EM Alanlar Ödev 1 :

6) Silindir yüzeyi alt taban, üst taban ve yan yüzey olmak üzere üç parçada incelenir.

S_1 : alt taban

S_2 : üst taban

S_3 : yan yüzey

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow \oint_S \vec{A}\cdot\vec{ds} = \oint_{S_1} \vec{A}\cdot\vec{ds} + \oint_{S_2} \vec{A}\cdot\vec{ds} + \oint_{S_3} \vec{A}\cdot\vec{ds}$$

S_1 için $\oint_{S_1} \vec{A}\cdot\vec{ds} = \oint_{S_1} \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds$ $\quad$ $\vec{n}$: dışa doğru yüzey normali $\Rightarrow \vec{n} = -\vec{e}_z$

S_1 yüzeyi $z=-3$ düzleminde yer aldığından z=sabit ve

$ds = ds_z = \rho\, d\phi\, d\rho$

$$\oint_{S_1} \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2} \left(\frac{5}{\rho}\vec{e}_\rho - z\vec{e}_z\right)(-\vec{e}_z)\,\rho\, d\rho\, d\phi \qquad \vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_z = 0$$

$z=-3$ yüzeyinde integral alındığından $\oint_{S_1} \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2} (-3)\,\rho\, d\rho\, d\phi = -12\pi$ //

S_2 için yapı aynı ancak normal vektör $\vec{n} = \vec{e}_z$ ve $z=3$

integral sonucu : $\oint_{S_2} \vec{A}\cdot\vec{ds} = -12\pi$ //

S_3 için yüzey $\rho=2$ yüzeyi ve yüzey normali $\vec{n} = \vec{e}_\rho$

$$\vec{ds} = \vec{n}\,ds = \vec{e}_\rho\, ds_\rho = \vec{e}_\rho\, \rho\, d\phi\, dz = \vec{e}_\rho \cdot 2\, d\phi\, dz$$

$$\oint_{S_3} \vec{A}\cdot\vec{ds} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3}^{3} \left(\frac{5}{\rho}\vec{e}_\rho - z\vec{e}_z\right)\cdot\vec{e}_\rho\, 2\, d\phi\, dz = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3}^{3} \frac{5}{2}\cdot 2\, d\phi\, dz = 60\pi \text{ //}$$

2

9) Diverjans teoremi: $\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dv = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds}$

Burada V, 4m yarıçaplı küre, S ise aynı kürenin yüzeyi

$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds}$ için $\vec{ds} = \vec{n}\,ds$ küre yüzeyi için $\vec{n} = \vec{e_r}$

$ds = ds_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 16\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} 2r^2\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}\cdot 16\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} 2\cdot 16\cdot 16\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 2048\pi$$

$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dv$ için $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\cdot 2r^2\right)\right] = 8r$

$dv = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$\int_V (\nabla\cdot\vec{E})\,dv = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{4} 8r\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = 2048\pi$$

14) $\oint_S (3\sin\theta\,\vec{e_r})\cdot\vec{ds}$ S: r=5m yarıçaplı küre yüzeyi

$\Rightarrow \vec{ds} = \vec{n}\,ds$ $\vec{n} = \vec{e_r}$ $ds = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 25\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

$$\Rightarrow \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} 3\sin\theta\cdot\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}\,25\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} 75\sin^2\theta\,d\theta\,d\phi = 150\pi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ olduğundan $\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \oint_S (3\sin\theta\,\vec{e_r})\cdot\vec{ds} = 150\pi\cdot\frac{\pi}{2} = 75\pi^2$$

10) Stokes teoremi : $\int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{ds} = \oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}$

Burada S yüzeyi şekil 1'de verilen çeyrek daire, C ise S yüzeyini çevreleyen a-b-c eğrisi

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{e}_z$$

Geometri silindirik koordinatlara uygun olduğundan integral silindirik koordinatlarda alınır:

$$\oint_S (\nabla\times\vec{A})\,\vec{ds} = \oint_S (-2\vec{e}_z)\,\vec{ds} \qquad \vec{ds} = \vec{n}\,ds$$

C eğrisinin yönüne göre sağ el kuralından yüzey normali $\vec{n} = -\vec{e}_z$

$z=0$ (z=sabit) yüzeyinde integral alındığından $ds = ds_z = \rho\, d\phi\, d\rho$

$$\oint_S (-2\vec{e}_z)\,\vec{ds} = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{1} (-2\vec{e}_z)(-\vec{e}_z)\,\rho\, d\rho\, d\phi = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}$ integrali a-b, b-c ve c-a olmak üzere 3 parçada incelenir:

a-b için $x=0$, $y\in[0,1]$ ve $\vec{dl} = \vec{e}_y\,dy$

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int_{y=0}^{1} (y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)\cdot\vec{e}_y\,dy = \int_{y=0}^{1} -x\,dy = 0 \quad \text{(a-b yolu için } x=0)$$

c-a için $y=0$ $x\in[0,1]$ ve $\vec{dl} = -\vec{e}_x\,dx$

$$\Rightarrow \int_c^a \vec{A}\cdot\vec{dl} = \int_{x=0}^{1} (y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)\cdot(-\vec{e}_x)\,dx = \int_{x=0}^{1} -y\,dx = 0 \quad \text{(c-a yolu için } y=0)$$

b-c yolu için silindirik koordinatlarda integral daha uygun:

b-c eğrisi için $\rho = 1$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ve $\vec{dl} = -e_\phi \cdot \rho d\phi = -e_\phi d\phi$

$$\int_b^c \vec{A} \cdot \vec{dl} = \int_{\phi=\frac{\pi}{2}}^{0} (y\vec{e}_x - x\vec{e}_y) \cdot (-\vec{e}_\phi)\, d\phi$$

Burada $y = \sin\phi$ $\quad x = \cos\phi$

$\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi$

$\vec{e}_y = \vec{e}_\rho \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi$

$$= \underbrace{\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\, d\phi}_{\vec{e}_x\text{'li bileşen}} + \underbrace{\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi\, d\phi}_{\vec{e}_y\text{'li bileşen}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} //$$

11) $P(1,1,2)$ noktasında V'nin en büyük artış doğrultusu ∇V'nin $1,1,2$ noktasındaki doğrultusudur. Artışın büyüklüğü ise ∇V'nin o noktadaki normu $\left\| \nabla V \right\|_{P(1,1,2)}$ değerine eşittir.

$$\nabla V = \left[\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)e^{-z}\right]\vec{e}_y$$

$$+ \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)(-e^{-z})\right]\vec{e}_z$$

$P(1,1,2)$ noktasında $\nabla V\Big|_{1,1,2} = 0{,}075\,\vec{e}_y - 0{,}096\,\vec{e}_z$

$$\left|\nabla V\right|_{1,1,2} = \sqrt{0{,}075^2 + 0{,}096^2} = 0{,}12$$

Başlangıç doğrultusundaki artış hızı ∇V'nin o doğrultuya izdüşümü alınarak hesaplanabilir.

$\vec{PO}$ vektörü : $\vec{PO} = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - 2\vec{e}_z$

$\nabla V \cdot \vec{PO} = |\nabla V| \cdot |\vec{PO}| \cdot \cos\alpha$ α: iki vektör arasındaki açı

$$\nabla V\Big|_{1,1,2} \cdot \vec{PO} = 0 - 0{,}075 + 0{,}192 = 0{,}117$$

Buna göre başlangıç doğrultusundaki artış hızının büyüklüğü:

$$|\nabla V| \cdot \cos\alpha = \frac{0{,}117}{|\vec{PO}|} = \frac{0{,}117}{\sqrt{6}} = 0{,}05$$

15) $\nabla f = yz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + xy\vec{e}_z$

$\int_A^B \nabla f \cdot d\vec{l}$ için kartezyen koordinatlarda $d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \int_A^B \nabla f \cdot d\vec{l} = \int_A^B yz\,dx + \int_A^B xz\,dy + \int_A^B xy\,dz$$

AB eğrisi (0,0,0) ve (1,1,1) noktalarını birleştiren düz çizgi olduğundan denklemi $x=y=z$ şeklinde yazılabilir. Buna göre AB üzerinde $x=y=z$ ve $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, $z \in [0,1]$

$$\Rightarrow \int_A^B yz\,dx = \int_{x=0}^{1} x^2 dx \quad , \quad \int_A^B xz\,dy = \int_{y=0}^{1} y^2 dy \quad , \quad \int_A^B xy\,dz = \int_{z=0}^{1} z^2 dz$$

$$\Rightarrow \int_A^B \nabla f \cdot d\vec{l} = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$