepsilon_0} + C_1 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial\rho} = -\frac{k_0\rho^3}{4\varepsilon_0} + \frac{C_1}{\rho}$$

$\Rightarrow V_{iç}(\rho) = -\frac{k_0\rho^4}{16\varepsilon_0} + C_1 \ln(\rho) + C_2 \qquad C_1, C_2$: sabitler

Silindirin dışında $(\rho > a)$ için $\Delta V = 0$

$\Rightarrow V_{dış}(\rho) = C_3 \ln(\rho) + C_4 \qquad C_3, C_4$: sabitler

Bu sabitler sınır koşullarından bulunur.

5

i) $\rho=0$ için potansiyel ve elektrik alan sonlu değerler almalı. (Tekillik olmamalı)

Silindirin içi için $\vec{E}=-\frac{\partial V_{iç}}{\partial \rho}\vec{e}_\rho=\left[\frac{k_0\rho^3}{4\varepsilon_0}-\underbrace{\frac{C_1}{\rho}}_{\substack{\rho\to 0 \text{ için} \\ \text{tekillik yaratır.}}}\right]\vec{e}_\rho$

$\vec{E}$'nin sonlu kalması için $C_1=0$ olmalı. [Hopital kuralına göre $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{0}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{0}{1}=0$]

ii) Silindirin yüzeyinde ($\rho=a$) potansiyel ve elektrik alan sürekli olmalı. (her iki bölgede de $\varepsilon=\varepsilon_0$ olduğu için elektrik alan da sürekli olmalı; farklı ε değerleri için elektrik alanın normal bileşeni süreksizdir. Potansiyel ise her zaman süreklidir)

$$\vec{E}_{iç}=-\frac{\partial V_{iç}}{\partial \rho}\vec{e}_\rho=\frac{k_0\rho^3}{4\varepsilon_0}\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{E}_{iç}\Big|_{\rho=a}=\frac{k_0a^3}{4\varepsilon_0}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{E}_{dış}=-\frac{\partial V_{dış}}{\partial \rho}\vec{e}_\rho=-C_3\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{E}_{dış}\Big|_{\rho=a}=-\frac{C_3}{a}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{E}_{iç}\Big|_{\rho=a}=\vec{E}_{dış}\Big|_{\rho=a} \Rightarrow C_3=-\frac{k_0a^4}{4\varepsilon_0}$$

Bu noktada Laplace ve Poisson denklemleriyle silindirin içindeki ve dışındaki elektrik alan ifadelerini belirlemiş olduk. Potansiyel fonksiyonundaki C_2 ve C_4 sabitleri türev alırken kaybolduğundan, bu sabitlerin elektrik alan üzerinde etkisi yok.

iii) C_4 sabitini belirlemek için silindirin dışındaki $V(e^{1/a^4})=V_0$ değeri kullanılır.

$V_{dış} = -\frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0}\ln(\rho) + C_4$ $\qquad \rho = e^{1/\alpha^4}$ için $V_{dış} = -\frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\alpha^4} + C_4 = V_0$

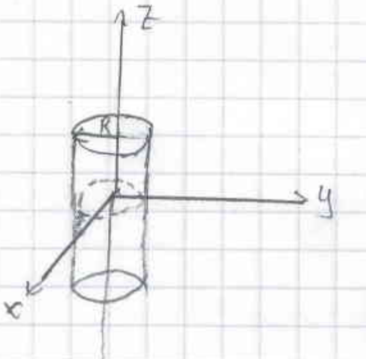
$$\Rightarrow C_4 = V_0 + \frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0 \alpha^4}$$

iv) Son olarak C_2 sabitini belirlemek için yine $\rho = a$ sınır yüzeyinde potansiyelin sürekliliği kullanılır.

$V_{iç} = -\frac{k_0 \rho^4}{16\varepsilon_0} + C_2$ $\qquad V_{dış} = -\frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0}\ln(\rho) + V_0 + \frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0 \alpha^4}$

$\rho = a$ için $V_{iç}(a) = V_{dış}(a) \Rightarrow C_2 = V_0 + \frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0 \alpha^4} - \frac{k_0 a^4}{4\varepsilon_0}\ln(a) + \frac{k_0 a^4}{16\varepsilon_0}$

5) Sonsuz geniş plaka xy düzlemine yerleştirildiğinden uzayda değişim sadece z yönündedir (x ve y yönünde değişim yok, yapı bu doğrultularda homojen). Bu nedenle elektrik alan $z>0$ için $\vec{E} = E\vec{e}_z$; $z<0$ için $\vec{E} = E(-\vec{e}_z)$ formundadır. Buna uygun olarak tabanları xy düzlemine paralel ve bu düzlemi kesen R yarıçaplı silindir yüzeyi Gauss yüzeyi olarak seçilir.



Elektrik alanın yapısı gereği akı sadece silindirin iki tabanından geçer. Yan yüzey için $d\vec{s}_\rho = \rho\, d\phi\, dz\, \vec{e}_\rho$

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_S \varepsilon_0 E \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho}_{=0} \rho\, d\phi\, dz = 0$$

üst taban için $d\vec{s} = \rho\, d\phi\, d\rho\, e_z$ ve alt taban için $d\vec{s} = \rho\, d\phi\, d\rho\, (-\vec{e}_z)$

Silindirin içinde yük bulunan bölge xy düzlemindeki R yarıçaplı daire (silindirin xy düzlemini kestiği yüzey). Dolayısıyla $Q = \sigma \cdot 2\pi R^2$

$$\Rightarrow Q = \sigma\pi R^2 = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon_0 E\cdot\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z\, \rho\, d\rho\, d\phi + \int_{\rho=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon_0 E(-\vec{e}_z)\cdot(-\vec{e}_z)\, \rho\, d\rho\, d\phi \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z$$